Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

7 • 2007

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.3(0758)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О новых решениях задач по переходным процессам разряда конденсаторов

By using the new conception of transient processes, which is based on the expansion of jump-like signals in a series of components including the harmonic ones, the solutions of a number of problems concerning the discharge of capacitors are given.

В соответствии с новой концепцией о переходных процессах в электроцепях [1], основанной на получении в эксперименте на анализаторах спектров затухающих рядов гармоник при включении электроцепей на скачкообразные напряжения, осуществляется расчет переходного процесса разряда конденсатора. Например, напряжения $E \cdot 1(t)$ распадается на составляющие $f_1(t) = E(1 - e^{\alpha t})$ и $f_2(t) = Ee^{-\alpha t} = e^{-\alpha t} \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t$, где $U_{ak} = U_{a1}/(\pi\omega_k)$, $E = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}$, α — коэффициент затухания; U_{ak}, ω_k — амплитуда и круговая частота k-й гармоники соответственно; t — время. При разряде конденсатора С на любое сопротивление (активное и реактивное) в момент включения входное напряжение электроцепи является скачкообразным с последующим затуханием.

В данной работе рассмотрение переходных процессов при разряде электрической емкости осуществим для схем, изображенных на рис. 1, *а*, *б*, где R — активное сопротивление; C_1, C_2 — электрические емкости; Кл — ключ.

В соответствии с классической теорией [2], в схеме RC_1 (рис. 1, *а*) напряжение на C_1 изменяется по закону

$$U_{C_1} = U_{C_{10}} e^{-\delta t}, \tag{1}$$

где $U_{C_{10}}$ — напряжение при $t = 0$; δ — коэффициент затухания электроцепи ($\delta = 1/(RC)$). По новой концепции о переходных процессах, поскольку $U_{C_{10}}$ является скачкообразным, выражение (1) представляется в виде

$$U_C = U_{C_{10}}(1 - e^{-\alpha t})e^{-\delta t} + e^{-(\alpha+\delta)t} \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t. \tag{2}$$

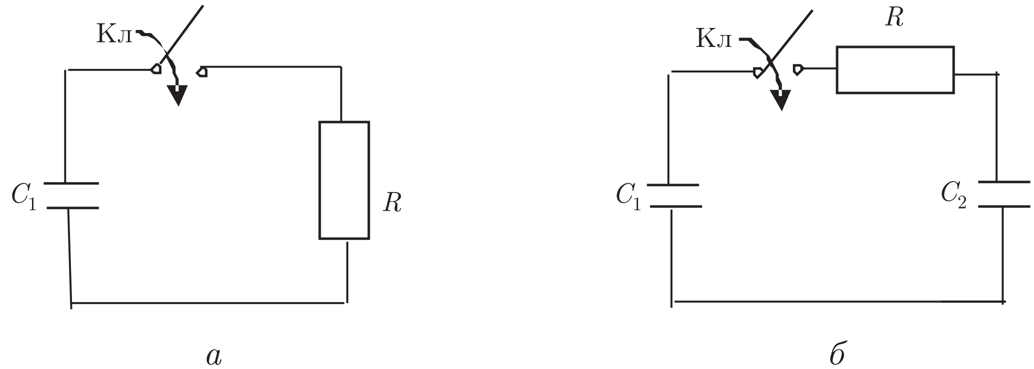

Рис. 1

Заметим, что $\alpha \gg \delta$; $U_{ak} = U_{a1}/(\pi\omega_k)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = U_{C_{10}}$. Если $\alpha = \infty$, то (2) превращается в (1). Справедливость (2) можно проверить при $t = 0$ и $t = \infty$. Итак, при $t = 0$ $U_C(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = U_{C_{10}}$, при $t = \infty$ $U_C(\infty) = 0$. Эта проверка подтверждает правильность (2).

