УДК 517 . 9

ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

М. О. Перестюк, П. В. Фекета

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: pmo@univ.kiev.ua
petro.feketa@gmail.com

This article deals with general problems regarding existence of invariant toroidal sets for linear and weakly nonlinear impulsive systems of differential equations defined in direct product of m-measurable torus and n-measurable Euclidean space. Some classes of problems for which the conditions of existence of invariant toroidal manifolds are satisfied are invertigated.

Рассматриваются общие вопросы существования инвариантных тороидальных множеств линейной и слабонелинейной систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, определенных в прямом произведении m-мерного тора и n-мерного евклидового пространства. Исследованы классы задач, для которых условия существования инвариантных тороидальных множеств выполняются.

Теорія імпульсних диференціальних рівнянь використовується для математичного опису процесів та явищ, що характеризуються короткотерміновими збуреннями, тривалістю яких можна знехтувати. В останні роки математична теорія диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням інтенсивно розвивається. Одним із головних питань є встановлення умов існування інваріантних множин імпульсних систем та дослідження їх стійкості. Основними роботами в цьому напрямку є [1 – 3]. Умови існування інваріантних множин експоненціально дихотомічної імпульсної системи диференціальних рівнянь, визначеної в прямому добутку тора й евклідового простору, та їх гладкість досліджено в роботі [4]. Дану статтю присвячено дослідженню умов існування інтегральних множин лінійної та слабконелінійної систем диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку тора й евклідового простору, та виокремлено деякі класи задач, для яких умови існування мають місце.

Дослідимо питання існування інваріантних множин лінійної системи диференціальних рівнянь, визначеної в прямому добутку m-вимірного тора T^m і n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, яка піддається імпульсному збуренню в момент потрапляння точки в задану множину фазового простору. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi), \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T^m$, $A(\varphi)$ і $B(\varphi)$ — неперервні 2π-періодичні по кожній компоненті φ_j, $j = 1,\ldots,m$, матриці, $a(\varphi)$ — неперервна 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $j =$

$= 1, \ldots, m$ функція, $f(\varphi)$ і $g(\varphi)$ — неперервні функції, 2π-періодичні по кожній компоненті φ_j, $j = 1, \ldots, m$.

Вважатимемо, що множина Γ є підмножиною тора T^m, а саме, многовидом розмірності $m - 1$, який визначається рівнянням $\Phi(\varphi) = 0$, де $\Phi(\varphi)$ — неперервна скалярна 2π-періодична по φ функція.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого рівняння системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через $t = t_i(\varphi)$ розв'язки рівняння

$$\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0. \tag{2}$$

Розв'язки рівняння (2) є моментами часу імпульсної дії в системі (1). Вважатимемо, що рівняння (2) має розв'язки $t = t_i(\varphi)$, бо інакше система (1) була б не імпульсною, а звичайною динамічною системою.

Лема 1. *Для будь-якого розв'язку $t = t_i(\varphi)$ рівняння (2) виконується рівність*

$$t_i(\varphi_{-t}(\varphi)) - t_i(\varphi) = t \tag{3}$$

для всіх $\varphi \in T^m$, $t \in \mathbb{R}$.

Доведення. Якщо $t_i(\varphi)$ є розв'язком рівняння (2), то для будь-якого $\varphi \in T^m$

$$\Phi(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)) = 0.$$

Для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ точка $\varphi_{-t}(\varphi)$ належить тору T^m. Тому, замінюючи φ на $\varphi_{-t}(\varphi)$, одержуємо

$$\Phi(\varphi_{t_i(\varphi_{-t}(\varphi))}(\varphi_{-t}(\varphi)).$$

Тоді для деякого j і будь-яких $\varphi \in T^m$, $t \in \mathbb{R}$

$$t_i(\varphi_{-t}(\varphi)) - t = t_j(\varphi). \tag{4}$$

Якщо $t = 0$, то з (4) випливає, що $t_i(\varphi) = t_j(\varphi)$ для будь-якого $\varphi \in T^m$, а отже $i = j$, що і доводить лему.

Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ матрицант однорідної системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(\varphi_t(\varphi))x, \quad t \neq t_i(\varphi), \\ \Delta x|_{t=t_i(\varphi)} &= B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x, \end{aligned} \tag{5}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра. Зазначимо, що для однозначності розв'язку системи (5) матриця $(E + B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)))$ повинна бути невиродженою для всіх $\varphi \in T^m$ [1]. Тому далі вважатимемо, що матриця $E + B(\varphi)$ невироджена для $\varphi \in T^m$.

Нехай $C(\varphi)$, $\varphi \in T^m$ — неперервна матриця. Покладемо

$$G(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi)C(\varphi_t(\varphi)) & \text{при} \quad t \geq \tau, \\ \Omega_\tau^t(\varphi)(C(\varphi_t(\varphi)) - E) & \text{при} \quad t < \tau \end{cases} \tag{6}$$

і назвемо, аналогічно [4], $G(t,\tau,\varphi)$ функцією Гріна – Самойленка системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad \varphi \notin \Gamma,$$

$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x,$$

якщо $\|G(t,\tau,\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|}$ для деяких $K > 0, \gamma > 0$.

Функція $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє систему (5) при $t \neq \tau$, тобто

$$\frac{d}{dt}G(t,\tau,\varphi) = A(\varphi_t(\varphi))G(t,\tau,\varphi), \quad t \neq t_i(\varphi),$$

$$\Delta G(t,\tau,\varphi)|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))G(t_i(\varphi),\tau,\varphi),$$

а при $t = \tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком $G(\tau+0,\tau,\varphi) - G(\tau-0,\tau,\varphi) = E$.

Легко перевірити, що $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє рівності

$$\begin{gathered} G(t,\tau,\varphi+2\pi) = G(t,\tau,\varphi), \\ G(t,t+\tau,\varphi) = G(0,\tau,\varphi_t(\varphi)). \end{gathered} \tag{7}$$

Нехай матриця $G(t,\tau,\varphi)$ і функції $t_i(\varphi)$ такі, що функція $x_t(\varphi)$, залежна від $\varphi \in T^m$ як від параметра,

$$x_t(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \sum_{-\infty<t_i(\varphi)<+\infty} G(t,t_i(\varphi)+0,\varphi)g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)), \tag{8}$$

визначена для всіх $t \in \mathbb{R}$ і рівномірно обмежена. Покладемо $x_t(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ і замінимо у (8) φ на $\varphi_{-t}(\varphi)$. Тоді з урахуванням (3) і (7)

$$u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0,\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \sum_{-\infty<t_i(\varphi)<+\infty} G(0,t_i(\varphi)+0,\varphi)g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)). \tag{9}$$

Якщо інтеграл та сума в (9) є збіжними, то функція $u(\varphi)$ визначає інваріантну множину системи рівнянь (1)

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi+2\pi) = u(\varphi).$$

Дійсно, функція $x_t(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ при $t \neq t_i(\varphi)$ задовольняє рівняння

$$\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а при $t = t_i(\varphi)$ має стрибок

$$\Delta x = u(\varphi_{t_i(\varphi)+0}(\varphi)) - u(\varphi_{t_i(\varphi)-0}(\varphi)) = B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))u(\varphi_{t_i(\varphi)-0}(\varphi)) + g(\varphi_{t_i(\varphi)-0}(\varphi)).$$

Зауважимо, що для збіжності інтеграла та суми з (9) достатньо, щоб функція $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняла нерівність

$$\|G(t,\tau,\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|} \tag{10}$$

для всіх $t,\tau\in\mathbb{R}$, $\varphi\in T^m$ при деяких $K>0$ і $\gamma>0$ і щоб розв'язки рівняння (2) задовольняли умову

$$t_{i+1}(\varphi)-t_i(\varphi)\geq\theta>0 \tag{11}$$

для всіх $i\in\mathbb{Z}$, $\varphi\in T^m$ і деякого $\theta>0$.

