УДК 517.9

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Т. В. Добродзій

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: notava@ukr.net

We find explicit estimates for closeness of trajectories of the exact and the averaged systems. It is shown that the optimal control for the averaged system is ε-optimal for the exact system both on asymptotically finite $\left(\text{of order } \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ and infinite time intervals.

Получены явные оценки близости траекторий точной и усредненной систем. Показано, что оптимальное управление усредненной задачи является ε-оптимальным для точной как на асимптотически конечных $\left(\text{порядка } \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, так и бесконечных временных интервалах.

Вступ. При дослідженні задач оптимального керування ефективним виявився метод усереднення, що дозволило звести розв'язання початкової неавтономної задачі до більш простої усередненої задачі. Даним питанням присвячено низку робіт (див, наприклад, [1–4]). Отримано твердження про близькість розв'язків точної і відповідної усередненої систем у нелінійному випадку і у випадку лінійних за керуванням задач на асимптотично скінченних $\left(\text{порядку } \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ інтервалах (див. [5, 6]).

У даній роботі одержано явні оцінки (за малим параметром) близькості розв'язків точної та відповідної усередненої систем на скінченному часовому інтервалі та на півосі у випадку періодичної правої частини. Також знайдено умови, за яких оптимальне керування усередненої задачі здійснює наближений оптимальний синтез точної задачі.

Дослідження на скінченному часовому інтервалі. Розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \varepsilon X(t, x, u), \\ &x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon(u) = \Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\right)\right),$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $x \in D$ — фазовий вектор, D — область в R^n, $u \in U \subset R^m$ — вектор керування, $t \geq 0$, $T > 0$ — деяка константа, X — вектор-функція, періодична по t з періодом Θ, $\Phi(x)$ — деяка функція.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо виконуються такі умови:

a) $u(t)$ є вимірними, локально інтегровними при $t \geq 0$, $u(t) \in U$ при $t \geq 0$;

b) для кожного $u(t)$ існує стала $u_0 \in U$ така, що $|u(t) - u_0| \leq \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ не залежить від u і $\int_0^\infty \varphi(t)dt = C_\varphi < \infty$;

c) для кожного керування $u(t)$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок задачі Коші (1) є визначеним і єдиним при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$.

Множину допустимих керувань позначимо через F. Для кожного допустимого керування $u(t)$ позначимо через $x(t,u)$ розв'язок системи (1) при $u = u(t)$. Крім того, позначимо $J_\varepsilon = \inf_{u(t)\in F} J_\varepsilon(u)$.

Поставимо у відповідність системі (1) на $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ усереднену систему

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \varepsilon X_0(y, \bar{u}), \\ &y(0) = x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

де $X_0(x,u) = \dfrac{1}{\Theta}\displaystyle\int_0^\Theta X(t,x,u)dt$. Для неї допустимі керування $\bar{u}$ задовольняють такі ж умови, що і допустимі керування задачі (1), де умова c) виконується для розв'язку задачі Коші (2). Позначимо $\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}) = \Phi\left(y\left(\dfrac{T}{\varepsilon}, \bar{u}\right)\right)$. Нехай $u^*(t,\varepsilon)$ — оптимальне керування усередненої системи (2), тобто $\bar{J}_\varepsilon = \inf\limits_{\bar{u}(t)\in\bar{F}} \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}) = \bar{J}_\varepsilon(u^*(t,\varepsilon))$.

Справедливою є наступна лема.

Лема 1. *Нехай в області* $Q = \{x \in D \subset R^n, t \geq 0, u \in U \subset R^m\}$ *виконуються такі умови:*

1) $X(t,x,u)$ *є вимірною по* t, *обмеженою та задовольняє умову Ліпшиця по* x *та* u, *тобто* $|X(t,x,u)| \leq K$, $|X(t,x_1,u_1) - X(t,x_2,u_2)| \leq M(|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2|)$;

2) розв'язок $\bar{y} = \bar{y}(t,u_0)$, $\bar{y}(0,u_0) = x_0$, *усередненої системи*

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{y}} = \varepsilon X_0(\bar{y}, u_0), \\ &\bar{y}(0) = x_0, \end{aligned} \tag{3}$$

визначений при всіх $t \geq 0$ *і лежить в області* D *разом з деяким* ρ*-околом, до того ж* ρ *не залежить від* u *та* ε.

