Физика низких температур, 1995, т. 21, № 11, с. 1148–1156 УДК 537.622.4

Вихри в конусной фазе классического квазидвумерного ферромагнетика

Б. А. Иванов

Институт металлофизики НАН Украины, 252142, Украина, г. Киев, пр. Вернадского, 36

Д. Д. Шека

Киевский университет им. Тараса Шевченко, 252127, Украина, г. Киев, пр. Глушкова, 2, корп. 5
E-mail:sheka@rpd.univ.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 19 мая 1995 г., после переработки 7 июля 1995 г.

Развита вихревая феноменология для топологического фазового перехода Березинского—Костерлица—Таулеса в классическом слабоанизотропном гейзенберговском легкоплоскостном ферромагнетике, находящемся во внешнем магнитном поле, направленном вдоль трудной оси магнетика, в так называемой конусной фазе. Предсказано уменьшение критической температуры под действием поля. Рассчитана структура статических вихрей во внешнем поле. Показано, что поле по-разному воздействует на противоположно поляризованные вихри и существенно влияет на вид компонент динамического структурного фактора магнетика.

Розвинуто вихорову феноменологію для топологічного фазового переходу Березінського—Костерліца—Таулеса у класичному слабкоанізотропному гейзенбергівському легкоплощинному феромагнетику, який знаходиться у зовнішньому магнітному полі, спрямованому вздовж важкої осі магнетика, у так званій конусній фазі. Передбачено зменшення критичної температури під впливом поля. Розраховано структуру статичних вихорів у зовнішньому полі. Показано, що поле по-різному впливає на протилежно поляризовані вихори та сильно впливає на вигляд компонентів динамічного структурного фактора магнетика.

Введение

Интерес к изучению спиновой динамики квазидвумерных ($2D$) материалов в последние годы связан с исследованиями ряда новых $2D$ магнитных кристаллов, технологическими достижениями в изготовлении $2D$ структур и проведением в этих системах экспериментов по неупругому рассеянию нейтронов [1]. Определенную роль в обострении интереса к $2D$ материалам сыграл цикл работ по компьютерному анализу динамики и термодинамики этих систем методами Монте-Карло и молекулярной динамики [2,3]. Один из наиболее интересных случаев представляет собой магнетик с изотропной легкой плоскостью, многие термодинамические свойства которого близки к свойствам XY-модели (или модели плоского ротатора) [4]. В такой системе, как было установлено в 60-е годы в работах Мермина и Вагнера [5], Хоэнберга [6], дальний порядок не может поддерживаться при любых конечных температурах. Однако уже в 70-е год Березинским [7] было показано, что тем не мен в XY-модели возможен своеобразный квазидальный порядок со стандартными для упорядоченной фазы степенными корреляциями параметра порядка при достаточно низких температурах. С увеличением температуры степенное поведение корреляционных функций сменяется экспоненциальным. Происходящее при этом разрушение квазидальнего порядка носит название топологического фазового перехода Березинского—Костерлица—Таулеса (БКТ) [7,8]. Свойства БКТ-перехода прямо обусловлены особыми $2D$ солитонами (вихрями). Солитонный подход к термодинамике $2D$ систем, базирующийся на представлении о газе вихрей конечной плотности (так называемая вихревая феноменология), восходит к пионерским идеям Березинского [7], Костерлица и Таулеса [8] о разрушении квазидальнего порядка в XY-системах вследствие диссоциации вихревых пар. Предполагается, что при достаточно низких температурах существуют связанные пары вихрь—антивихрь. С повышением температуры среднеквадратичное расстояние в паре увеличивается $\propto (T_{KT} - T)^{-1}$ и при некоторой температуре T_{KT}, называемой температурой БКТ-перехода, пары диссоциируют. В системе при $T \geq T_{KT}$ существует газ квазисвободных вихрей. Такие вихри, двигаясь вместе с гидродинамическими потоками в среде, вносят специфический вклад в функции отклика магнетика, формируя так называемый центральный пик (ЦП) динамического структурного фактора (ДСФ) [9–11].

В настоящей работе исследуется динамика вихрей в классическом слабоанизотропном гейзенбер-

© Б. А. Иванов, Д. Д. Шека, 1995

говском легкоплоскостном ферромагнетике (ФМ), находящемся в сильном магнитном поле, направленном вдоль трудной оси магнетика, в так называемой конусной фазе. Наличие такого поля не снимает непрерывного вырождения основного состояния (что является необходимым условием существования БКТ-перехода), но, как показано в работе, сильно влияет на динамику вихрей, среднеквадратичную скорость вихрей в ансамбле и вклад вихрей в функции отклика. Проводится расчет вихревого вклада в ДСФ в приближении самосогласованного поля квазисвободных вихрей.

1. Структура вихревых решений и фазовый переход Березинского—Костерлица—Таулеса

Макроскопическая динамика ФМ описывается классическим векторным параметром порядка, в качестве которого выступает нормированная намагниченность $\mathbf{m}$,

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0 = \{\sin\theta\cos\varphi;\ \sin\theta\sin\varphi;\ \cos\theta\}\ ,$$

где M_0 — намагниченность насыщения. Энергию ФМ запишем в виде

$$E = A\int d^2x\left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{\Delta_0^2}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)^2\right], \tag{1}$$

здесь A — обменная постоянная; характерная магнитная длина $\Delta_0 = \sqrt{A/K} >> a$, K — постоянная анизотропии, a — постоянная решетки. Последнее слагаемое в выражении (1) описывает вклад энергии анизотропии типа легкая плоскость $w_a = -K\cos^2\theta$ и зеемановской энергии взаимодействия с магнитным полем $w_Z = -\mathbf{MH}$. Величина $\cos\theta_0 \equiv h = H/H_a$ описывает равновесное значение намагниченности вдали от солитона, $H_a = 2K/aM_0$ — поле анизотропии. Динамика ФМ с энергией (1) описывается уравнениями Ландау—Лифшица (ЛЛ-моделью), см., например, [12,13]:

$$\nabla^2\theta - \sin\theta\cos\theta\left((\nabla\varphi)^2 - \frac{1}{\Delta_0^2}\right) + \frac{1}{\omega_0\Delta_0^2}\sin\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - gH\right) = 0\ , \tag{2}$$

$$\nabla\left(\sin^2\theta\,\nabla\varphi\right) - \frac{1}{\omega_0\Delta_0^2}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0\ , \tag{3}$$

где $\omega_0 = gH_a$, g — гиромагнитное отношение.

