УДК 517 . 9

НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕТЕРОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ*

С. М. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84112, Славянск Донецкой обл., ул. Г. Батюка, 19

И. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of weakly nonlinear boundary-value Noether problem for a system of ordinary differential equations in the critical case.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків слабконелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решения $z(t,\varepsilon)\,:\,z(t,\cdot)\in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$ краевой задачи $[1, 2]$

$$\frac{dz}{dt}=A(t)z+f(t)+\varepsilon Z(z,t,\varepsilon),\quad \ell z(\cdot,\varepsilon)=\alpha+\varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Решение задачи (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt}=A(t)z_0+f(t),\quad \ell z_0(\cdot)=\alpha,\quad \alpha\in R^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n\times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot)\,:\,C[a,b]\to R^m$. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нетеровой $(m\neq n)$ задачи (1) предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Исследован критический случай $(P_{Q^*}\neq 0)$, причем предполагается выполненным условие

$$P_{Q_d^*}\{\alpha-\ell K[f(s)](\cdot)\}=0; \tag{3}$$

в этом случае порождающая задача (2) имеет $(r=n-n_1)$-параметрическое семейство решений $z_0(t,c_r)=X_r(t)c_r+G[f(s);\alpha](t),\ c_r\in R^r$. Здесь $X(t)$ — нормальная $(X(0)=I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (2), $Q=\ell X(\cdot)$ — $(m\times n)$-матрица,

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; № GZ: 436 UKR 13/103/0 – 1) и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (№ 0109U000381).

$\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_d(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_d} — $(n \times d)$-матрица, составленная из $d = m - n_1$ линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : R^n \to N(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(r \times d)$-матрица, составленная из $d = m - n_1$ линейно независимых строк $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_{Q^*} : R^n \to N(Q^*)$,

$$G[f(s);\alpha](t) = K[f(s)](t) - X(t)Q^+\ell K[f(s)](\cdot)$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K[f(s)](t) = X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (3), Q^+ – псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1 – 3].

2. Необходимые условия существования решения. Необходимые условия существования решения $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$ исходной задачи (1) в критическом случае определяет следующая лемма [1, 2].

Лемма. *Пусть краевая задача (1) представляет критический* ($P_{Q^*} \neq 0$) *случай и выполнено условие (3) разрешимости порождающей задачи (2). Предположим также, что задача (1) имеет решение, обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в порождающее* $z_0(t,c_r^*)$. *Тогда вектор* $c_r^* \in R^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot,c_r),0) - \ell K[Z(z_0(s,c_r),s,0)](\cdot)\} = 0. \tag{4}$$

Предположим, что уравнение (4) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_r^* \in R^r$ уравнения (4), приходим к задаче об отыскании решения $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$ задачи (1) в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s);\alpha](t)$. Возмущение $x(t,\varepsilon)$ определяет краевая задача

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \quad \ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{5}$$

В окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$ имеет место следующее представление:

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + \\ + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

где

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \quad A_2(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Аналогично выделяем линейную часть $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ по x и линейную часть $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))$ по ε функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, а также член $J(z_0(\cdot,c_r^*),0)$ нулевого порядка ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Обозначая через

$$B_0 = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\}$$

постоянную $(d \times r)$-матрицу, приходим к операторной системе, равносильной задаче о нахождении решений задачи (5):

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$B_0 c_r = - P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$- \ell K\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}, \qquad (6)$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right](t).$$

Для построения решения краевой задачи (5) в критическом случае традиционно [1, 4] используется условие $P_{B_0^*} = 0$, гарантирующее разрешимость второго уравнения операторной системы (6); здесь $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-матрица-ортопроектор: $R^d \to N(B_0^*)$. Как показано в статье [5], существуют краевые задачи, для которых условие $P_{B_0^*} = 0$ не выполняется.

3. Достаточное условие. Для упрощения выкладок в случае $P_{B_0^*} \neq 0$ предположим, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}x\right]\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}x\right]\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = 0.$$

В этом случае в малой выпуклой окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$ имеют место разложения [6]

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) +$$
$$+ \varepsilon^2 A_3(t) + \varepsilon A_4(t)x(t,\varepsilon) + R_2(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \qquad (7)$$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$
$$+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 x(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad (8)$$

где

$$A_3(t) = \frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{2\partial\varepsilon^2}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \quad A_4(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}$$

— соответственно $(n \times 1)$- и $(n \times n)$-матрицы,

$$\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{2\partial\varepsilon^2}\Bigg|_{\substack{z=z_0\\ \varepsilon=0}}, \quad \ell_4 x(\cdot,\varepsilon) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0\\ \varepsilon=0}}$$

— линейные векторные функционалы.