Тоді для довільного $T > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \min\left\{\dfrac{\rho}{4e^{TM}MC_\varphi}, \dfrac{\rho}{2e^{TM}K\Theta(2+MT)}\right\}$ *таке, що для довільного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *розв'язки* $x(t,u)$ *і* $y(t,u)$ *визначено на* $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ *і справджується оцінка*

$$|x(t,u) - y(t,u)| \leq C\varepsilon, \quad \textit{де} \quad C = e^{MT}(2MC_\varphi + K\Theta(2+MT)).$$

Доведення. Для довільного допустимого керування $u(t)$ і $\varepsilon > 0$ оцінимо на $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$

норму різниці між розв'язками системи (1) та системи

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{x}} = \varepsilon X(t, \bar{x}, u_0), \\ &\bar{x}(0) = x_0, \end{aligned} \tag{4}$$

$\bar{x}(t) = \bar{x}(t, u_0)$, де u_0 вибрано з умови b) для $u(t)$. Переходячи в (1) і (4) до інтегральних зображень, для довільного $t \geq 0$ до виходу хоча б одного з розв'язків на межу області D маємо $x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t X(s, x(s), u(s))ds$ та $\bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t X(s, \bar{x}(s), u_0)ds$, де $x(t) = x(t, u)$. Оцінимо різницю

$$|x(t) - \bar{x}(t)| = \left| \varepsilon \int_0^t [X(s, x(s), u(s)) - X(s, \bar{x}(s), u(s))]ds + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \int_0^t [X(s, \bar{x}(s), u(s)) - X(s, \bar{x}(s), u_0)\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon M \int_0^t |x(s) - \bar{x}(s)|ds + \varepsilon M \int_0^t |u(s) - u_0|ds \leq \varepsilon M \int_0^t |x(s) - \bar{x}(s)|ds + \varepsilon M C_\varphi.$$

З леми Гронуолла – Беллмана отримуємо оцінку

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon M C_\varphi e^{TM}, \tag{5}$$

справедливу до моменту виходу розв'язків на межу області D.

Для розв'язків систем (3) і (4) справджується оцінка

$$|\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| \leq \varepsilon \widetilde{C},$$

де $\widetilde{C} = e^{TM} K \Theta(2 + MT)$ згідно з зауваженням 2 [1, c. 11]. Отже, при достатньо малих ε розв'язок $\bar{x}(t)$ лежить в області D при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$. Тоді, враховуючи (5), маємо

$$|x(t) - \bar{y}(t)| \leq |x(t) - \bar{x}(t)| + |\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| \leq \varepsilon M C_\varphi e^{TM} + \varepsilon \widetilde{C} = \varepsilon (M C_\varphi e^{TM} + \widetilde{C}). \tag{6}$$

Розглянемо норму різниці між розв'язками систем (2) і (3). Аналогічно (5) при $t \in$ $\in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ отримуємо оцінку $|y(t) - \bar{y}(t)| \leq \varepsilon M C_\varphi e^{TM}$, що справджується до моменту виходу розв'язків на межу області D. Оскільки $\bar{y}(t)$ задовольняє умову 2 леми, то для достатньо малих ε розв'язок $y(t)$ лежить в області D при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$. Тоді, використовуючи (6), знаходимо оцінку $|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - \bar{y}(t)| + |\bar{y}(t) - y(t)| \leq \varepsilon e^{TM}(2MC_\varphi + K\Theta(2 + MT))$. Отже, $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon C$, де $C = e^{TM}(2MC_\varphi + K\Theta(2 + MT))$.

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай в області* $Q = \{x \in D \subset R^n, t \geq 0, u \in U \subset R^m\}$ *виконуються такі умови:*

1) $X(t,x,u)$ *є вимірною по* t, *обмеженою та задовольняє умову Ліпшиця по* x *та* u;

2) розв'язок $\bar{y} = \bar{y}(t,u_0)$, $\bar{y}(0,u_0) = x_0$, *усередненої системи (3) визначений при всіх* $t \geq 0$ *і лежить в області* D *разом з деяким* ρ*-околом, до того ж* ρ *не залежить від* u *та* ε;

3) функція $\Phi(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця з константою* L *в області* D;

4) існує оптимальне керування $u^*(t,\varepsilon)$ *системи (2).*

Тоді для будь-якого $T > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \min\left\{\dfrac{\rho}{4e^{TM}MC_\varphi}, \dfrac{\rho}{2e^{TM}K\Theta(2+MT)}\right\}$ *таке, що для довільного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $J_\varepsilon > -\infty$ *і виконується нерівність*

$$|J_\varepsilon(u^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon)| \leq \varepsilon(2LC+1), \quad \text{де} \quad C = e^{TM}(2MC_\varphi + K\Theta(2+MT)).$$

Доведення цієї теореми є аналогічним доведенню теореми [5] з використанням оцінки, що отримана в лемі 1.