Динамика ФМ, описываемая ЛЛ-моделью, обладает такими интегралами движения, как энергия магнетика E, см. (1), и импульс поля намагниченности

$$\mathbf{P} = -\frac{aM_0}{g}\int d^2x\left(1 - \cos\theta\right)\nabla\varphi\ . \tag{4}$$

Существуют и другие интегралы движения, например, число спиновых отклонений, угловой момент [12–15]. Однако, в отличие от локализованных 2D солитонов [14], значения этих интегралов для вихрей не являются независимыми, и мы их не будем обсуждать.

В статическом пределе система (2), (3) имеет хорошо известные решения, описывающие магнитный вихрь [15], см. также [12,13]:

$$\varphi = \varphi_0 + \nu\chi\ ,\quad \theta^{(0)} = \theta^{(0)}(\xi)\ ,\quad \xi \equiv r/\Delta_0\ , \tag{5}$$

где $\varphi_0 = \text{const}$; χ и r — полярные координаты в плоскости магнетика xy; $\nu = \pm1, \pm2, \ldots$. Функция $\theta^{(0)}(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\theta^{(0)}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta^{(0)}}{d\xi} + \sin\theta^{(0)}\cos\theta^{(0)}\left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right) - h\sin\theta^{(0)} = 0 \tag{6}$$

с естественными граничными условиями $\cos\theta^{(0)}(0) = \pm1$ и $\theta^{(0)}(\infty) = \theta_0$

Домножая это уравнение на $(d\theta^{(0)}/d\xi)\xi^2$, интегрируя по ξ от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$, легко получить соотношение

$$\int_0^\infty \left(\cos\theta^{(0)}(\xi) - h\right)^2 \xi d\xi = \frac{\nu^2}{2}(1-h)\,. \quad (7)$$

Топологические свойства статического магнитного вихря описываются элементами группы относительных гомотопий $\pi_2(S^2, S^1) = Z \times Z$ и определяются двумя инвариантами, принимающими целочисленные значения: завихренностью ν, определяющей свойства солитона вдали от вихревого кора, и поляризацией $p \equiv \cos\theta(0) = \pm 1$, характеризующей свойства в центре вихря [9,16]. Топологические инварианты играют роль «зарядов» вихрей; в частности, при взаимодействии солитонов выполняются законы сохранения этих величин. Следует отметить, что энергетический барьер, который необходимо преодолеть для перехода между состояниями вихря с $p = +1$ и $p = -1$, конечен, поэтому возможны переходы с изменением p за счет тепловых эффектов.

Для магнитных вихрей типична логарифмическая зависимость энергии статического вихря от площади системы S [15]:

$$E_0(\nu, p, h) = \pi A \nu^2 (1-h^2) \ln\left[\Lambda_{|\nu|,p}(h) S/\Delta_0^2\right], \quad (8)$$

для газа вихрей конечной плотности S имеет смысл площади, приходящейся на один вихрь. Так как энергия растет с ростом ν, мы будем рассматривать только вихри с наинизшим значением завихренности $\nu = \pm 1$ и обозначим $\Lambda_{1,p}(h) \equiv \Lambda_p(h)$.

Зависимость Λ_p при $p = +1$ была определена в работе [15], при $h = 0$ значение этого параметра 5,27. Для вихрей с $p = +1$ величина Λ уменьшается с ростом поля. Зависимость $\Lambda_{+1}(h)$ удается проанализировать аналитически при полях близких к полю анизотропии. В пределе $h \to 1$ ($p = +1$) ЛЛ-модель редуцируется к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ-модели), динамические уравнения которой запишем в стандартном виде:

$$i\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right) = -\nabla_\zeta^2\Psi + \Psi\left(|\Psi|^2 - 1\right), \quad (9)$$

где использованы безразмерные переменные $\zeta = \mathbf{r}\,\theta_0/\Delta_0\sqrt{2}$ и $\tau = -t\omega_0\theta_0^2/2$, а также введен комплексный параметр $\Psi(\zeta, \tau) = (\theta/\theta_0)\exp(i\varphi)$.

Уравнение (9) описывает свойства слабонеидеального Бозе-газа с отталкиванием [17], основному состоянию которого отвечает конечное значение амплитуды «конденсата» $|\Psi| = 1$ и произвольное значение его фазы φ. В статическом пределе вихревое решение уравнения (9) было исследовано Питаевским [17], оно может быть представлено в виде $\theta = \theta_0\psi(r/\Delta_v)$, $\varphi = \varphi_0 + \nu\chi$, где $\psi(x)$ — решение уравнения Гросса—Питаевского

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\psi}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}\psi - \psi\left(\psi^2 - 1\right) = 0\,, \quad (10)$$

при этом характерный масштаб изменения функции $\theta(r)$ — величина

$$\Delta_v\left(h \to 1, p = +1\right) = \frac{\Delta_0}{\sqrt{1-h}}\,. \quad (11)$$

Исходя из редуцированного уравнения (10) для энергии вихря с $\nu = \pm 1$ и $p = +1$ при $h \to 1$ получаем выражение

$$E_0 \approx 2\pi A(1-h)\,F\left(\frac{S(1-h)}{\pi\Delta_0^2}\right), \quad (12)$$

$$F(X) = 2\int_0^{\sqrt{X}} x dx\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\psi^2}{x^2} + \frac{(\psi^2-1)^2}{2}\right].$$