Частное решение задачи (5) представимо в виде

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](t) + x^{(2)}(t,\varepsilon).$$

Здесь

$$x^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[A_1(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon A_4(s)x(s,\varepsilon) +$$

$$+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\ \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+ \varepsilon\ell_4 x(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t).$$

Обозначим через

$$B_1 = P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{\ell_1 G_1(\cdot) + \ell_4 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)G_1(s) + A_4(s)X_r(s)](\cdot)\}$$

$(d\times r)$-мерную матрицу. При условии

$$F_1(c_r^*) := P_{Q_d^*}\{\ell_1 G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0](\cdot) + \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) -$$

$$- \ell K[A_1(s)G[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s) + A_2(s)](\cdot)\} = 0$$

решение $c_r = c_r^{(0)} + c_r^{(1)}$, $c_r^{(1)} \in N(B_0)$, второго уравнения операторной системы (6) определяется равенством

$$c_r^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{\ell_1 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 x(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell K[A_1(s)x^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)x(s,\varepsilon) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\}$$

и уравнением

$$\varepsilon B_1 c_r^{(1)} = -P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{\ell_1 x^{(3)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_4 X_r(\cdot)c_r^{(0)} +$$

$$+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](\cdot) +$$

$$+ \varepsilon\ell_4[\varepsilon G_1(\cdot)c_r^{(1)} + x^{(3)}(\cdot,\varepsilon)] + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell K\{A_1(s)x^{(3)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_4(s)X_r(s)c_r^{(0)} +$$

$$+ \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)G[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s) +$$

$$+ \varepsilon A_4(s)[\varepsilon G_1(s)c_r^{(1)} + x^{(3)}(s,\varepsilon)] + R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\}(\cdot)\}, \qquad (9)$$

разрешимость которого гарантирует разрешимость операторной системы (6). Уравнение (9) разрешимо при условии $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$, где $P_{B_1^*} : R^d \to N(B_1^*)$ — матрица-ортопроектор.

Таким образом, в случае

$$P_{B_0^*} \neq 0, \quad P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0 \tag{10}$$

краевая задача (5) имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)(c_r^{(0)} + c_r^{(1)}) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](t) + x^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G_1(t)c_r^{(1)} + x^{(3)}(t,\varepsilon), \quad G_1(t) = G[A_1(s)X_r(s);\ \ell_1 X_r(\cdot)](t),$$

$$\begin{aligned} x^{(3)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\{&A_1(s)[X_r(s)c_r^{(0)} + x^{(1)}(s,\varepsilon)] + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s) + \\ &+ \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_r^{(0)} + x^{(1)}(s,\varepsilon)] + R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); \\ &\ell_1[X_r(\cdot)c_r^{(0)} + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)c_r^{(0)} + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \\ &+ \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}(t), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} c_r^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{&\ell_1 x^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \\ &+ \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)c_r + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ &- \ell K[A_1(s)x^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)] + \\ &+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon c_r^{(1)}(\varepsilon) = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\{&\ell_1 x^{(3)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_4 X_r(\cdot)c_r^{(0)} + \\ &+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](\cdot) + \\ &+ \varepsilon\ell_4[\varepsilon G_1(\cdot)c_r^{(1)} + x^{(3)}(\cdot,\varepsilon)] + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ &- \ell K\{A_1(s)x^{(3)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_4(s)X_r(s)c_r^{(0)} + \\ &+ \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)G[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s) + \\ &+ \varepsilon A_4(s)[\varepsilon G_1(s)c_r^{(1)} + x^{(3)}(s,\varepsilon)] + R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\}(\cdot)\}. \end{aligned}$$

Для построения приближенного решения операторной системы (11) в случае (10) и $F_1(c_r^*) = 0$ применим метод простых итераций [1, 5]. Первое приближение к решению операторной системы (11) ищем, как решение задачи первого приближения

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1 + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0), \quad \ell x_1(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0).$$

Существование решения задачи первого приближения

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](t)$$

гарантирует равенство (4). Второе приближение к решению операторной системы (11) ищем, как решение задачи второго приближения

$$\frac{dx_2}{dt} = A(t)x_2 + \varepsilon\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t)\},$$

$$\ell x_2(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)\}.$$

Существование решения задачи второго приближения

$$x_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_1} + x_2^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_2^{(2)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_2^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\{A_1(s)x_1(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s);\ \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)\}(t),$$