Беручи до уваги ці умови, з (9) отримуємо

$$\|u(\varphi)\| \leq \frac{2K}{\gamma}\max_{\varphi\in T^m}\|f(\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\max_{\varphi\in T^m}\|g(\varphi)\| \tag{12}$$

для всіх $\varphi\in T^m$.

Отже, справедливою є така теорема.

Теорема 1. *Нехай в системі (1) 2π-періодичні функції $f(\varphi)$ і $g(\varphi)$ неперервні на торі T^m, матриці $A(\varphi)$ і $B(\varphi)$ неперервні на торі T^m і 2π-періодичні. Якщо матриця $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє оцінку (10) і функції $t_i(\varphi)$ задовольняють нерівність (11), то система (1) має інваріантну тороїдальну множину*

$$x=u(\varphi), u(\varphi+2\pi)=u(\varphi),$$

де функція $u(\varphi)$ кусково-неперервна з розривами першого роду на множині Γ, до того ж існує додатна стала C, яка не залежить від функцій $f(\varphi)$ і $g(\varphi)$, така, що

$$\|u(\varphi)\|\leq C\max\left\{\max_{\varphi\in T^m}\|f(\varphi)\|,\max_{\varphi\in T^m}\|g(\varphi)\|\right\}. \tag{13}$$

Доведення. Якщо виконуються умови теореми, то інваріантна множина $x=u(\varphi)$ визначається функцією $u(\varphi)$ із співвідношення (9). Оцінка (13) випливає з (12), якщо покласти

$$C=\max\left\{\frac{2K}{\gamma},\frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\right\}.$$

Теорему доведено.

Розглянемо деякі класи задач, для яких матриця $G(t,\tau,\varphi)$ і корені $t_i(\varphi)$ рівняння (2) задовольняють нерівності (10) і (11) відповідно.

Покажемо, що якщо множину Γ задано таким чином:

$$\Gamma=\{\varphi\in T^m:\langle b,\varphi\rangle=0(\operatorname{mod}2\pi)\}, \tag{14}$$

$$b=(b_1,\ldots,b_m)\in\mathbb{Q}^m,$$

то при деяких умовах, накладених на систему (1), рівняння

$$\langle b, \varphi_t(\varphi)\rangle = 0(\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

має розв'язки, до того ж відстань між двома послідовними розв'язками $t_i(\varphi)$ та $t_{i+1}(\varphi)$ допускає оцінку (11).

Далі вважатимемо, що компоненти b_i, $i = 1, \ldots, m$, вектора b — цілі числа з найбільшим спільним дільником 1, тобто

$$b_i \in \mathbb{Z}, \quad \text{НСД}\,(b_1, b_2, \ldots, b_m) = 1.$$

Лема 2. *Нехай задано лінію* $\Gamma = \{\varphi \in T^m : \langle b, \varphi\rangle = 0(\mathrm{mod}\, 2\pi)\}$ *на поверхні тора* T^m. *Тоді найменша відстань* θ *між будь-якими двома лініями на карті тора допускає зображення*

$$\theta = \frac{2\pi}{\|b\|}, \tag{15}$$

де

$$\|b\| = \sqrt{\langle b, b\rangle}.$$

Доведення. Нехай $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \in \Gamma$ — дві точки, які лежать на сусідніх звоях лінії Γ, тобто

$$\langle b, \varphi^{(1)}\rangle = 2k\pi,$$

$$\langle b, \varphi^{(2)}\rangle = 2(k+1)\pi.$$

Тоді

$$\langle b, \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}\rangle = 2\pi.$$