Считая, что, несмотря на близость магнитного поля к полю анизотропии, размеры системы настолько велики, что $S >> \Delta_0^2/(1-h)$, для функции $F(X)$ получим оценку:

$$F(X) \underset{X>>1}{\approx} \text{const} + \nu^2 \ln X\,,$$

откуда следует, что постоянная $\Lambda_{+1}(h)$ в формуле (8) стремится к нулю пропорционально $(1-h)$ (ранее [15] получалось малое, но конечное значение $\Lambda_{+1}(h)$ при $h \approx 1$). Приведенные оценки соответствуют проведенному нами численному расчету этой зависимости и, за исключением области $(1-h) << 1$, данным работы [15]. Расчет производился по схеме, изложенной в работе [15]; результаты численного интегрирования приведены на рис. 1.

Перейдем к анализу статических свойств вихрей с поляризацией $p = -1$ при значении H близком к полю анизотропии. Для этих вихрей $\theta(0) = \pi$, и энергия $w_a + w_Z = K(\cos\theta - h)^2$ в коре вихря принимает значения порядка K. Используя этот факт и соотношение (7), легко убедиться, что радиус вихревого кора уменьшается при $h \to 1$, $\Delta_v \propto \Delta_0(1-h)^{1/2}$ (такое поведение соответствует численному расчету, см. рис. 2). Отсюда следует, что в области существенного изменения θ (от $\theta = \pi$ до $\theta \approx \theta_0 << 1$) производные намагниченности не малы, $\Delta_0^2(d\theta/dr)^2 \approx 1/(1-h)^2 >> 1$, и при $r \approx \Delta_v$, но $r >> \Delta_0$ обменный вклад превалирует над вкла-

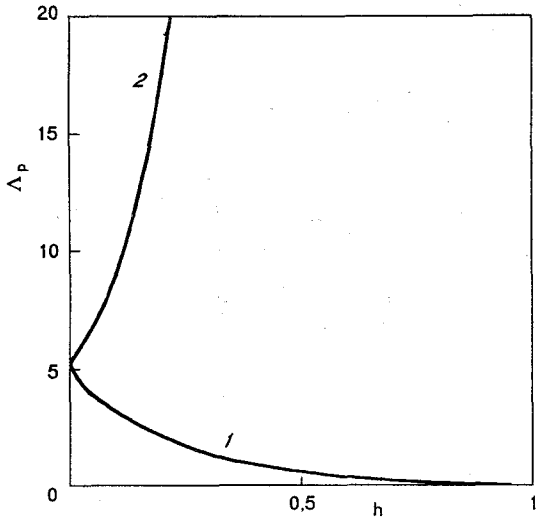

Рис. 1. Зависимость $\Lambda_p(h)$ от магнитного поля для вихрей с $p = +1$ (*1*) и $p = -1$ (*2*).

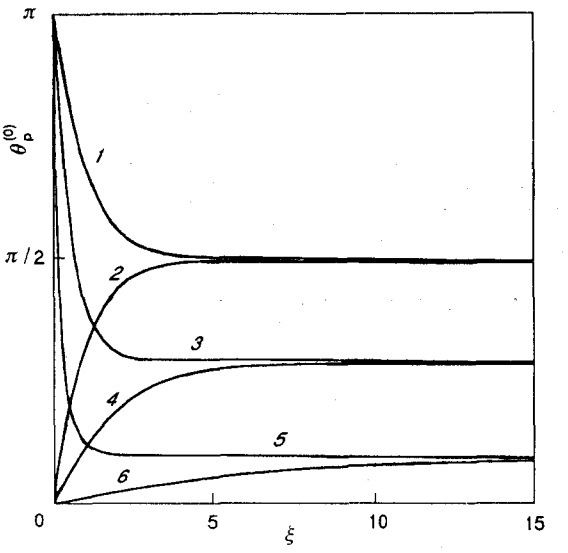

Рис. 2. Структура магнитных вихрей при $p = \pm 1$ и различных значениях магнитного поля: $h = 0$, $p = -1$ (*1*), $p = +1$ (*2*); $h = 0{,}59$, $p = -1$ (*3*); $p = +1$ (*4*); $h = 0{,}95$, $p = -1$ (*5*) и $p = +1$ (*6*).

дом энергии анизотропии. Таким образом, в этой области можно применить чисто обменное приближение и при $r << \Delta_0$ использовать известное решение Белавина—Полякова $\operatorname{tg}(\theta/2) = R/r$, где R — произвольный параметр [18]. Можно считать, что функция вида

$$\cos\theta = \frac{h - (\Delta_v/r)^2}{1 + (\Delta_v/r)^2}, \qquad (13)$$

которая совпадает с решением Белавина—Полякова при $\theta >> \theta_0 \approx \sqrt{2(1-h)}$, $\theta_0 << 1$, но дает правильное значение $\theta \to \theta_0$ при $r >> \Delta_v$, хорошо описывает решение во всем интервале изменений r. Значение параметра Δ_v можно найти из этой пробной функции и соотношения (7):

$$\Delta_v\left(h \to 1, p = -1\right) = \Delta_0\sqrt{(1-h)/2}\,. \qquad (14)$$

Функция $\Lambda_{-1}(h)$, характеризующая энергию вихря, экспоненциально нарастает при увеличении поля, $\Lambda_{-1}(h \to 1) \propto \exp(1/(1-h))$, так как предельное значение энергии вихря с $p = -1$ при $h \to 1$ остается конечным и совпадает с энергией сингулярного ($\Delta_v \to 0$) вихря Белавина—Полякова $E_{BP} = 8\pi A|\nu|$.