обеспечивает условие $F_1(c_r^*) = 0$. Третье приближение к решению операторной системы (11) ищем, как решение

$$\begin{aligned}
x_3(t,\varepsilon) &= X_r(t)c_{r_2} + x_3^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_3^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_3^{(2)}(t,\varepsilon),\\
x_3^{(2)}(t,\varepsilon) &= \varepsilon G[A_1(s)[X_r(s)c_{r_1} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] +\\
&\quad + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)x_1(s,\varepsilon) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\\
&\quad \ell_1[X_r(\cdot)c_{r_1} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) +\\
&\quad + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t)
\end{aligned}$$

задачи третьего приближения

$$\begin{aligned}
\frac{dx_3}{dt} &= A(t)x_3 + \varepsilon\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)[X_r(t)c_{r_1} + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)] +\\
&\quad + \varepsilon A_2(t) + \varepsilon^2 A_3(t) + \varepsilon A_4(t)x_1(t,\varepsilon) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\},\\
\ell x_3(\cdot,\varepsilon) &= \varepsilon\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1[X_r(\cdot)c_{r_1} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +\\
&\quad + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +\\
&\quad + \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}.
\end{aligned}$$

Условие разрешимости задачи третьего приближения с учетом равенства (4) приводит к уравнению

$$B_0 c_{r_1} = -P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$
$$+ \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K[A_1(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) +$$
$$+ \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)x_1(s,\varepsilon) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\}. \qquad (12)$$

Уравнение (12) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$F_2(c_r^*) := P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$
$$+ \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K[A_1(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) +$$
$$+ \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)x_1(s,\varepsilon) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\} = 0.$$

Таким образом, равенство $F_2(c_r^*) = 0$ представляет собой необходимое и достаточное условие разрешимости задачи третьего приближения. Предположим, что это равенство выполняется. В этом случае общее решение $c_{r_1} = c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}$ уравнения (12) определяет вектор

$$c_{r_1}^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$
$$+ \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K[A_1(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) +$$
$$+ \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)x_1(s,\varepsilon) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\}$$

и произвольная величина $c_{r_1}^{(1)} \in N(B_0)$. Четвертое приближение к решению операторной системы (11) ищем, как решение

$$x_4(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_3} + x_4^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_4^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_4^{(2)}(t,\varepsilon)$$

краевой задачи четвертого приближения

$$\frac{dx_4}{dt} = A(t)x_4 + \varepsilon\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)[X_r(t)c_{r_2} + x_3^{(1)}(t,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon A_2(t) + \varepsilon^2 A_3(t) + \varepsilon A_4(t)x_2(t,\varepsilon) + R_2(z_0(t,c_r^*) + x_2^{(1)}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\},$$
$$\ell x_4(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1[X_r(\cdot)c_{r_2} + x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 x_2(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}.$$

Здесь

$$x_4^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\{A_1(s)[X_r(s)c_{r_2} + x_3^{(1)}(s,\varepsilon)] + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s) +$$

$$+ \varepsilon A_4(s)[X_r(s)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon);$$

$$\ell_1[X_r(\cdot)c_{r_2} + x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+ \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}(t).$$

Условие разрешимости задачи четвертого приближения с учетом равенства (4) и требования $F_1(c_r^*) = 0$ приводит к уравнению

$$B_0 c_{r_2} = -P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_3^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+ J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\{A_1(s)x_3^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) +$$

$$+ \varepsilon A_4(s)[X_r(s)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\}. \tag{13}$$

Уравнение (13) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_3^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+ J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\{A_1(s)x_3^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) +$$

$$+ \varepsilon A_4(s)[X_r(s)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\} = 0. \tag{14}$$

При условии (10) общее решение $c_{r_2} = c_{r_2}^{(0)} + c_{r_2}^{(1)}$ уравнения (13) определяет вектор

$$c_{r_2}^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_3^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$

$$+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell K\{A_1(s)x_3^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$

$$+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\}$$

и произвольная величина $c_{r_2}^{(1)} \in N(B_0)$. С учетом разложения $c_{r_1} = c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}$ решения уравнения (12) частное решение краевой задачи третьего приближения принимает вид

$$x_3^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](t) + x_3^{(2)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_3^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G_1(t)c_{r_1}^{(1)} + x_3^{(3)}(t,\varepsilon), \quad G_1(t) = G[A_1(s)X_r(s);\ \ell_1 X_r(\cdot)](t),$$

$$x_3^{(3)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\{A_1(s)[X_r(s)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s) +$$
$$+ \varepsilon A_4(s) x_1(s,\varepsilon) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon), s, \varepsilon);$$
$$\ell_1[X_r(\cdot)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon \ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$
$$+ \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}(t).$$