Известно [2], что ток i_C, проходящий через любую емкость C, определяется формулой $i = C(dU_C/dt)$. Используя эту формулу для (2), получим

$$i = C_1U_{C_{10}}[-\delta e^{-\delta t} + (\alpha+\delta)e^{-(\alpha+\delta)t}] - C_1(\alpha+\delta)e^{-(\alpha+\delta)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - \\ - C_1 e^{-(\alpha+\delta)t}\sum_{k=1}^{n}\omega_k U_{ak}\sin\omega_k t. \qquad (3)$$

Так как $\alpha \gg \delta$, то составляющие в (3), в которых имеется сомножитель $e^{-(\alpha+\delta)t}$, затухают за время, примерное $\Delta t \approx 4{,}6\dfrac{1}{\alpha}$, т.е. в начале процесса разряда емкости C_1. В дальнейшем разряд C_1 проходит в соответствии с выражением $i = -C_1U_{C_{10}}\delta e^{-\delta t} = \dfrac{-U_{C_{10}}}{R}e^{-\delta t}$. Знак минус в этой формуле связан именно с разрядом C_1. Проверим справедливость (3), определяя i при $t = 0$ и $t = \infty$. Итак, при $t = 0$

$$i = C_1U_{C_{10}}(-\delta+\alpha+\delta) - C_1(\alpha+\delta)\sum_{k=1}^{n} U_{ak} = -C_1\delta\sum_{k=1}^{n} U_{ak} = -C_1U_{C_{10}}\delta = -\frac{U_{C_{10}}}{R},$$

при $t = \infty$ $i = 0$.

Из этой проверки видно, что ток в цепи RC_1 во время разряда C_1 при включении ключа Кл нарастает скачком до величины $i = U_{C_{10}}/R$, а затем затухает до нуля. При $\alpha = \infty$ из (3) ток $i = -(U_{C_{10}}/R)e^{-\delta t}$, т.е. соответствует решению по классической теории [2].

Далее перейдем к рассмотрению переходного процесса при разряде C_1 на электроцепь RC_2 (рис. 1, *б*). В этом случае также на цепь RC_2 подается напряжение $U_{C_{10}}$ скачкообразно и оно может быть разложено на составляющие, подобно тому, как для схемы рис. 1, *а*. Но для этого вначале классическим методом определили то, что напряжение U_C изменяется в соответствии с выражением

$$U_{C_1}(t) = \frac{U_{C_{10}}}{C_1+C_2}(C_1 + C_2e^{-\delta_C t}), \qquad (4)$$

где $\delta_C = (C_1 + C_2)/(RC_1C_2)$ определяется как $\delta_C = 1/(RC)$ и C есть общая емкость последовательного соединения C_1 и C_2, равная $C = (C_1C_2)/(C_1 + C_2)$. Как видно из (4), при $t = 0$ $U_{C_1}(0) = U_{C_{10}}$, т. е. в начале разряда U_{C_1} представляет собой скачкообразную функцию. При $t = \infty$ $U_{C_1} = (U_{C_{10}}C_1)/(C_1 + C_2)$. Таким образом, в переходном процессе разряда C_1 напряжение $U'_{C_1}(t) = U_{C_{10}}e^{-\delta t}$, которое, подобно (1), может быть разложено на составляющие вида

$$U'_{C_1}(t) = U_{C_{10}}(1 - e^{-\alpha t})e^{-\delta t} + e^{-(\alpha+\delta)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t,$$
$$U_{ak} = \frac{U_{a1}}{\pi\omega_k}, \qquad \alpha \gg \delta; \qquad \sum_{k=1}^{n} U_{ak} = U_{C_{10}}. \tag{5}$$

Проверим справедливость (5). При $t = 0$ $U'_{C_1}(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = U_{C_{10}}$; при $t = \infty$ $U'_{C_1}(\infty) = 0$. Итак, (5) верна.