Присутствие в легкоплоскостном магнетике специфических элементарных возбуждений типа магнитных вихрей обусловливает БКТ-переход. При температурах ниже критической T_{KT} (в фазе Березинского) происходит спаривание солитонов с образованием связанных пар вихрь—антивихрь, при $T > T_{KT}$ (в топологической фазе) вихревые пары диссоциируют. Наличие вихрей проявляется в корреляции спинов на конечной длине. Корреляционная длина задает масштаб экспоненциального спадания корреляций спинов вблизи T_{KT} в топологической фазе: $\langle \mathrm{M}(\mathrm{r})\mathrm{M}(0)\rangle \propto \exp(-r/\xi)$, где корреляционная длина

$$\xi(T) = \xi_0 \exp\left(b\tau^{-1/2}\right), \quad \tau = \frac{T - T_{KT}}{T_{KT}}, \qquad (15)$$

здесь $b = \text{const}$, а ξ_0 — величина порядка радиуса вихревого кора Δ_v [8,10]. В задачах о динамике вихрей при температурах $T > T_{KT}$ для плотности вихревого газа используют формулу $n_v \approx (2\xi)^{-2}$ [19,20]. Температура перехода была рассчитана Костерлицем и Таулесом [8]: $T_{KT} \approx \pi\nu^2 A$.

Рассмотрим БКТ-переход в ФМ, находящемся во внешнем поле. Следуя работе [8], оценим величину температуры перехода T_C. Изменение свободной энергии системы при рождении одного вихря

$$\Delta F = E_0 - T\ln\left(S/\pi\Delta_0^2\right) \le 0\,,$$

где E_0 — энергия вихря (8); второе слагаемое описывает вклад энтропии неопределенности положения вихря. Отсюда, с учетом того, что энергия вихря тоже пропорциональна $\ln S$, получаем $\Delta F = (T_{KT} - T)\ln S$, поэтому при $T \ge T_{KT}$ величина $\Delta F < 0$, и рождение вихря при этом становится энергетически выгодным (отметим, что это значение температуры одинаково для вихрей с $p = +1$ и

$p = -1$). В результате для температуры БКТ-перехода можно получить оценку

$$T_C = T_{KT}\left(1 - H^2/H_a^2\right) . \qquad (16)$$

Магнитное поле изменяет значение корреляционной длины (15). Детальный расчет зависимости $\xi(h)$ для конусной фазы ФМ, насколько нам известно, не проводился. Однако при достаточно сильных полях, когда можно использовать НУШ-модель (9), ответ получается из (15) путем элементарного масштабного преобразования

$$\xi(T, h) \approx \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - h^2}} \exp\left(b\tau^{-1/2}\right) , \qquad (17)$$
$$\tau = \left(T - T_C\right)/T_C ,$$

а для плотности вихрей

$$n_v(T, h) \approx n_0\left(1 - h^2\right) \exp\left(b\tau^{-1/2}\right) . \qquad (18)$$

Поскольку качественное поведение $\xi(h)$ и $n_v(h)$ понятно, а детальный расчет этой величины выходит за рамки этой работы, в дальнейшем мы будем пользоваться приведенными оценками. Произведем оценку для плотности вихрей заданной поляризации. Будем интересоваться лишь равновесным распределением вихрей. Тогда можно оставить в стороне вопрос о кинетике достижения такого состояния (отметим только, что под действием поля вихри с поляризацией $p = +1$ могут образовываться из вихрей с $p = -1$, так как они отделены друг от друга конечным барьером). Следует ожидать, что относительная плотность вихрей различной поляризации $\rho_p(h) \equiv n_p/n_v$ дается каноническим распределением

$$\rho_p(h) \propto \exp\left(-\frac{E_0(\nu, p, h)}{T}\right) ,$$

где E_0 представляет энергию статического вихря. Используя для E_0 выражение (8), приходим к следующей зависимости (см. рис. 3):

$$\rho_p(h) = \frac{\Lambda_{-p}(h)}{\Lambda_p(h) + \Lambda_{-p}(h)} . \qquad (19)$$

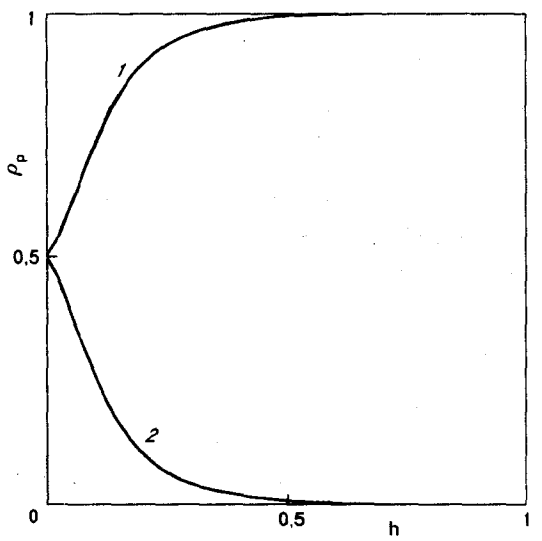

Рис. 3. Зависимость относительной плотности вихрей с $p = +1$ (*1*) и $p = -1$ (*2*) от величины поля.

2. Динамика вихрей

Построение точного решения, описывающего движущийся вихрь, представляет собой значительно более сложную задачу. В этом случае как для вихрей, так и для локализованных $2D$ солитонов простой анзац $\varphi(\mathrm{r}) = \varphi^{(0)}(\mathrm{r} - \mathrm{v}t)$, $\theta(\mathrm{r}) = \theta^{(0)}(\mathrm{r} - \mathrm{v}t)$, описывающий движение солитона без искажения его формы, не является решением динамических уравнений даже в случае малой скорости солитона.