Из условия разрешимости (14) получаем уравнение

$$\varepsilon B_1 c_{r_1}^{(1)} = -P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_3^{(3)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon \ell_4[X_r(\cdot)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$- \ell K\{A_1(s)x_3^{(3)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$
$$+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\},$$

разрешимое при условии $P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0$; здесь $P_{B_1^*}$ — ортопроектор матрицы B_1^* :

$$P_{B_1^*} : \ R^d \to N(B_1^*).$$

Уравнение (9) при условии $P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0$ имеет по меньшей мере одно решение

$$\varepsilon c_{r_1}^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_3^{(3)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon \ell_4[X_r(\cdot)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$- \ell K\{A_1(s)x_3^{(3)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$
$$+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\}.$$

Дальнейшие итерации по форме не отличаются от найденного на четвертом шаге второго приближения. Полученная итерационная процедура применима для построения решений задачи (1) в случае $P_{B_0^*} \neq 0$, $P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0$. При ее построении использованы условия $F_1(c_r^*) = 0$, $F_2(c_r^*) = 0$, которые обобщают соответствующие требования (6.74) из монографии [2] на случай

$$F_1(c_r^*) = 0, \quad F_2(c_r^*) = 0, \quad A_2(t) \not\equiv 0, \quad A_3(t) \not\equiv 0, \quad \ell_2 x(\varepsilon,\cdot) \neq 0, \quad \ell_3 x(\varepsilon,\cdot) \neq 0.$$

Для проверки условий $F_1(c_r^*) = 0$ и $F_2(c_r^*) = 0$ достаточно информации про решение порождающей задачи (2). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть для краевой задачи (1) имеет место критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие (3) разрешимости порождающей задачи (2). Тогда для каждого корня $c_r^* \in R^r$ уравнения (4) при условии (10) и $F_1(c_r^*) = 0$ задача (5) имеет по меньшей* *мере одно решение, определяемое операторной системой (11) и при $\varepsilon = 0$ обращающееся в нулевое: $x(t,0) \equiv 0$. При условии $F_2(c_r^*) = 0$ это решение может быть найдено с помощью итерационной процедуры*

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);\ J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](t);$$

$$x_2(t,\varepsilon) = X_r(t)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_2^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$x_2^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\{A_1(s)x_1(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s);\ \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)\}(t),$$

$$\begin{aligned} c_{r_1}^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{&\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \\ &+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ &- \ell K[A_1(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s + \varepsilon A_4(s)x_1(s,\varepsilon)) + \\ &+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon c_{r_1}^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\{&\ell_1 x_3^{(3)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \\ &+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ &- \ell K\{A_1(s)x_3^{(3)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] + \\ &+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\}(\cdot)\}; \end{aligned}$$

$$x_3(t,\varepsilon) = X_r(t)(c_{r_2}^{(0)} + c_{r_2}^{(1)}) + x_3^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x_3^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_3^{(2)}(t,\varepsilon), \quad x_3^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G_1(t)c_{r_1}^{(1)} + x_3^{(3)}(t,\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} x_3^{(3)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\{&A_1(s)[X_r(s)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s) + \\ &+ \varepsilon A_4(s)x_1(s,\varepsilon) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon); \\ &\ell_1[X_r(\cdot)c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \\ &+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{r_2}^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{&\ell_1 x_3^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \\ &+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ &- \ell K\{A_1(s)x_3^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)(c_{r_1}^{(0)} + c_{r_1}^{(1)}) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] + \\ &+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\}(\cdot)\}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon c_{r_2}^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \{\ell_1 x_4^{(3)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon \ell_4 [X_r(\cdot) c_{r_2}^{(0)} + x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell K\{A_1(s) x_4^{(3)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s) c_{r_2}^{(0)} + x_3^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$
$$+ R_2(z_0(s, c_r^*) + x_3^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\};$$

$$x_4(t,\varepsilon) = X_r(t)(c_{r_3}^{(0)} + c_{r_3}^{(1)}) + x_4^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_4^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_4^{(2)}(t,\varepsilon),$$
$$x_4^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G_1(t) c_{r_2}^{(1)} + x_4^{(3)}(t,\varepsilon),$$