Дослідження на півосі. Будемо розглядати задачу оптимального керування системою диференціальних рівнянь (1) з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_0^\infty L(t,x,u)dt \to \inf,$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $t \geq 0$, $x \in D$ — фазовий вектор, D — область R^n, $u \in U \subset R^m$ — вектор керування, X — n-вимірна вектор-функція, періодична по t з періодом Θ, а для функції $L(t,x,u)$ виконується умова $|L(t,x,u) - L(t,y,u)| \leq \gamma(t)|x-y|$, де $\int_0^\infty \gamma(t)dt = C_\gamma < \infty$.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо виконуються умови a), b) з попереднього пункту та

c_1) для кожного керування $u(t)$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок задачі Коші (1) є визначеним і єдиним при $t \geq 0$;

d_1) $|J(u)| < \infty$.

Множину допустимих керувань задачі (1) позначимо через F.

Поставимо у відповідність системі (1) при $t \geq 0$ усереднену систему (2) з функціоналом керування

$$\bar{J}(\bar{u}) = \int\limits_0^\infty L(t,y,\bar{u})dt, \quad \text{де} \quad X_0(x,u) = \frac{1}{\Theta}\int\limits_0^\Theta X(t,x,u)dt, \quad t \geq 0.$$

Для неї допустимі керування $\bar{u}$ задовольняють такі ж умови, що і допустимі керування задачі (1), де умова c_1) виконується для розв'язку задачі Коші (2), а умова d_1) — для функціонала $\bar{J}(\bar{u})$. Множину допустимих керувань усередненої задачі позначимо через $\bar{F}$. Крім того, позначимо $J^* = \inf_{u(t)\in F} J(u)$, $\bar{J}^* = \inf_{\bar{u}(t)\in \bar{F}} \bar{J}(\bar{u})$.

Далі будемо вважати, що для усередненої системи виконуються такі умови:

A_1) для довільної сталої $u_0 \in U$ розв'язок $\bar{y}(\tau) = \bar{y}(\tau, u_0)$ усередненої системи

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{y}}{d\tau} = X_0(\bar{y}, u_0), \\ &\bar{y}(0) = x_0, \quad \tau = \varepsilon t, \end{aligned} \tag{7}$$

визначений при всіх $\tau \geq 0$ і лежить в області D разом з деяким ρ-околом, де ρ не залежить від u_0;

A_2) розв'язок $\bar{y}(\tau)$ є експоненціально стійким, тобто існує $\delta > 0$ таке, що з нерівності

$$|\bar{y}_(\tau_0, u_0) - \bar{y}_1(\tau_0, u_0)| \leq \delta$$

випливає виконання нерівності

$$|\bar{y}_(\tau, u_0) - \bar{y}_1(\tau, u_0)| \leq N|\bar{y}_(\tau_0, u_0) - \bar{y}_1(\tau_0, u_0)|e^{-\alpha(\tau-\tau_0)} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_0,$$

де N, α — деякі додатні сталі, $\bar{y}_1(\tau, u_0)$ — довільний розв'язок (7).

Лема 2. *Нехай в області* $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset R^n, u \in U \subset R^m\}$ *виконуються такі умови:*

1) $X(t,x,u)$ *є вимірною по* t*, обмеженою та задовольняє умову Ліпшиця по* x *та* u*, тобто* $|X(t,x,u)| \leq K$, $|X(t,x_1,u_1) - X(t,x_2,u_2)| \leq M(|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2|)$;

2) виконуються умови A_1*) та* A_2*).*

Тоді для довільного $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}_0$*, де* $\widetilde{\varepsilon}_0 = \min\left\{\dfrac{\delta}{6C_1 + C_2}, \dfrac{\rho}{2C_1(1+2N)}, \dfrac{\rho}{8(2C_1+C_2)}\right\}$, *розв'язки точної системи (1) та усередненої системи (2) визначено при* $t \geq 0$ *та виконується оцінка* $|x(t,u) - y(t,u)| \leq \varepsilon C_0$ *для кожного керування* $u(t)$*, що задовольняє умови a) та b), де* $C_0 = 2C_1(1+4N) + C_2(1+N)$, $C_1 = MC_\varphi(2N)^{\frac{M}{\alpha}}$, $C_2 = (2N)^{\frac{M}{\alpha}}K\Theta\left(2 + \dfrac{M\ln 2N}{\alpha}\right)$.