Позначимо $d = \left\|\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}\right\|$, тоді

$$\|d\| = \frac{2\pi}{\|b\| \cos\alpha},$$

де α — кут між d і b. Отже, найменша відстань між звоями лінії Γ

$$\theta = \min_{\alpha} d = \frac{2\pi}{\|b\|}.$$

Лема 3. *Нехай задано систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією (1) та множину* Γ *співвідношенням (14). Якщо* $a_i(\varphi) > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *то відстань між моментами імпульсної дії допускає оцінку*

$$t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta > 0,$$

де

$$\theta = \frac{2\pi \, \|q\|}{\langle b, Q \rangle}, \tag{16}$$

$$q_i = \min_{\varphi \in T_m} a_i(\varphi), \quad Q_i = \max_{\varphi \in T_m} a_i(\varphi), \quad q = (q_1, q_2, \ldots, q_m), \quad Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_m).$$

Доведення. Оскільки функція $a(\varphi)$ неперервна на компактній множині, то вона досягає свого найбільшого і найменшого значень на цій множині, тобто існують

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \min_{\varphi \in T_m} a_i(\varphi), \\ Q_i &= \max_{\varphi \in T_m} a_i(\varphi), \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Покладемо

$$\min_{\varphi \in T_m} a(\varphi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} q_i} = \|q\|.$$

Введемо функцію $\psi = \langle b, \varphi \rangle$. Тоді $\dot{\psi} = \langle b, \dot{\varphi} \rangle$. Остаточно отримаємо систему

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a(\varphi), \\ \dot{\psi} &= \langle b, a(\varphi) \rangle, \end{aligned} \tag{17}$$

де праві частини обох рівнянь додатні.

При $\psi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, розв'язки системи (17) будуть відповідати моментам імпульсної дії системи (1). Не порушуючи загальності, розглянемо точку $(\varphi_0, 0)$, в якій фазова крива системи (17) перетинає пряму $\psi = 0$. Оскільки всі $a_i(\varphi) > 0$ і $b_i > 0$, наступний імпульс виникне в момент перетину фазовою кривою системи (17) прямої $\psi = 2\pi$.

Розглянемо допоміжну систему

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega_1, \\ \dot{\psi} &= \omega_2, \end{aligned}$$

де ω_1 і ω_2 — деякі додатні константи. Тоді θ можна визначити як відстань по осі φ між кінцями відрізка, проведеного під кутом α від точки $(\varphi_0, 0)$ до прямої $\psi = 2\pi$, де

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

У цьому випадку

$$\theta = \frac{2\pi}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Повертаючись до системи (17), для оцінки θ знизу потрібно вибрати ω_1 і ω_2 так, щоб $\mathrm{tg}\,\alpha$ було найбільшим. Тому

$$\omega_1 = \min_{\varphi \in T_m} a(\varphi),$$

$$\omega_2 = \max_{\varphi \in T_m} \langle b, a(\varphi) \rangle.$$

Звідси

$$\theta = \frac{2\pi \, \|q\|}{\langle b, Q \rangle}.$$

Лему доведено.

Порівняємо оцінки (15) і (16):

$$\frac{2\pi}{\|b\|} > 2\pi \frac{\|q\|}{\langle b, Q \rangle},$$

$$\langle b, Q \rangle > \|b\| \, \|q\| \,,$$

$$\|b\| \, \|Q\| \cos \widehat{(b, Q)} > \|b\| \, \|q\| \,,$$

$$\cos (\widehat{b, Q}) > \frac{\|q\|}{\|Q\|}. \tag{18}$$

Отже, при виконанні умови (18) оцінка (15) краща за оцінку (16).

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 2. *Нехай задано систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією (1) і множину* $\Gamma = \{\varphi \in T^m : \langle b, \varphi \rangle = 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)\}$. *Якщо* $a_i(\varphi) > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, *то відстань між двома послідовними моментами імпульсної дії допускає оцінку*

$$t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta > 0,$$

де

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\|b\|}, & \textit{якщо} \quad \cos (\widehat{b, Q}) > \dfrac{\|q\|}{\|Q\|}, \\[2ex] 2\pi \dfrac{\|q\|}{\langle b, Q \rangle}, & \textit{якщо} \quad \cos (\widehat{b, Q}) \leq \dfrac{\|q\|}{\|Q\|}. \end{cases}$$