$$x_4^{(3)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\{A_1(s)[X_r(s) c_{r_2}^{(0)} + x_3^{(1)}(s,\varepsilon)] + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s) +$$
$$+ \varepsilon A_4(s)[X_r(s) c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)] + R_2(z_0(s, c_r^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon);$$
$$\ell_1[X_r(\cdot) c_{r_2}^{(0)} + x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon \ell_4[X_r(\cdot) c_{r_1}^{(0)} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\}(t),$$

$$c_{r_3}^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \{\ell_1 x_4^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) +$$
$$+ \varepsilon \ell_4[X_r(\cdot)(c_{r_2}^{(0)} + c_{r_2}^{(1)}) + x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell K\{A_1(s) x_4^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)(c_{r_2}^{(0)} + c_{r_2}^{(1)}) + x_3^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon^2 A_3(s) + R_2(z_0(s, c_r^*) + x_3^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\},$$

$$\varepsilon c_{r_3}^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \{\ell_1 x_5^{(3)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon \ell_4 [X_r(\cdot) c_{r_3}^{(0)} + x_4^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x_4^{(1)}(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell K\{A_1(s) x_5^{(3)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s) c_{r_3}^{(0)} + x_4^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$
$$+ R_2(z_0(s, c_r^*) + x_4^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\};$$

. . . .

$$x_{k+3}(t,\varepsilon) = X_r(t)(c_{r_{k+2}}^{(0)} + c_{r_{k+2}}^{(1)}) + x_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon), \qquad (15)$$

$$x_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_{k+3}^{(2)}(t,\varepsilon), \quad x_{k+3}^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G_1(t) c_{r_{k+1}}^{(1)} + x_{k+3}^{(3)}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+3}^{(3)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\{A_1(s)[X_r(s)c_{r_{k+1}}^{(0)} + x_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon)] + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s) +$$

$$+ \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_{r_k}^{(0)} + x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon)] + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon), s, \varepsilon);$$

$$\ell_1[X_r(\cdot)c_{r_{k+1}}^{(0)} + x_{k+2}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)c_{r_k}^{(0)} + x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$

$$+ \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}(t),$$

$$c_{r_{k+2}}^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_{k+3}^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+ \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)c_{r_{k+1}} + x_{k+2}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+2}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell K\{A_1(s)x_{k+3}^{(2)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_{r_{k+1}} + x_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$

$$+ \varepsilon^2 A_3(s) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\}(\cdot)\},$$

$$\varepsilon c_{r_{k+2}}^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_{k+4}^{(3)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_4[X_r(\cdot)c_{r_{k+2}}^{(0)} + x_4^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] +$$

$$+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+3}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell K\{A_1(s)x_{k+4}^{(3)}(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_{r_{k+2}}^{(0)} + x_{k+3}^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$

$$+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x_{k+3}^{(1)}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\}(\cdot)\}; \ldots, k = 1,2,3 \ldots.$$

При этом задача (1) имеет по меньшей мере одно решение $z(t,\varepsilon)\ :\ \ z(t,\cdot) \in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее решение* $z_0(t,c_r^*)$, *которое может быть найдено с помощью схемы (15) по формуле*

$$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x_k(t,\varepsilon).$$

В частном случае, когда $P_{B_0}P_{B_1} = 0$, решение задачи (1) единственно. Здесь

$$P_{B_0}:\ R^r \to N(B_0), \quad P_{B_1}:\ R^r \to N(B_1)$$

— $(r \times r)$-матрицы-ортопроекторы. Длина отрезка $[0,\varepsilon_*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [2, 4, 5], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (10), аналогично [7]. Наличие производных

$$A_2(s) \neq 0, \quad A_3(s) \neq 0, \quad \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) \neq 0, \quad \ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) \neq 0,$$

а также условия $F_1(c_r^*) = 0$ и $F_2(c_r^*) = 0$ отличают доказанную теорему от соответствующих теорем [2, с. 193; 3, с. 42].