Доведення. Для довільного допустимого керування $u(t)$ існує u_0 таке, що розв'язок $\bar{y}(\tau, u_0)$ усередненої системи (7) є експоненціально стійким, отже, виконується нерівність $|\bar{y}_(\tau, u_0) - \bar{y}_1(\tau, u_0)| \leq N\delta e^{-\alpha(\tau-\tau_0)}$ при $\tau \geq \tau_0$, де N, α — деякі додатні сталі, $\bar{y}_1(\tau, u_0)$ — довільний розв'язок (7). Знайдемо таке $\tau_1 = \tau_0 + T$, починаючи з якого $|\bar{y}_(\tau, u_0) - \bar{y}_1(\tau, u_0)| \leq \leq \dfrac{\delta}{2}$ для деякого $\delta > 0$, тобто $N\delta e^{-\alpha(\tau_1-\tau_0)} = \dfrac{\delta}{2}$, звідки $T = \dfrac{\ln 2N}{\alpha}$. Отже, при всіх $\tau \geq \tau_1$ розв'язок $\bar{y}_1(\tau, u_0)$, що починається в δ-околі розв'язку $\bar{y}(\tau, u_0)$, буде лежати в $\dfrac{\delta}{2}$-околі розв'язку $\bar{y}_1(\tau, u_0)$. Позначимо далі $C_1 = MC_\varphi(2N)^{\frac{M}{\alpha}}$, $C_2 = (2N)^{\frac{M}{\alpha}}K\Theta\left(2 + \dfrac{M\ln 2N}{\alpha}\right)$. На підставі леми 1 для вказаного $T > 0$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ (ε_0 фігурує в лемі 1) та при $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + T]$ отримуємо

$$\left|\bar{y}(\tau, u_0) - y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq \varepsilon C_1, \tag{8}$$

де $y\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)$ — розв'язок системи (2) з керуванням u, що задовольняє умови a) і b).

Розглянемо такий розв'язок $\bar{y}_T(\tau, u_0)$ усередненої системи (7), що $\bar{y}_T(T, u_0) = y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right)$. Оскільки $\bar{y}(\tau, u_0)$ є експоненціально стійким, то, враховуючи нерівність $|\bar{y}(T, u_0) - \bar{y}_T(T, u_0)| \leq \varepsilon C_1$, при $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2C_1}$ та при $\tau \geq T$ маємо оцінку $|\bar{y}(\tau, u_0) - \bar{y}_T(\tau, u_0)| \leq \varepsilon N C_1 e^{-\alpha(\tau - T)}$. Отже, справедливою є оцінка $|\bar{y}(\tau, u_0) - \bar{y}_T(\tau, u_0)| \leq \varepsilon N C_1 \leq 2\varepsilon N C_1$, $\tau \geq T$. При $\tau = 2T$ маємо оцінку $|\bar{y}(2T, u_0) - \bar{y}_T(2T, u_0)| \leq \varepsilon N C_1 e^{-\alpha T}$. Враховуючи, що $e^{-\alpha T} = \frac{1}{2N}$, одержуємо $|\bar{y}(2T, u_0) - \bar{y}_T(2T, u_0)| \leq \varepsilon C_1$.