В общем случае для нахождения точного решения необходимо использовать полную систему уравнений ЛЛ-модели. Точное решение этой задачи не известно даже для случая малой скорости вихрей. Для вихрей особенностью является то, что движение солитона обязательно сопровождается появлением отличного от нуля градиента φ (или деформацией спинового потока по терминологии [21]) вдали от вихря, причем при малых скоростях движения вихря градиент фазы пропорционален скорости. К такому выводу пришли Никифоров и Сонин [16] на основе анализа стационарной динамики вихрей в ФМ. Связь между градиентом k и скоростью вихря v, согласно результатам [16], дается соотношением

$$\mathrm{k} \equiv \nabla\varphi\Big|_{r\to\infty} = -\frac{\mathrm{v}}{\omega_0\Delta_0^2(p + h)} . \qquad (20)$$

Однозначная связь $\nabla\varphi$ и v приводит к движению вихря при наличии неоднородности φ любого происхождения. В частности, это определяет характер движения ансамбля вихрей: суммарное значение $\nabla\varphi$, создаваемое системой вихрей вблизи некоторого избранного вихря, определяет величину его скорости. Именно такой механизм определяет величину среднеквадратичной скорости ансамбля вихрей [9] и, следовательно, ширину ЦП корреляционных функций в легкоплоскостном ФМ [10].

Класс точных решений, описывающих движущийся вихрь, может быть получен на основе НУШ-модели (9) для вихрей с $p = +1$ в полях близких к полю анизотропии. Легко убедиться, что

такому вихрю отвечает следующее распределение намагниченности:

$$\varphi = \nu \operatorname{arctg}\left[\xi_y/\xi_x\right] + \mathbf{kr} - \omega t\,, \quad \theta = \tilde{\theta}_0 \psi(\tilde{\theta}_0 \xi)\,, \quad (21)$$

$$\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{v}}{2\omega_0 \Delta_0^2}\,, \quad \tilde{\theta}_0 = \left(\theta_0^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{4}{\theta_0^2} - \frac{v^2}{2\omega_0^2\Delta_0^2}\right)^{1/2}, \quad (22)$$

где $\vec{\xi} = (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)/\Delta_0$; $\mathbf{v}$ — скорость вихря. Величины $\mathbf{v}$ и ω представляют собой два независимых параметра, определяющие вихревое решение с $p = 1$ при $h \to 1$, описывающееся в рамках уравнений (21). Если наложить физическое условие стационарности конденсата ($\omega = 0$), то величина $\tilde{\theta}_0$ вдали от вихря отличается от равновесного значения θ_0 в меру v^2:

$$\tilde{\theta}_0 = \left(\frac{\theta_0^2 - v^2}{2\omega_0^2\Delta_0^2}\right)^{1/2}.$$

При малых v с точностью до v^2 можно считать, что $\theta \approx \theta_0$, и эффект проявляется только в появлении $\nabla\varphi \neq 0$ вдали от вихря.

Поскольку НУШ-модель описывает свойства сверхтекучего неидеального бозе-газа [17], это соответствует хорошо известному результату из теории движения вихрей в сверхтекучих жидкостях, согласно которому в отсутствие диссипации скорость сверхтекучего движения совпадает со скоростью сверхтекучего движения конденсата. Об этом говорят как об эффекте вмораживания вихря в конденсат [22]. На отмеченную аналогию между легкоплоскостными магнетиками и сверхтекучими системами обращали внимание многие авторы [12,13,16,21]. Однако, как мы покажем, такая гидродинамическая аналогия является буквальной только в НУШ-модели. При сопоставлении легкоплоскостных магнетиков и сверхтекучих систем угловой переменной φ в сверхтекучей системе соответствует фаза конденсата. Роль движущегося конденсата в легкоплоскостном магнетике играет неоднородное метастабильное стационарное состояние намагниченности $\theta_c = \theta_0$, $\varphi_c = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$, при этом импульс конденсата, согласно (4), отличен от нуля:

$$\mathbf{P}_c = -\mathbf{k}\frac{aM_0}{g}\left(1 - h\right)S\,. \quad (23)$$

Плотность импульса сверхтекучего течения для сверхтекучих жидкостей, описываемых комплексным параметром порядка $\Psi = |\psi| \exp(i\varphi)$, определяется хорошо известным выражением

$$\mathbf{p} = |\psi|^2 \nabla\varphi = \rho_s \mathbf{v}_s\,,$$

где ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты, $\mathbf{v}_s$ — ее скорость. Плотность энергии сверхтекучего конденсата определяется формулой $\rho_s v_s^2/2$. Сравнивая это выражение с (1), а $\mathbf{P}_c$ с $\mathbf{p}$, получаем, что аналогом величин ρ_s и $\mathbf{v}_s$ в ФМ будут соответственно

$$\rho_s^{FM} = \frac{2A(1-h)}{(\omega_0\Delta_0^2)^2(1+h)}\,, \quad \mathbf{v}_s^{FM} = -\mathbf{k}\,\omega_0\Delta_0^2(1+h). \quad (24)$$

Сравнивая выражение (24) для скорости сверхтекучего движения $\mathbf{v}_s$ с выражением (20) для градиента фазы $\mathbf{k}$, обусловленным движением вихря, легко убедиться в том, что скорость вихря $\mathbf{v}$ совпадает со скоростью сверхтекучего движения конденсата $\mathbf{v}_s$ только при $p = +1$. Если же $p = -1$, то, в силу (20), в отсутствие поля вихри с $p = +1$ и $p = -1$ при том же значении $\mathbf{k}$ движутся с одинаковыми скоростями, но в противоположных направлениях. Если же $h \neq 0$, то и модули их скоростей также отличаются (см. (20))*.