Пример. Условия (10), $F_1(c_r^*) = 0$ и $F_2(c_r^*) = 0$ выполняются для 2π-периодической задачи для уравнения Матье [2, 4, 5, 8]

$$y'' + (k^2 + \varepsilon h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t)y = 0, \quad h(\varepsilon) = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \ldots,$$

которая приводится к виду (1) при $k^2 = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z(z,\varepsilon) = \mathrm{col}\, \Big[0, (-h(\varepsilon) - \cos 2t) z^{(a)}\Big], \quad J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0.$$

Поскольку $Q = 0$, имеет место критический случай. Уравнение (4) имеет вид $B_0 c_r = 0$, где

$$B_0 = \pi \begin{bmatrix} 0 & h_0 - \dfrac{1}{2} \\ h_0 + \dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Последнее уравнение имеет нетривиальные решения при условии

$$\det B_0 = h_0^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Положим, для определенности, $h_0 = -\dfrac{1}{2}$; при этом

$$B_0 = \pi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0^+ = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{B_0^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид $c_r = P_{B_0}\hat{c}_r$, $\hat{c}_r \in R^2$. Зафиксируем к примеру

$$c_r^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Порождающему решению

$$z_0(t, c_r^*) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

соответствуют производные

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} - \cos 2t & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -h_1 \cos t \end{bmatrix},$$

$$A_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -h_2 \cos t \end{bmatrix}, \quad A_4(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение

$$z_1(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon}{32} \begin{bmatrix} -\cos t + \cos 3t \\ \sin t - 3\sin 3t \end{bmatrix}$$

задачи первого приближения определяет 2π-периодическая вектор-функция

$$x_1(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32}\begin{bmatrix} -\cos t + \cos 3t \\ \sin t - 3\sin 3t \end{bmatrix}.$$

Условие разрешимости $F_1(c_r^*) = 0$ задачи второго приближения

$$-\frac{\pi\varepsilon}{32}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 + 32h_1 \end{pmatrix} = 0$$

выполняется для $h_1 = -\dfrac{1}{32}$, при этом само второе приближение определяют векторы

$$x_2^{(2)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{768}\begin{bmatrix} 5\cos t - 6\cos 3t + \cos 5t \\ -5\sin t + 18\sin 3t - 5\sin 5t \end{bmatrix}$$

и

$$x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32}\begin{bmatrix} -\cos t + \cos 3t \\ \sin t - 3\sin 3t \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon^2}{768}\begin{bmatrix} 5\cos t - 6\cos 3t + \cos 5t \\ -5\sin t + 18\sin 3t - 5\sin 5t \end{bmatrix}.$$

Условие разрешимости $F_2(c_r^*) = 0$ задачи третьего приближения

$$\frac{\pi\varepsilon^2}{512}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 + 32h_2(\varepsilon - 16) \end{pmatrix} = 0$$

выполняется для

$$h_2 = -\frac{1}{32(\varepsilon - 16)}.$$

Таким образом, найдена функция

$$h(\varepsilon) = -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{32} + \frac{\varepsilon^2}{32(16-\varepsilon)},$$

которая с точностью до ε^2 совпадает с функцией

$$\tilde{h}(\varepsilon) = -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{32} + \frac{\varepsilon^2}{512} + \ldots,$$

полученной в монографии [4, с. 335]. Матрицы

$$B_1 = \frac{\pi}{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1^+ = \frac{32}{\pi}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и ортопроекторы

$$P_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{B_1^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

позволяют проверить выполнение условий $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$ и $P_{B_0}P_{B_1} = 0$, гарантирующих однозначную разрешимость поставленной периодической задачи для уравнения Матье. Векторы

$$c_{r_1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_{r_1}^{(1)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2(\varepsilon - 64)}{768(\varepsilon - 16)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

определяют второе приближение

$$x_2(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} x_2^{(a)}(t,\varepsilon) \\ \\ x_2^{(b)}(t,\varepsilon) \end{bmatrix},$$

где

$$x_2^{(a)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{768(\varepsilon - 16)}(768\varepsilon\cos t - 192\varepsilon^2\cos t + 6\varepsilon^3\cos t -$$
$$- 768\varepsilon\cos 3t + 144\varepsilon^2\cos 3t - 6\varepsilon^3\cos 3t - 16\varepsilon^2\cos 5t + \varepsilon^3\cos 5t)$$

и

$$x_2^{(b)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{768(\varepsilon - 16)}(-768\varepsilon\sin t + 192\varepsilon^2\sin t - 6\varepsilon^3\sin t +$$
$$+ 2\,304\varepsilon\sin 3t - 432\varepsilon^2\sin 3t + 18\varepsilon^3\sin 3t + 80\varepsilon^2\sin 5t - 5\varepsilon^3\sin 5t).$$

Аналогично получаем третье и четвертое приближения

$$x_3(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} x_3^{(a)}(t,\varepsilon) \\ \\ x_3^{(b)}(t,\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad x_4(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} x_4^{(a)}(t,\varepsilon) \\ \\ x_4^{(b)}(t,\varepsilon) \end{bmatrix},$$