Тоді при $\tau \in [T, 2T]$ справджується оцінка

$$\left|y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{y}(\tau, u_0)\right| \leq \left|y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{y}_T(\tau, u_0)\right| + |\bar{y}_T(\tau, u_0) - \bar{y}(\tau, u_0)| \leq \varepsilon C_1 + 2\varepsilon N C_1,$$

а отже,

$$\left|y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{y}(\tau, u_0)\right| \leq \varepsilon C_1(1 + 2N), \tag{9}$$

а при $\tau = 2T$

$$\left|y\left(\frac{2T}{\varepsilon}, u\left(\frac{2T}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{y}(2T, u_0)\right| \leq 2\varepsilon C_1. \tag{10}$$

Перевіримо справедливість отриманих оцінок на проміжку $[2T, 3T]$. Розглянемо такий розв'язок $\bar{y}_{2T}(\tau, u_0)$ усередненої системи (7), що $\bar{y}_{2T}(2T, u_0) = y\left(\frac{2T}{\varepsilon}, u\left(\frac{2T}{\varepsilon}\right)\right)$. Враховуючи (10), маємо $|\bar{y}_{2T}(2T, u_0) - \bar{y}(2T, u_0)| \leq 2\varepsilon C_1$. Оскільки $\bar{y}(\tau, u_0)$ є експоненціально стійким, то має місце оцінка $|\bar{y}(\tau, u_0) - \bar{y}_T(\tau, u_0)| \leq 2\varepsilon N C_1 e^{-\alpha(\tau - 2T)}$ при $\tau \geq 2T$. Зокрема, при $\tau \in [2T, 3T]$ отримуємо оцінку $|\bar{y}(\tau, u_0) - \bar{y}_{2T}(\tau, u_0)| \leq 2\varepsilon N C_1$, а при $\tau = 3T$ одержуємо $|\bar{y}(3T, u_0) - \bar{y}_{2T}(3T, u_0)| \leq \varepsilon C_1$. Тоді для довільного $\tau \in [2T, 3T]$ маємо $\left|y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{y}(\tau, u_0)\right| \leq \left|y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{y}_{2T}(\tau, u_0)\right| + |\bar{y}_{2T}(\tau, u_0) - \bar{y}(\tau, u_0)| \leq \varepsilon C_1(1+2N)$, а при $\tau = 3T$ отримуємо $\left|y\left(\frac{3T}{\varepsilon}, u\left(\frac{3T}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{y}(3T, u_0)\right| \leq 2\varepsilon C_1$.

Продовжуючи далі даний процес, встановлюємо оцінку $\left|y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{y}(\tau, u_0)\right| \leq \varepsilon C_1(1 + 2N)$ для довільного $\tau \geq 0$ і довільного керування $u(t)$, що задовольняє умови a) та b).

За лемою 1 для вказаного $T > 0$ існує $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{\delta}{2C_1}, \frac{\rho}{2C_1(1 + 2N)}, \frac{\rho}{8(2C_1 + C_2)}\right\}$ таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ на $[\tau_0, \tau_0 + T]$ розв'язки $x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)$ та $y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)$ визначені, лежать в області D і задовольняють нерівності

$$\left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right) - y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right)\right| \leq \widetilde{C}\varepsilon \leq \varepsilon C_g,\ \widetilde{C} = e^{MT}(2MC_\varphi + K\Theta(2 + MT)),\ C_g = 4C_1 + C_2. \tag{11}$$

Розглянемо такий розв'язок $\bar{y}_T(\tau, u_0)$ усередненої системи (7), що $\bar{y}_T(T, u_0) = x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right)$, та розв'язок $\bar{x}_T\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u_0\right)$ системи

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}, u_0\right), \quad \bar{x}(0) = x_0,$$

такий, що $\bar{x}_T\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_0\right) = x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right)$. На підставі леми 1 при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ маємо оцінку

$$\left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right) - \bar{x}_T\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u_0\right)\right| \leq \varepsilon C_1, \quad \tau \in [T, 2T]. \tag{12}$$

Згідно з зауваженням 2 [1, с. 11]

$$\left|\bar{x}_T\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u_0\right) - \bar{y}_T(\tau, u_0)\right| \leq \varepsilon C_2, \quad \tau \in [T, 2T], \quad \varepsilon < \varepsilon_1. \tag{13}$$

Тоді з (8) та (11) одержуємо при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ нерівність

$$\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\right) - \bar{y}(T, u_0)\right| \leq \left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\right) - y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\right)\right| + \left|y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\right) - \bar{y}(T, u_0)\right| \leq \varepsilon(6C_1 + C_2),$$

звідки $|\bar{y}_T(T, u_0) - \bar{y}(T, u_0)| \leq \varepsilon(6C_1 + C_2)$. Тоді з експоненціальної стійкості отримуємо

$$|\bar{y}_T(\tau, u_0) - \bar{y}(\tau, u_0)| \leq N\varepsilon(6C_1 + C_2)e^{-\alpha(\tau - T)} \leq \varepsilon N(6C_1 + C_2), \quad \tau \geq T, \tag{14}$$