Розглянемо обмеження, які треба накласти на систему (1), щоб матриця $G(t, \tau, \varphi)$ задовольняла оцінку (10). Нехай

$$\Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi,$$

де Ω_φ — ω-гранична множина півтраєкторій $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in T^m$, $t \in [0, +\infty)$, а

$$\alpha^2 = \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \varphi \in \Omega}} \lambda_j \left[(E + B(\varphi))^T (E + B(\varphi)) \right],$$

тобто $\lambda_j \left[(E + B(\varphi))^T (E + B(\varphi)) \right] \leq \alpha^2$, $\varphi \in \Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi \subset T^m$, $j = 1, \ldots, n$.

Проведемо міркування, аналогічні [5]. Зафіксуємо деяке $\varphi^* \in T^m$ та розглянемо компактну півтраєкторію $\varphi_t(\varphi^*)$, $t \in [0, +\infty)$. Множина її ω-граничних точок Ω_{φ^*} — не порожня, замкнена, інваріантна, компактна та зв'язна множина [6], для якої $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(\varphi_t(\varphi^*), \Omega_{\varphi^*}) = 0$. Якщо $\varphi^* \in \Omega_{\varphi^*}$, то $\lambda_j(\varphi_t(\varphi^*) \leq \alpha^2, t \geq 0, j = 1, \ldots, n$.

Нехай $\varphi^0 \in \Omega_{\varphi^*}$. Тоді існує послідовність $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty \quad \text{і} \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi_{t_n}(\varphi^*) = \varphi^0.$$

Розглянемо послідовність функцій $\varphi_{t+t_n}(\varphi^*)$, кожна з яких визначена при $t \in [-t_n, +\infty)$. З неперервності розв'язку $\varphi_t(\varphi)$ по φ випливає

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_{t+t_n}(\varphi^*) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_t(\varphi_{t_n}(\varphi^*)) = \varphi_t(\varphi^0) \subset \Omega_{\varphi^*}.$$

Звідси

$$\lambda_j(\varphi^0) \leq \alpha^2 \Rightarrow \lambda_j(\varphi_t(\varphi^0)) \leq \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_j \left[\lim_{n \to +\infty} \varphi_t(\varphi_{t_n}(\varphi^*)) \right] \leq \alpha^2 \Rightarrow \lambda_j \left[\lim_{n \to +\infty} \varphi_{t+t_n}(\varphi^*) \right] \leq \alpha^2.$$

Внаслідок довільності φ^* одержуємо умову

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \lambda_j \left[(E + B(\varphi_t(\varphi)))^T (E + B(\varphi_t(\varphi))) \right] \leq \alpha^2 \quad \forall \varphi \in T^m. \tag{19}$$

Умова (19) означає, що для будь-якого $\varepsilon_1 > 0$ та довільного початкового значення $\varphi \in \in T^m$ існує такий момент часу $T(\varphi) > 0$, що для всіх $t \geq T(\varphi)$ справджується умова

$$\lambda_j \left[(E + B(\varphi_t(\varphi)))^T (E + B(\varphi_t(\varphi))) \right] \leq \alpha^2 + \varepsilon_1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Покажемо, що існує такий скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від $\varphi \in T^m$, що умова (20) буде виконуватися при будь-якому $\varphi \in T^m$.

Припустимо супротивне, тобто $T = \infty$. Розглянемо довільну послідовність точок $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ на торі T^m. Тоді для кожної з цих точок існує скінченний момент часу $T(\varphi_i)$ такий, що для будь-якого $t \geq T(\varphi_i)$ виконується умова (20). Впорядкуємо дану послідовність таким чином, щоб $T(\varphi_i) \leq T(\varphi_{i+1}), i = 1, 2, \ldots$. Оскільки тор — компактна множина, то з цієї послідовності можна вибрати збіжну підпослідовність $\{\varphi_{i_k}\} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \varphi^* \in \Omega$. Це означає, що існує скінченний момент часу T такий, що $\overline{\lim\limits_{k \to +\infty}} T(\varphi_{i_k}) = T$, але ми припустили, що $T = \infty$. Ця суперечність доводить, що існуватиме такий скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від $\varphi \in T^m$, що умова (20) буде виконуватися при будь-якому $\varphi \in T^m$.