Ток i в цепи C_1RC_2 течет только при действии $U'_{C_1}(t)$. В установившемся режиме, когда $U'_{C_1}(\infty) = U'_{C_2}(\infty)$, ток $i = 0$. Исходя из этого, определим ток i так:

$$-i(t) = \frac{-C_1C_2}{C_1 + C_2}\frac{dU'_{C_1}}{dt} = -U_{C_{10}}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}[-\delta e^{-\delta t} + (\alpha + \delta)e^{-(\alpha+\delta)t}] +$$
$$+ \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(\alpha + \delta)e^{-(\alpha+\delta)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t + \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}e^{-(\alpha+\delta)t}\sum_{k=1}^{n}\omega_k U_{ak}\sin\omega_k t. \tag{6}$$

Здесь, так же, как и в (3), $\alpha \gg \delta$ и поэтому к концу интервала времени $\Delta t \approx 4{,}6 \cdot (1/\alpha)$ составляющие с сомножителем $e^{-(\alpha+\delta)t}$ затухают практически до нуля ($0{,}01U_{C_{10}}$). Интервал времени $\Delta t \ll 4{,}6 \cdot (1/\delta)$, т. е. времени до прекращения разрядного тока $i(t)$.

Проверим правильность выражения (6). При $t = 0$

$$i(0) = U_{C_{10}}\frac{-C_1C_2}{C_1 + C_2}(-\delta + \alpha + \delta) + \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(\alpha + \delta)\sum_{k=1}^{n} U_{ak} = \frac{U_{C_{10}}}{R};$$

при $t = \infty$ $i(\infty) = 0$, т. е. выражение (6) правильное. Знак тока разряда $i(t)$ отрицательный.

Напряжение на конденсаторе C_2 изменяется по закону $U_{C_2} = (1/C_2)\int\limits_0^t i(t)dt$ или после вычисления этого интеграла

$$U_{C_2} = U_{C_{10}}\frac{-C_1}{C_1 + C_2}(1 - e^{-\alpha t})e^{-\delta t}\Big|_0^t + \frac{C_1}{C_1 + C_2}e^{-(\alpha+\delta)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\Big|_0^t =$$
$$= \frac{-C_1U_{C_{10}}}{C_1 + C_2}(1 - e^{-\alpha t})e^{-\delta t} - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\left[e^{-(\alpha+\delta)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\right] =$$
$$= -\frac{C_1U_{C_{10}}}{C_1 + C_2}[(1 - e^{-\alpha t})e^{-\delta t} - 1] - \frac{C_1}{C_1 + C_2}e^{-(\alpha+\delta)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t. \tag{7}$$

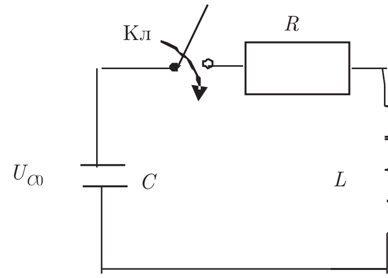

Рис. 2

Проверим правильность (7). При $t = 0$ $U_{C_2} = 0$; при $t = \infty$ $U_{C_2}(\infty) = (C_1/(C_1 + C_2))U_{C_{10}} = U_{C_1}(\infty)$, т. е. (7) справедлива. При $\alpha = \infty$ выражение (7) имеет вид

$$U_{C_2}(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_{C_{10}}(1 - e^{-\delta t}). \tag{8}$$

Знак U_{C_2} противоположен U_{C_1}. Выражение (8) полностью соответствует выведенной по классическому методу формуле напряжения на C_2 [2].

Таким образом, данные решения по новой концепции о переходных процессах в электроцепях не только не противоречат классической теории, но и свидетельствуют о появлении в начале переходного процесса ряда затухающих гармоник входного напряжения, которые обусловливают появление составляющей в токе в виде затухающего гармонического ряда. Эта составляющая пребывает в течение времени $\Delta t \approx 4{,}6 \cdot (1/\alpha)$ и, в принципе, осуществляет затягивание переходного процесса, что необходимо учитывать при необходимости в малых промежутках перезаряда конденсаторов.