при $\varepsilon < \frac{\delta}{6C_1 + C_2}$. З (9), (12)–(14) при $\tau \in [T, 2T]$ та при $\varepsilon < \widetilde{\varepsilon}_0$, де

$$\widetilde{\varepsilon}_0 = \min\left\{\frac{\delta}{6C_1 + C_2}, \ \frac{\rho}{2C_1(1 + 2N)}, \ \frac{\rho}{8(2C_1 + C_2)}\right\},$$

маємо

$$\begin{aligned}
&\left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right) - y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right)\right| \leq \\
&\qquad \leq \left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right) - \bar{x}_T\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u_0\right)\right| + \left|\bar{x}_T\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u_0\right) - \bar{y}_T(\tau, u_0)\right| + \\
&\qquad + |\bar{y}_T(\tau, u_0) - \bar{y}(\tau, u_0)| + \left|\bar{y}(\tau, u_0) - y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right)\right| \leq \\
&\qquad \leq \varepsilon C_1 + \varepsilon C_2 + \varepsilon N(6C_1 + C_2) + \varepsilon C_1(1 + 2N) = \\
&\qquad = \varepsilon[2C_1(1 + 4N) + C_2(1 + N)],
\end{aligned}$$

а при $\tau = 2T$

$$\left|x\left(\frac{2T}{\varepsilon}, u\right) - y\left(\frac{2T}{\varepsilon}, u\right)\right| \leq \varepsilon[4C_1 + C_2]. \tag{15}$$

З нерівностей (10) та (15) знаходимо

$$\left|x\left(\frac{2T}{\varepsilon},u\right)-\bar{y}(2T,u_0)\right|\le\left|x\left(\frac{2T}{\varepsilon},u\right)-y\left(\frac{2T}{\varepsilon},u\right)\right|+\left|y\left(\frac{2T}{\varepsilon},u\right)-\bar{y}(2T,u_0)\right|\le\varepsilon(6C_1+C_2).$$

Продовжуючи даний процес, отримуємо оцінку $\left|x\left(\frac{\tau}{\varepsilon},u\right)-y\left(\frac{\tau}{\varepsilon},u\right)\right|\le\varepsilon[2C_1(1+4N)+$ $+C_2(1+N)]$ для довільного $\tau\ge 0$ і довільного керування $u(t)$, що задовольняє умови a) та b).

Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай в області $Q=\{t\ge 0, x\in D\subset R^n, u\in U\subset R^m\}$ виконуються умови леми 2 та існує оптимальне керування u^* усередненої задачі (2).*

Тоді існує таке $\widetilde{\varepsilon}_0=\min\left\{\frac{\delta}{6C_1+C_2},\frac{\rho}{2C_1(1+2N)},\frac{\rho}{8(2C_1+C_2)}\right\}$, що для довільного $0<\varepsilon<\widetilde{\varepsilon}_0$ $J^*>-\infty$ і виконується нерівність $|J(u^*)-J^*|\le\varepsilon(1+2C_\gamma)C_0$, де $C_0=$ $=2C_1(1+4N)+C_2(1+N)$, $C_1=MC_\varphi(2N)^{\frac{M}{\alpha}}$, $C_2=(2N)^{\frac{M}{\alpha}}K\Theta\left(2+\frac{M\ln 2N}{\alpha}\right)$.

Доведення цієї теореми є аналогічним доведенню теореми [5] з використанням оцінки, що отримана в лемі 2.

1. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев, Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
2. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 354 с.
3. *Grammel G., Maizurna I.* A sufficient condition for the uniform exponential stability of time-varying systems with noise // Nonlinear Anal. — 2004. — **56**, № 7. — P. 951–960.
4. *Балабаева Н. П.* Устойчивость нелипшицевых дифференциальных уравнений с управлением // Вестн. Самар. гос. ун-та, 2005. — № 2(36). — С.65–70.
5. *Носенко Т. В., Станжицький О. М.* Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 512–519.
6. *Добродзій Т. В.* Дослідження задач оптимального керування системами диференціальних рівнянь, лінійних по керуванню, методом усереднення // Укр. мат. вісн. — 2009. — **6**, № 2. — С. 150–172.

Одержано 12.03.09