Позначимо через $X_\tau^t(\varphi)$ матрицант системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))\, x,$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра.

Теорема 3. *Нехай в системі (1) моменти часу імпульсних збурень $t_i(\varphi)$ такі, що рівномірно по t існує скінченна границя*

$$\lim_{\tilde{T}\to\infty} \frac{i(t, t+\tilde{T})}{\tilde{T}} = p, \tag{21}$$

де $i(t, t+\tilde{T})$ — кількість точок послідовності $t_i(\varphi)$, що належать проміжку $[t, t+\tilde{T})$. Позначимо через γ число, для якого виконується співвідношення

$$\left\|X_\tau^t(\varphi)\right\| \leq K_1 e^{\gamma(t-\tau)} \tag{22}$$

для будь-якого $t \geq \tau$ і деяких $K_1 > 0, \gamma \in \mathbb{R}$. Тоді якщо виконується нерівність

$$\gamma + p\ln\alpha < 0,$$

то матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ однорідної системи з імпульсним збуренням (5) допускає оцінку

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \leq K e^{-\gamma_1(t-\tau)} \tag{23}$$

для будь-якого $t \geq \tau$ і деяких $K > 0, \gamma_1 > 0$.

Доведення. Розглянемо матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ однорідної задачі (5) для будь-якого $t \geq T$. Тоді

$$\Omega_\tau^t(\varphi) = \Omega_T^t(\varphi)\,\Omega_\tau^T(\varphi),$$

де матрицант $\Omega_T^t(\varphi)$ на проміжку $t \geq T$ має вигляд

$$\Omega_T^t(\varphi) = X_{t_i(\varphi)}^t \prod_{T<t_j(\varphi)<t_i(\varphi)} (E + B(\varphi_{t_j(\varphi)}(\varphi)))X_{t_{j-1}(\varphi)}^{t_j(\varphi)}(\varphi).$$

Тут $t_0(\varphi) = T$, $t_i(\varphi) < t \leq t_{i+1}(\varphi)$. Позначимо $D_1 = \max_{\varphi\in T^m} \left\|\Omega_\tau^T(\varphi)\right\|$, тоді, беручи до уваги умови (20) і (22), одержуємо оцінку

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \leq K_1 D_1 e^{\gamma(t-T)}\alpha^{i(T,t)}.$$

З існування скінченної границі (21) випливає, що для будь-якого $\varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $K_2 = K_2(\varepsilon_2) > 0$, при якому

$$\alpha^{i(T,t)} \leq K_2 e^{(\varepsilon_2+p\ln\alpha)(t-T)}.$$

Тоді

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \leq K_1 D_1 K_2 e^{(\varepsilon_2+\gamma+p\ln\alpha)(t-T)} = K_1 D_1 K_2 e^{(\varepsilon_2+\gamma+p\ln\alpha)(t-\tau)} e^{(\varepsilon_2+\gamma+p\ln\alpha)(\tau-T)}.$$

Позначимо $K = K_1 D_1 K_2 e^{(\varepsilon_2+\gamma+p\ln\alpha)(\tau-T)}$. Для виконання оцінки (23) достатньо, щоб

$$\gamma + p\ln\alpha < 0,$$

бо ε_2 можна вибрати як завгодно малим.

Теорему доведено.