Далее рассмотрим случай разряда емкости C на цепь последовательного соединения активного сопротивления R и индуктивности L (рис. 2). Здесь также при включении ключа Кл напряжение U_{C_0} скачкообразно прикладывается к RL цепи, создавая ток i. Затем напряжение U_C и ток i затухают до нуля ввиду исчезновения в емкости C электрического заряда. При решении классическим методом напряжение U_C определяется в виде [2]

$$U_C = \frac{U_{C_0}}{p_1 - p_2}(-p_2 e^{P_1 t} + p_1 e^{P_2 t}), \tag{9}$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Выражение (9) соответствует апериодическому разряду C (корни $p_{1,2}$ характеристического уравнения, соответствующего уравнению цепи CRL, вещественные, $R > 2\sqrt{L/C}$).

В данной работе рассмотрим вначале такой разряд. Так как p_1 и p_2 отрицательные, то $-p_1$ и $-p_2$ будут коэффициентами затухания составляющих в (9)

$$U_{C_1} = -\frac{U_{C_0} p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t}; \qquad U_{C_2} = \frac{U_{C_0} p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t},$$

которые по форме подобны (1). Исходя из этого, с учетом нашей концепции применим к этим выражениям разложение вида (2). Тогда

$$U_{C_1} = -\frac{U_{C_0} p_2}{p_1 - p_2}(1 - e^{-\alpha t}) e^{p_1 t} + e^{-(\alpha - p_1)t} \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t;$$

$$U_{C_2} = \frac{U_{C_0}p_1}{p_1 - p_2}(1 - e^{-\alpha t})e^{p_2 t} + e^{-(\alpha - p_2)t}\sum_{k=1}^{n} U_{bk}\cos\omega_k t,$$

где

$$\sum_{k=1}^{n} U_{ak} = \frac{U_{C_0}p_2}{p_1 - p_2}; \qquad \sum_{k=1}^{n} U_{bk} = \frac{-U_{C_0}p_1}{p_1 - p_2}; \qquad U_{ak} = \frac{U_{a1}}{\pi\omega_k}; \qquad U_{bk} = \frac{U_{b1}}{\pi\omega_k}.$$

Следовательно,

$$U_C = U_{C_1} + U_{C_2} = -\frac{U_{C_0}p_2}{p_1 - p_2}(1 - e^{-\alpha t})e^{p_1 t} + \frac{U_{C_0}p_1}{p_1 - p_2}(1 - e^{-\alpha t})e^{p_2 t} + $$
$$+ e^{-(\alpha - p_1)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t + e^{-(\alpha - p_2)t}\sum_{k=1}^{n} U_{bk}\cos\omega_k t. \qquad (10)$$

Проверим правильность (10). При $t = 0$ $U_C = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} + \sum\limits_{k=1}^{n} U_{bk} = U_{C_0}$; при $t = \infty$ $U_C = 0$, т. е. (10) справедлива. Ток разряда в этой цепи $i = C(dU_C/dt)$, или, с учетом (10),

$$i_C(t) = C\Bigg\{\frac{U_{C_0}}{p_1 - p_2}[p_1 p_2(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}) + p_2(\alpha - p_1)e^{-(\alpha - p_1)t} - p_1(\alpha - p_2)e^{-(\alpha - p_2)t}] -$$
$$- e^{-(\alpha - p_1)t}\left[(\alpha - p_1)\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t + \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\omega_k\sin\omega_k t\right] -$$
$$- e^{-(\alpha - p_2)t}\left[(\alpha - p_2)\sum_{k=1}^{n} U_{bk}\cos\omega_k t + \sum_{k=1}^{n} U_{bk}\omega_k\sin\omega_k t\right]\Bigg\}. \qquad (11)$$

Проверим (11). При $t = 0$ $i_C = 0$; при $t = \infty$ $i_C = 0$, т. е. выражение (11) правильное. Если $\alpha = \infty$, то

$$U_C = -\frac{U_{C_0}p_2}{p_1 - p_2}e^{p_1 t} + \frac{U_{C_0}p_1}{p_1 - p_2}e^{p_2 t} \qquad (12)$$

и ток i_C из (11) при $\alpha = \infty$ имеет вид

$$i_C = \frac{CU_{C_0}p_1 p_2}{p_1 - p_2}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}). \qquad (13)$$

Выражения (12) и (13) соответствуют классическому решению (9) [2, см. III6].