Неприменимость такой буквальной гидродинамической аналогии связана, по существу, с тем, что пространства параметра порядка гелия (комплексная плоскость ψ) и легкоплоскостного ФМ (сфера $\mathbf{m}^2 = 1$) глобально не эквивалентны. В частности, для комплексной плоскости ψ есть только одна физически интересная (с конечной плотностью энергии) точка, в которой состояния гелия тождественны для всех значений фазы (точка $\psi = 0$), а для ФМ таких точек две ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$). С этим и связано существование двух типов вихрей в ФМ с различными поляризациями $p = \pm 1$.

Перейдем к вопросу описания многовихревых решений. Считая, что среднее расстояние между вихрями ξ намного больше размеров вихревого кора Δ_v, т.е. плотность вихрей мала, N-вихревые решения будем приближенно искать в виде суперпозиции одновихревых

* При проведении гидродинамической аналогии для импульса конденсата мы использовали формулу (23). Однако известно, что выбор формулы для импульса магнетиков неоднозначен и формула для импульса (4) может быть записана в более общем виде $\propto (C_1 - \cos\theta)\nabla\varphi$, где C_1 — произвольная постоянная [12,13]. В качестве этой константы выбирая поляризацию вихрей $C_1 = p$, можно добиться выполнения условия $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s$ для вихрей с заданной p, однако нельзя добиться его выполнения для обоих типов вихрей. По существу это означает неоднозначность определения импульса конденсата и величины ρ_s для магнетика.

$$\varphi^N(\mathrm{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \varphi^{(0)}\left(\mathrm{r} - \mathbf{X}^\alpha(t)\right), \qquad (25)$$

$$\frac{\sin\theta^N(\mathrm{r}, t)}{\sin\theta_0} = \prod_{\alpha=1}^{N} \frac{\sin\theta^{(0)}(\mathrm{r} - \mathbf{X}^\alpha(t))}{\sin\theta_0}, \qquad (26)$$

где $\mathbf{X}^\alpha(t)$ — координата центра масс α-го вихря. Домножая уравнение (2) на $\partial_\alpha\theta$, а уравнение (3) на $\partial_\alpha\varphi$, после интегрирования по площади, занимаемой вихрями, приходим в результате к эффективному уравнению, описывающему динамику α-го вихря под действием сил со стороны остальных вихрей:

$$G^\alpha(p, h)\left[\frac{\partial \mathbf{X}^\alpha}{\partial t} \times \mathbf{e}_z\right] + e^\alpha \mathbf{E}^\alpha = 0. \qquad (27)$$

Первое слагаемое представляет собой так называемую гироскопическую силу. Отметим, что силы вида $G[\mathrm{v}\times\mathrm{e}_z]$ хорошо известны из гидродинамики — это так называемые силы Магнуса, действующие на движущийся гидродинамический вихрь. Для описания солитонов в магнетиках понятие гироскопической силы впервые было введено в работах Слончевского [23] и Тиля [24,25]. Понятие гиросилы привлекалось многими авторами при описании динамики цилиндрических магнитных доменов и блоховских линий в тонких ферромагнитных пленках [26]. Для ФМ в ЛЛ-модели гиросила (в отличие от случаев антиферромагнетика [27] и чисто планарного ФМ [28]) присутствует всегда и определяет основные свойства динамики вихрей и их ансамблей, в частности, величину среднеквадратичной скорости $\bar{u}$ [9]. Значение постоянной гироскопии дается известным выражением [16]

$$G(p, h) = 2A\int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{2\pi a M_0}{g}\nu(p - h). \qquad (28)$$

Влияние окружения на избранный α-й вихрь описывается эффективным полем $\mathbf{E}^\alpha$ со стороны остальных. Такое поле имеет вид, типичный для поля, создаваемого $2D$ «электрическими зарядами» $e^\beta = \nu^\beta \sin\theta_0 \sqrt{2\pi A}$. Таким образом, сила, действующая на α-й вихрь, может быть представлена в виде

$$e^\alpha \mathbf{E}^\alpha = -\nabla^\alpha \hat{H}_{\mathrm{int}}, \qquad \hat{H}_{\mathrm{int}} = -2\sum_{\alpha\neq\beta} e^\alpha e^\beta \ln\left|\mathbf{X}^\alpha - \mathbf{X}^\beta\right|, \qquad (29)$$

где гамильтониан $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ описывает взаимодействие «зарядов» e^α, типичное для $2D$ кулоновского взаимодействия [9,16].

При записи уравнения движения ансамбля вихрей (27) мы не учитывали релаксационные и инерционные процессы в системе. Что касается учета первых, то, как показано в работе Хубера [9], при описании динамики вихрей в ФМ роль сил трения незначительна (в отличие от динамики антиферромагнетика [27]). Иначе обстоит дело с учетом инерции вихрей. К настоящему времени последовательное описание проблемы инерции магнитных вихрей не проведено. Однако результаты численных экспериментов при конечных температурах $T \approx T_c$ свидетельствуют о том, что при описании динамики вихревого ансамбля влиянием инерционных эффектов можно пренебречь [29].

3. Вихревой вклад в динамический структурный фактор магнетика

Перейдем к рассмотрению термодинамических свойств магнетика на основе ЛЛ-модели. Как показано в [9], динамические функции отклика легкоплоскостного магнетика могут быть описаны в приближении почти идеального газа элементарных возбуждений, однако наряду с квазилинейными возбуждениями (магнонами) необходимо учитывать и существенно нелинейные (вихри). Основным динамическим параметром вихревой феноменологии является среднеквадратичная скорость вихревого газа $\bar{u}$. Численное моделирование в отсутствие поля показало неплохое согласие наблюдаемого значения $\bar{u}$ с полученными по формуле Хубета [30].