Розглянемо умову (23) при $\tau = 0$. Тоді

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \leq Ke^{-\gamma_1 t} \quad \text{при} \quad t \geq 0, \tag{24}$$

а функція $G(0,\tau,\varphi)$ матиме вигляд

$$G(0,\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) \quad \text{при} \quad \tau \leq 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \end{cases} \tag{25}$$

якщо покласти $C(\varphi) \equiv E$. Дійсно, з нерівності (24) випливає

$$\left\|\Omega_\tau^0(\varphi)\right\| = \left\|\Omega_0^{-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))\right\| \leq Ke^{\gamma_1\tau} \quad \text{при} \quad \tau \leq 0,$$

що забезпечує виконання умови

$$\|G(0,\tau,\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma_1|\tau|} \quad \text{при} \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

З урахуванням (25) інваріантний тороїдальний многовид $x = u(\varphi)$ системи, для якої виконуються умови теореми 3, набирає вигляду

$$u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} G(0,\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \sum_{t_i(\varphi)<0} G(0,t_i(\varphi)+0,\varphi)g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)). \tag{26}$$

Нехай $x_t(\varphi)$ — довільний розв'язок системи (1), а $x_t^*(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ — розв'язок, що належить інваріантній множині. Тоді, враховуючи (24) і (25), одержуємо

$$\lim_{t\to\infty} \|x_t(\varphi) - u(\varphi_t(\varphi))\| = 0.$$

Це означає, що інваріантний многовид (26) є асимптотично стійким.

Розглянемо випадок, коли матрична функція $A(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею, тобто $A(\varphi) = \tilde{A}$ для всіх $\varphi \in \Omega$, а функція $B(\varphi)$ на множині Ω — нульовою матрицею, тобто $B(\varphi) = 0$ для всіх $\varphi \in \Omega$. Це означає, що для всіх $\varphi \in T^m$

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} A(\varphi_t(\varphi)) = \tilde{A}, \\ &\lim_{t\to\infty} B(\varphi_t(\varphi)) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Як відомо [7], якщо дійсні частини власних чисел матриці $\tilde{A}$ від'ємні, то матрицант $X_\tau^t(\varphi)$ системи $\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x$, залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра, допускає оцінку

$$\left\|X_\tau^t(\varphi)\right\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)},$$

для будь-якого $t \geq \tau$ і деяких $K, \gamma > 0$. З урахуванням того, що

$$\max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \varphi\in\Omega}} \lambda_j \left[(E+B(\varphi))^T(E+B(\varphi))\right] = 1,$$

однорідна система з імпульсним збуренням (5), для якої виконуються умови (27), задовольняє умови теореми 3, а її матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ допускає оцінку

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \le K_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)}$$

для будь-якого $t \ge \tau$ і деяких $K_1 > 0, \gamma_1 > 0$.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 4. *Нехай система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням (1) така, що*

$$\lim_{t\to\infty} A(\varphi_t(\varphi)) = \tilde{A},$$

$$\lim_{t\to\infty} B(\varphi_t(\varphi)) = 0$$

для всіх $\varphi \in T^m$ *і* $\operatorname{Re}\lambda_j(\tilde{A}) < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Тоді для будь-яких* 2π*-періодичних неперервних на торі* T^m *функцій* $f(\varphi)$ *і* $g(\varphi)$ *система (1) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.*

Тепер наведемо достатні умови існування інваріантних множин слабконелінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi, x), \quad \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi, x). \tag{28}$$

Тут матриця $A(\varphi)$ і множина Γ такі ж самі, як і в системі (1), функції $f(\varphi, x)$ та $g(\varphi, x)$ визначені для всіх $\varphi \in T^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, неперервні, 2π-періодичні по φ і рівномірно по $\varphi \in T^m$ задовольняють умову Ліпшиця по x

$$\left\|f(\varphi, x') - f(\varphi, x'')\right\| + \left\|g(\varphi, x') - g(\varphi, x'')\right\| \le N\left\|x' - x''\right\| \tag{29}$$

для всіх $x', x'' \in \mathbb{R}^n$.