где

$$x_3^{(a)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{73\,728(\varepsilon - 16)^2}(-1\,179\,648\varepsilon\cos t + 368\,640\varepsilon^2\cos t -$$
$$- 57\,088\varepsilon^3\cos t + 1\,200\varepsilon^4\cos t + 40\varepsilon^5\cos t + 1\,179\,648\varepsilon\cos 3t -$$
$$- 294\,912\varepsilon^2\cos 3t + 43\,008\varepsilon^3\cos 3t - 2\,496\varepsilon^4\cos 3t + 42\varepsilon^5\cos 3t +$$
$$+ 24\,576\varepsilon^2\cos 5t - 6\,656\varepsilon^3\cos 5t + 544\varepsilon^4\cos 5t - 14\varepsilon^5\cos 5t +$$
$$+ 256\varepsilon^3\cos 7t - 32\varepsilon^4\cos 7t + \varepsilon^5\cos 7t),$$

$$x_3^{(b)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{73\,728(\varepsilon-16)^2}(1\,179\,648\varepsilon\sin t - 368\,640\varepsilon^2\sin t +$$
$$+ 57\,088\varepsilon^3\sin t - 1\,200\,\varepsilon^4\sin t - 40\varepsilon^5\sin t - 3\,538\,944\varepsilon\sin 3t +$$
$$+ 884\,736\varepsilon^2\sin 3t - 129\,024\varepsilon^3\sin 3t + 7\,488\varepsilon^4\sin 3t - 126\varepsilon^5\sin 3t -$$
$$- 122\,880\varepsilon^2\sin 5t + 33\,280\varepsilon^3\sin 5t - 2\,720\varepsilon^4\sin 5t + 70\varepsilon^5\sin 5t -$$
$$- 1\,792\varepsilon^3\sin 7t + 224\varepsilon^4\sin 7t - 7\varepsilon^5\sin 7t),$$

$$x_4^{(a)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{-48\,318\,382\,080 + 9\,059\,696\,640\,\varepsilon - 566\,231\,040\varepsilon^2 + 11\,796\,480\varepsilon^3}\times$$
$$\times (3\,019\,898\,880\varepsilon\cos t - 1\,132\,462\,080\varepsilon^2\cos t + 205\,127\,680\varepsilon^3\cos t -$$
$$- 34\,955\,264\varepsilon^4\cos t + 1\,271\,808\varepsilon^5\cos t + 41\,216\varepsilon^6\cos t - 1\,600\varepsilon^7\cos t -$$
$$- 3\,019\,898\,880\varepsilon\cos 3t + 943\,718\,400\varepsilon^2\cos 3t - 157\,286\,400\varepsilon^3\cos 3t +$$
$$+ 20\,275\,200\varepsilon^4\cos 3t - 1\,146\,880\varepsilon^5\cos 3t + 10\,400\varepsilon^6\cos 3t + 560\varepsilon^7\cos 3t -$$
$$- 62\,914\,560\varepsilon^2\cos 5t + 20\,971\,520\varepsilon^3\cos 5t - 3\,645\,440\varepsilon^4\cos 5t +$$
$$+ 309\,760\varepsilon^5\cos 5t - 11\,680\varepsilon^6\cos 5t + 150\varepsilon^7\cos 5t - 655\,360\varepsilon^3\cos 7t +$$
$$+ 225\,280\varepsilon^4\cos 7t - 26\,880\varepsilon^5\cos 7t + 1\,360\varepsilon^6\cos 7t - 25\varepsilon^7\cos 7t -$$
$$- 4\,096\varepsilon^4\cos 9t + 768\varepsilon^5\cos 9t - 48\varepsilon^6\cos 9t + \varepsilon^7\cos 9t +$$
$$+ 3\,932\,160\pi\varepsilon^4\sin t + 3\,932\,160t\varepsilon^4\sin t - 245\,760\pi\varepsilon^5\sin t - 245\,760t\varepsilon^5\sin t -$$
$$- 15\,360\pi\varepsilon^6\sin t - 15\,360t\varepsilon^6\sin t + 960\pi\varepsilon^7\sin t + 960t\varepsilon^7\sin t),$$