Для нахождения $\bar{u}$ для вихрей с различными значениями p при $H \neq 0$ воспользуемся уравнением движения (27), исходя из которого величина $\bar{u}$ определяется флуктуациями «электрического поля» E, под которым следует понимать поле статической вихревой конфигурации, $\bar{u} = (e/G)\langle \mathbf{E}^2\rangle^{1/2}$. Для расчета $\bar{u}$ в континуальном приближении введем самосогласованное эффективное «электрическое» поле E(r), в котором находится избранный вихрь, и воспользуемся аналогией между динамическими уравнениями для вихрей и уравнениями для частиц в плазме, находящейся в поперечном магнитном поле [9]. Используем также тот факт, что взаимодействие в газе малой плотности не зависит от структуры кора вихря (в частности, от знака p). Это означает, что величина $\langle \mathbf{E}^2\rangle$ определяется только суммарной плотностью вихрей $n_v = n_{p=+1} + n_{p=-1}$, поэтому для оценки $\langle \mathbf{E}^2\rangle$ можно воспользоваться формулой $\langle \mathbf{E}^2\rangle = n_v \pi e^2 \ln(\pi/2n_v\Delta_v^2)$, полученной в [31] для случая теплового равновесия. Используя эту формулу, а также связь $\bar{u}$ и $\langle \mathbf{E}^2\rangle$, для среднеквадратичной скорости вихрей заданной поляризации p приходим к выражению

$$\bar{u}_p = \bar{u}_H\left(1 + ph\right). \qquad (30)$$

Здесь $\bar{u}_H$ представляет характерное значение скорости, полученное Хубером [9]:

$$\bar{u}_H = \frac{1}{2}\omega_0\Delta_0\left[\pi n_v\Delta_0^2 \ln\left(\frac{\pi}{2n_v\Delta_v^2}\right)\right]^{1/2}. \quad (31)$$

Таким образом, поле сильно влияет на скорость движения вихрей, при увеличении поля $\bar{u}_p$ растет для вихрей $p = +1$ и уменьшается для вихрей $p = -1$.

Эффекты поля следует ожидать также в ДСФ. Конкретный расчет внутри- и внеплоскостных компонент ДСФ производится так же, как в работе Мертенса с соавторами [10], и мы не будем обсуждать его детали. Приведем результаты анализа.

Внутриплоскостные компоненты ДСФ $S_{\|}(\mathbf{q}, \omega)$ являются глобально чувствительными к наличию вихрей [10], поэтому влияние поля сказывается лишь в уменьшении равновесного значения намагниченности, а также зависимостей $n_v(h)$ и $\bar{u}(h)$. Форма пика $S_{\|}(\mathbf{q}, \omega)$ имеет лоренцевский вид

$$S_{\|}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{M_0^2\gamma^3(1-h^2)}{8\pi n_v(h)\left[\omega^2 + \gamma^2(1 + q^2/4n_v^2)\right]^2}, \quad (32)$$

где $\gamma = \bar{u}(\pi n_v(h))^{1/2}$; $q = |\mathbf{q}|$; $\bar{u}$ — среднее значение скорости для газа вихрей с учетом усреднения по поляризациям вихрей с весовыми множителями (19); $(\bar{u})^2 = \sum_{p=-1,1} \rho_p(h)(\bar{u}_p)^2$.

Ширина ЦП $\Gamma_{\|}$ пропорциональна $\bar{u}$ и растет с ростом внешнего поля, а его интенсивность определяется формулой

$$I_{\|}(\mathbf{q}) = \frac{M_0^2(1-h^2)}{16\pi n_v(h)}\left(1 + \frac{q^2}{4n_v(h)}\right)^{-3/2}. \quad (33)$$

Если воспользоваться приведенной выше оценкой $n_v = n_0(1 - h^2)$, то получается, что максимальное значение интенсивности не зависит от h, а ширина пика в зависимости $I_{\|}(\mathbf{q})$ уменьшается с ростом h.

Внеплоскостные компоненты ДСФ $S_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$ локально чувствительны к присутствию вихрей [10] и, естественно, модифицируются значительно сильнее, чем внутриплоскостные, т.е., в частности, зависят от формфактора вихря

$$f(\mathbf{q}, p) = 2\pi\int_0^\infty rdr\, J_0(qr)\left(\cos\theta_p^{(0)}(r) - h\right), \quad (34)$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя 0-го порядка. Вихри с $p = +1$ и $p = -1$ вносят независимые вклады в функцию $S_{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$:

$$S_{\perp}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{M_0^2 n_v(2\pi)^{1/2}}{q\bar{u}} \times$$

$$\times \sum_{p=-1,1} \rho_p(h)\left|f(\mathbf{q}, p)\right|^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{q^2\bar{u}^2}\right). \quad (35)$$

Таким образом, ЦП для внеплоскостных компонент ДСФ представляет сумму двух гауссовских пиков с центрами в точке $\omega = 0$, ширинами $\Gamma_{\perp}^p = q\bar{u}_p$ и интенсивностями

$$I_{\perp}(\mathbf{q}, p) = 2\pi M_0^2 n_p \left|f(\mathbf{q}, p)\right|^2. \quad (36)$$

При $h = 0$ оба пика, обусловленные вкладом вихрей с $p = 1$ и $p = -1$, тождественны. Если же $h \neq 0$, то виды пиков существенно отличаются друг от друга как за счет формфактора, так и за счет динамического множителя $\exp[-(\omega/q\bar{u}_p)^2]$. Полный анализ вида пика может быть проведен на основе использования данных о структуре вихрей (см. рис. 2), а для динамической части — с использованием формулы (30). Обсудим качественно характер изменения пиков с $p = \pm 1$ и суммарного пика при изменении магнитного поля.