Для довільної функції $D(\varphi) \in C(T^m)$ позначимо норму

$$\|D(\varphi)\|_0 = \max_{\varphi\in T^m}\|D(\varphi)\|,$$

де $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$ або у просторі матриць.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 5. *Якщо функція Гріна – Самойленка* $G(t, \tau, \varphi)$ *задовольняє нерівність (10), а для розв'язків* $t_i(\varphi)$ *рівняння (2) виконується нерівність (11), то для достатньо малої сталої Ліпшиця* N *система (28) має інваріантну тороїдальну множину*

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi).$$

Доведення. Будемо шукати інваріантну множину системи (28) як границю послідовності множин

$$\mathbb{M}^{(k)} : x = u^{(k)}(\varphi), \quad \varphi \in T^m, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad u^0(\varphi) = 0,$$

кожна з яких є інваріантною множиною системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)), \quad \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)). \tag{30}$$

За теоремою 1 система (30) має інваріантну множину

$$x = u^{(k)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau +$$
$$+ \sum_{-\infty < t_i(\varphi) < +\infty} G(0, t_i(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))) \tag{31}$$

для кожного $k = 1, 2, \ldots$. Беручи до уваги оцінку (13) і умову (29), отримуємо

$$\left\| u^{(1)}(\varphi) \right\|_0 = \max_{\varphi \in T^m} \left\| u^{(1)}(\varphi) \right\| \leq 2C \max\{\|f(\varphi, 0)\|_0, \|g(\varphi, 0)\|_0\},$$

$$\left\| u^{(k)}(\varphi) \right\|_0 \leq \left\| u^{(k)}(\varphi) - u^{(1)}(\varphi) \right\|_0 + \left\| u^{(1)}(\varphi) \right\|_0 \leq$$
$$\leq \frac{1}{1 - 2NC} \left\| u^{(1)}(\varphi) \right\|_0 \leq \frac{2C}{1 - 2NC} \max\{\|f(\varphi, 0)\|_0, \|g(\varphi, 0)\|_0\}.$$

Більш того,

$$\left\| u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi) \right\|_0 \leq 2NC \left\| u^{(k)}(\varphi) - u^{(k-1)}(\varphi) \right\|_0. \tag{32}$$

Якщо $2NC < 1$, то з оцінки (32) випливає, що послідовність функцій $u^k(\varphi)$ рівномірно збіжна. Нехай

$$u(\varphi) = \lim_{k \to \infty} u^{(k)}(\varphi).$$

З рівномірної збіжності послідовності $u^{(k)}$ випливає, що гранична функція $u(\varphi)$ є 2π-періодичною та кусково-неперервною з розривами першого роду на множині Γ. Переходячи до границі в (31) по $k \to \infty$, бачимо, що функція $u(\varphi)$ задовольняє рівність

$$x = u^{(k)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi), u(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau +$$
$$+ \sum_{-\infty < t_i(\varphi) < +\infty} G(0, t_i(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi), u(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))).$$

Тепер легко бачити, що $x = u(\varphi_t(\varphi))$ задовольняє рівність

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi), x)$$

для $\varphi_t(\varphi) \notin \Gamma$, тобто при $t \neq t_i(\varphi)$, і умову стрибка

$$x(t+0) - x(t-0) = B(\varphi_t(\varphi))u(\varphi_{t-0}(\varphi)) + g(\varphi_{t-0}(\varphi), u(\varphi_{t-0}(\varphi)))$$

для $\varphi_t(\varphi) \in \Gamma$, тобто при $t = t_i(\varphi)$. Отже, $(x(t), \varphi_t(\varphi))$ є розв'язком системи (28). Це означає, що $x = u(\varphi)$ визначає інваріантну множину системи (28).

Теорему доведено.

1. *Перестюк Н. А., Плотников В. Ф., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 427 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
3. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.
4. *Ткаченко В. И.* Функция Грина и условия существования инвариантных множеств импульсных систем // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10. — С. 1379–1383.
5. *Дудзяний С. І., Перестюк М. О.* Про стійкість тривіального інваріантного тора одного класу систем з імпульсним збуренням // Там же. — 1998. — **50**, № 3. — С. 338–349.
6. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
7. *Перестюк М. О., Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 520–529.

Одержано 03.09.09