$$x_4^{(b)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{-24\,159\,191\,040 + 4\,529\,848\,320\varepsilon - 283\,115\,520\varepsilon^2 + 5\,898\,240\varepsilon^3}\times$$
$$\times \Big(1\,966\,080\pi\varepsilon^4\cos t + 1\,966\,080t\varepsilon^4\cos t - 122\,880\pi\varepsilon^5\cos t -$$
$$- 122\,880t\varepsilon^5\cos t - 7\,680\pi\varepsilon^6\cos t - 7\,680t\varepsilon^6\cos t + 480\pi\varepsilon^7\cos t +$$
$$+ 480t\varepsilon^7\cos t - 1\,509\,949\,440\varepsilon\sin t + 566\,231\,040\varepsilon^2\sin t -$$
$$- 102\,563\,840\varepsilon^3\sin t + 19\,433\,712\varepsilon^4\sin t - 758\,784\varepsilon^5\sin t - 28\,288\varepsilon^6\sin t +$$
$$+ 1\,280\varepsilon^7\sin t + 4\,529\,848\,320\varepsilon\sin 3t - 1\,415\,577\,600\varepsilon^2\sin 3t +$$
$$+ 235\,929\,600\varepsilon^3\sin 3t - 30\,412\,800\varepsilon^4\sin 3t + 1\,720\,320\varepsilon^5\sin 3t -$$

$$- 15\,600\varepsilon^6 \sin 3t - 840\varepsilon^7 \sin 3t + 157\,286\,400\varepsilon^2 \sin 5t -$$

$$- 52\,428\,800\varepsilon^3 \sin 5t + 9\,113\,600\varepsilon^4 \sin 5t - 774\,400\varepsilon^5 \sin 5t +$$

$$+ 29\,200\varepsilon^6 \sin 5t - 375\varepsilon^7 \sin 5t + 2\,293\,760\varepsilon^3 \sin 7t - 788\,480\varepsilon^4 \sin 7t +$$

$$+ 94\,080\varepsilon^5 \sin 7t - 4\,760\varepsilon^6 \sin 7t + \frac{175}{2}\,\varepsilon^7 \sin 7t + 18\,432\varepsilon^4 \sin 9t -$$

$$- \quad 3\,456\varepsilon^5 \sin 9t + 216\varepsilon^6 \sin 9t - \frac{9}{2}\,\varepsilon^7 \sin 9t \Bigg).$$

Для проверки точности найденных нулевого и первых четырех приближений к периодическому уравнения Матье отметим их периодичность и найдем невязки этих приближений в самом уравнении Матье

$$\Delta_i(\varepsilon) = \left\| y_i''(t, \varepsilon) + (1 + \varepsilon h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t)\, y_i''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Полагая $\varepsilon = 0,1$, находим невязки

$$\Delta_0(\varepsilon) \approx 5,01\,553 \cdot 10^{-2}, \quad \Delta_1(\varepsilon) \approx 8,70\,059 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta_2(\varepsilon) \approx 1,23\,674 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta_3(\varepsilon) \approx 1,73\,609 \cdot 10^{-7},$$

$$\Delta_4(\varepsilon) \approx 8,49\,518 \cdot 10^{-9}.$$

Для $\varepsilon = 0,01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(\varepsilon) \approx 5,00\,156 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta_1(\varepsilon) \approx 8,67\,050 \cdot 10^{-6},$$

$$\Delta_2(\varepsilon) \approx 1,23\,122 \cdot 10^{-8}, \quad \Delta_3(\varepsilon) \approx 1,71\,952 \cdot 10^{-11},$$

$$\Delta_4(\varepsilon) \approx 8,38\,643 \cdot 10^{-14}.$$

Для $\varepsilon = 0,001$ невязки еще меньше:

$$\Delta_0(\varepsilon) \approx 5,00\,016 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta_1(\varepsilon) \approx 8,66\,748 \cdot 10^{-8},$$

$$\Delta_2(\varepsilon) \approx 1,23\,067 \cdot 10^{-11}, \quad \Delta_3(\varepsilon) \approx 1,76\,790 \cdot 10^{-15},$$

$$\Delta_4(\varepsilon) \approx 2,30\,285 \cdot 10^{-16}.$$

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.

2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.

3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.

4. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

5. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 1. — С. 62 – 69.

6. *Чуйко С. М.* Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае // Там же. — 2009. — **61**, № 4. — С. 548 – 562.

7. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2005. — **8**, № 2. — С. 278 – 288.

8. *Boychuk I., Starkova O., Tchujko S.* Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Stud. Univ. Žilina. Math. Stud. — 2009. — **23**, № 1. — P. 1 – 8.

Получено 18.02.09