Формфактор вихря может быть схематически представлен в виде

$$f(\mathbf{q}, p) = 2\pi(p - h)\,\Delta_v^2\Phi\left(q\Delta_v, h\right), \quad (37)$$

где величина $\Delta_v = \Delta(h, p)$ определяет размер вихревого кора; функция $\Phi(x, y)$ имеет область локализации по переменной x порядка единицы. При малых полях можно воспользоваться обычным выражением [10] и считать, что $\Phi(x, 0) = (1 + x^2)^{-3/2}$. При больших полях, используя аппроксимацию $\psi(x) = x(1 + x^2)^{-1/2}$ для функции Гросса—Питаевского (10) в случае $p = +1$ и функцию (13) для вихрей с $p = -1$, получим оценку $\Phi(x, 1) = K_0(x)$, где $K_0(x)$ — функция Макдональда. Следовательно, зависимость формфактора от p полностью определяется множителем $(p - h)$. Зависимость от h приводит к тому, что формфактор при увеличении поля растет для вихрей с $p = 1$ и уменьшается при $p = -1$ в непосредственной окрестности кора вихря при $q << \Delta(h)$. Учитывая, что плотность обоих типов вихрей убывает с ростом поля, при этом $n_{p=-1}$ убывает быстрее, чем $n_{p=-1}$, получаем, что амплитуды обоих пиков уменьшаются с ростом поля.

Заключение

Проведенный в настоящей работе анализ показал существенное влияние внешнего магнитного поля, перпендикулярного легкой плоскости, на термодинамические свойства легкоплоскостного ферромагнетика. Развитая для конусной фазы ФМ вихревая феноменология предсказывает уменьшение критической температуры под действием поля. Поле по-разному воздействует на противоположно поляризованные вихри. Указанные особенности проявляются в особом вихревом вкладе в ДСФ магнетика, компоненты которого существенно зависят от величины H. Полученные зависимости компонент ДСФ могут быть использованы для сравнения с данными эксперимента и численного моделирования. Величины $I_{\parallel}(\mathbf{q})$ и $I_{\perp}(\mathbf{q}, p)$ определяют статические корреляционные функции, которые могут быть рассчитаны методами ренормгруппы, а также определены экспериментально по квазиупругому рассеянию нейтронов. Сравнение с экспериментом в отсутствие поля обычно дает хорошее согласие [10,32], однако данные по конусной фазе нам неизвестны.

Мы благодарны А. К. Колежуку за обсуждение работы. Работа частично была поддержана Международным научным фондом (ISF), грант UB7200, а также Международной соровской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP), грантами SPU042025 и PSU052142.

1. L. J. de Jongh, *Magnetic Properties of Layered Transition Metal Compounds*, Kluwer Academic Publisher, London (1990).
2. C. Kawabata, M. Takeuchi, and A. R. Bishop, *JMMM* **54–57**, 871 (1986).
3. G. M. Wysin and A. R. Bishop, *Phys. Rev.* **B42**, 810 (1990).
4. Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнитоупорядоченных систем*, Наука, Москва (1987).
5. N. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).
6. P. C. Hoenberg, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967).
7. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **34**, 610 (1972).
8. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys.* C6, 1181 (1973).
9. D. L. Huber, *Phys. Rev.* **B26**, 3758 (1982).
10. F. G. Mertens, A. R. Bishop, G. M. Wysin, and C. Kawabata, *Phys. Rev.* **B39**, 591 (1989).
11. В. Л. Покровский, Д. В. Хвещенко, *ФНТ* **14**, 385 (1988).
12. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
13. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rev.* **194**, 117 (1990).
14. А. М. Косевич, В. П. Воронов, *ФНТ* **7**, 908 (1981).
15. А. М. Косевич, В. П. Воронов, И. В. Манжос, *ЖЭТФ* **84**, 148 (1983).
16. А. В. Никифоров, Э. Б. Сонин, *ЖЭТФ* **85**, 642 (1983).
17. Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **70**, 738 (1961).
18. А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 503 (1975).
19. V. Ambegaokar, B. I. Halperin, D. R. Nelson, and E. D. Siggia, *Phys. Rev.* **B21**, 1806 (1980).
20. P. Minnhagen, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1001 (1987).
21. Э. Б. Сонин, *УФН* **137**, 264 (1982).
22. R. J. Donnely, *Quantized Vortices in Helium II. Cambridge Studies in Low Temperature Physics* 3, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
23. J. C. Slonczewski, *J. Appl. Phys.* **45**, 375 (1974).
24. A. A. Thiele, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 239 (1973).
25. A. A. Thiele, *J. Appl. Phys.* **45**, 373 (1974).
26. A. P. Malozemov and J. C. Slonczewski, *Magnetic Domain Walls in Bubble Materials*, Academic Press, New York (1979).
27. B. A. Ivanov and D. D. Sheka, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 404 (1994).
28. Б. А. Иванов, А. Н. Кичижиев, Д. Д. Шека, *ФНТ* **18**, 921 (1992).
29. F. G. Martens, G. M. Wysin, A. R. Völkel, A. R. Bishop, and H. J. Schnitzer, in: *Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology*, F. G. Mertens and K. H. Spatschek (eds.), Plenum, New York (1994).
30. A. R. Völkel, A. R. Bishop, F. G. Mertens, and G. M. Wysin, *J. Phys.* **C4**, 9411 (1992).
31. J. B. Taylor and B. McNamara, *Phys. Fluids* **14**, 1492 (1971).
32. D. D. Wiesler, H. Zabel, and S. M. Shapiro, *Z. Phys.* **B93**, 227 (1994).

Vortices in the cone phase of a classical quasi-two-dimensional ferromagnet

B. A. Ivanov and D. D. Sheka

Vortex phenomenology is extended to the topological Berezinski—Kosterlitz—Thouless phase transition in the classical weakly anisotropic Heisenberg easy-plane ferromagnet, which is in magnetic field, directed along the hard axis of the magnet, in the so-called cone phase. Diminution of the critical temperature induced by the field is predicted. The static vortex structure in the external field is calculated. The field is shown to distinguish the properties of opposite polarized vortices and essentially influence the form of the components of the dynamic structural factor of the magnetic.