Рассмотрим колебательный разряд емкости C на RL цепь при условии, что p_1 и p_2 являются комплексными. В этом случае $R < 2\sqrt{L/C}$.

Напряжение U_C при колебательном разряде выражается соотношением [2]

$$U_C = \frac{U_{C_0}}{\omega_0\sqrt{LC}}e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \Psi_0), \qquad (14)$$

где

$$\delta = \frac{R}{2L}, \qquad \Psi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\delta}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

В соответствии с новой концепцией о переходных процессах [1, 3] напряжение U_C, выраженное формулой (14), можно представить в виде разложения на составляющие

$$U_{C_1} = \frac{U_{C_0}}{\omega_0\sqrt{LC}}(1 - e^{-\alpha t})e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \Psi_0) \qquad \text{и} \qquad U_{C_2} = e^{-\alpha t}\sin\Psi_0 \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t,$$

где $U_{ak}/(\pi\omega_k)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = U_{C_0}/(\omega_0\sqrt{LC})$. В этом случае

$$U_C = \frac{U_{C_0}}{\omega_0\sqrt{LC}}(1 - e^{-\alpha t})e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \Psi_0) + e^{-\alpha t}\sin\Psi_0 \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\sin(\omega_0 t + \Psi_0). \tag{15}$$

Проверим правильность (15). При $t = 0$

$$U_C = \sin\Psi_0 \sum_{k=1}^{n} U_{ak} = \frac{U_{C_0}}{\omega_0\sqrt{LC}}\sin\Psi_0;$$

при $t = \infty$ $U_C = 0$.

Выражение (14) при $t = 0$ имеет тот же вид, что и (16). А это означает, что (15) верное. Выразим с учетом (15) ток $i = C\dfrac{dU_C}{dt}$. В результате решения

$$i = \frac{U_{C_0}C}{\omega_0\sqrt{LC}}\{[-\delta e^{-\delta t} + (\alpha+\delta)e^{-(\alpha+\delta)t}]\sin(\omega_0 t + \Psi_0) + (1 - e^{-\alpha t})e^{-\delta t}\omega_0\cos(\omega_0 t + \Psi_0)\} -$$

$$- C\alpha e^{-\alpha t}\sin\Psi_0 \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - Ce^{-\alpha t}\sin\Psi_0 \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\omega_k\sin\omega_k t. \tag{16}$$

Проверим (16). При $t = 0$ $i = 0$; при $t = \infty$ $i = 0$, т. е. (17) верна. Здесь также $\alpha \gg \delta$, и если $\alpha = \infty$, то (16) приобретает вид (14), а ток

$$i = \frac{CU_{C_0}e^{-\delta t}}{\omega_0\sqrt{LC}}[-\delta\sin(\omega_0 t + \Psi_0) + \omega_0\cos(\omega_0 t + \Psi_0)] \tag{17}$$

полностью соответствует току $i = C(d(14)/dt)$.

Таким образом, представленные решения задач по переходным процессам разряда конденсаторов, не притиворечa классической теории, имеют теоретические дополнения, основанные на результатах экспериментов, связанные с появлением в начале переходных процессов в течение времени $\Delta t \approx 4{,}6\cdot(1/\alpha)$ ряда затухающих гармоник, которые в этот период разряжают и заряжают конденсаторы, и этим самым затягивают разрядный переходный процесс.

1. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
2. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1958. – 404 с.
3. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Доп. НАН України. – 2005. – № 4. – С. 81–96.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 11.11.2005