УДК 517.956

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ТОНКИХ ПЕРФОРОВАНИХ ОБЛАСТЯХ З ШВИДКО ЗМІННОЮ ТОВЩИНОЮ

Т. А. Мельник, А. В. Попов

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: melnyk@imath.kiev.ua
popov24@mail.univ.kiev.ua

A mixed nonuniform boundary-value problem and a spectral Neumann problem are considered for the second-order symmetric elliptic differential operator with quickly oscillating coefficients in a thin perforated domain with rapidly varying thickness. The leading terms of asymptotics are constructed and asymptotic estimates are proved for solutions of these problems. These results were announced in the Reports of the Academy of Sciences of Ukraine, № 10 (1991). New results of this paper are connected with the construction of the asymptotic expansion for the solution to a mixed uniform boundary-value problem under additional assumptions of symmetry for the coefficients of the operator and for the thin perforated domain.

Для симметрического равномерно эллиптического оператора второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами изучено асимптотическое поведение решений смешанной неоднородной краевой задачи и спектральной задачи Неймана в тонкой перфорированной области с быстро переменной толщиной, а также установлены асимптотические оценки для разности между решениями начальных задач и соответствующих усредненных задач. Эти результаты были анонсированы в „Доповідях АН України", 1991, № 10. Новые результаты данной работы связаны с построением асимптотического разложения для решения смешанной однородной краевой задачи при дополнительных предположениях симметрии на коэффициенты оператора и тонкую перфорированную область.

1. Вступ. Крайовим задачам у тонких областях (один із лінійних розмірів такої області значно менший за інші) присвячено велику кількість наукової літератури (див., наприклад, [1–5]). Це можна пояснити широкими можливостями застосування математичних результатів до прикладних задач. Наприклад, всі інженерні конструкції мають своїми елементами тонкі стержні, пластини та оболонки. Разом з тим самі еліптичні крайові задачі в тонких областях досить привабливі для асимптотичного аналізу, оскільки містять природний малий параметр ε — діаметр стержня (товщину пластини). В таких задачах необхідно з максимальною чіткістю виявити специфічні властивості стержнів (пластин) як об'єкта дослідження, а саме, властивості, що пов'язані з малістю товщини тонкої області.

Строгий асимптотичний метод побудови наближень у тонких областях започатковано в роботах А. Л. Гольденвейзера [2, 6], і подальшій його розробці присвячено роботи [1, 3, 4, 7–12], в яких в якості тонких областей розглядались області циліндричного типу. Основна ідея цих досліджень полягала у введенні спеціальної заміни змінних так, щоб розтягнута область не залежала від малого параметра. При цьому малий параметр виникав при старших похідних у відповідних диференціальних рівняннях, а далі застосовувався метод Люстерника – Вишика [13].

В останні роки у зв'язку із розвитком новітніх технологій пористих, композитних та інших мікронеоднорідних матеріалів та біологічних структур зростає інтерес до дослідження крайових задач із швидко змінними коефіцієнтами в тонких областях із швидко змінною товщиною. Такі задачі належать до нового розділу диференціальних рівнянь з частинними похідними — теорії усереднення. Згадані вище асимптотичні методи не підходять до вивчення крайових задач у тонких областях з швидко змінною товщиною.

Методи теорії усереднення для тонких областей уперше було використано в роботі [14] при вивченні тривимірної задачі теорії пружності в неоднорідній тонкій циліндричній пластині. У 1991 р. в роботі [15] було запропоновано підхід до вивчення еліптичних та спектральних задач у тонких перфорованих областях із швидко змінною товщиною. Дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків різних крайових задач у тонких областях із швидко змінною товщиною присвячено роботи [12, 16, 17].

У роботі [10] було виявлено тотожність процедури усереднення еліптичних крайових задач із швидко осцилюючими коефіцієнтами в тонких квазішарах циліндричного типу в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ (не виключався випадок всього простору $\mathbb{R}^n$, перфорованого малими отворами) і побудови канонічної системи жорданових ланцюжків поліноміальних еліптичних жмутків. З допомогою цієї побудови було досліджено основні характеристики усереднених операторів (розміри, порядки елементів, еліптичність та формальна самоспряженість). Однак, як вказано в самій роботі (с. 3–5), цей метод не спрощує процедуру усереднення і при обґрунтуванні асимптотики необхідно вводити три групи обмежень, які звужують сферу застосування цих результатів.

У даній роботі детально викладено результати роботи [15] (пункти 2 та 3) та отримано нові результати (пункт 4), що пов'язані з побудовою асимптотичних розвинень та їх обґрунтувань для розв'язків еліптичних крайових у тонких перфорованих областях із швидко змінною товщиною.

1.1. Опис тонкої перфорованої області. Нехай $h_-(\xi')$, $h_+(\xi')$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, — гладкі, додатні та 1-періодичні за всіма змінними функції. Розглянемо область

$$\omega = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \, -h_-(\xi') < \xi_n < h_+(\xi'), \quad 0 < \xi_i < 1, \quad i = 1, \ldots, n-1\}.$$

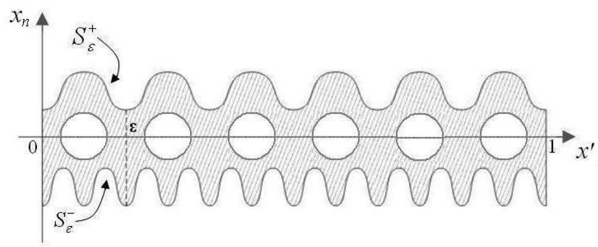
Нехай T_0 — скінченна сім'я замкнених областей класу $C^{2,\alpha}$, які належать ω і не перетинаються між собою. Введемо такі позначення: $\omega_0 = \omega \setminus T_0$, $T_0^\varepsilon = \varepsilon \cdot T_0 = \{x : \varepsilon^{-1} x \in T_0\}$, $T^\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{z}_0 \in \mathbb{Z}^n} \big(T_0^\varepsilon + \varepsilon \mathbf{z}_0\big)$, де $\mathbf{z}_0 = (z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)$ — вектори з цілочисельними компонентами, а ε — малий додатний параметр.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^{n-1}$, $\partial\Omega \in C^3$. Розглянемо модельну тонку перфоровану область $\Omega_\varepsilon = Q_\varepsilon \setminus T^\varepsilon$ (див. рисунок), де

$$Q_\varepsilon = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega, \quad -\varepsilon\, h_-\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) < x_n < \varepsilon\, h_+\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right\}.$$

Не зменшуючи загальності і для уникнення в подальшому додаткових технічних обчислень будемо вважати, що ∂T_ε не перетинається з $\partial\Omega$. Частини межі області Ω_ε позначимо так:

$$S_\varepsilon^\pm = \left\{ x : \; x' \in \Omega, x_n = \pm\varepsilon\, h_\pm\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right\}, \quad G_\varepsilon = \partial T_\varepsilon \cap Q_\varepsilon, \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \left(S_\varepsilon^\pm \cup Q_\varepsilon\right).$$



Модельна тонка область Ω_ε

Очевидно, що область Ω_ε не є циліндричною. Зауважимо, що в роботі [15] розглядалась більш складна структура тонкої перфорованої області.

2. Усереднення та побудова коректора для еліптичних крайових задач. Нехай

$$L_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

— симетричний, рівномірно еліптичний диференціальний оператор, тобто для будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^n$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_{ij}(\xi) = a_{ji}(\xi)$, та існують сталі $\chi_1 > 0$ і $\chi_2 > 0$ такі, що

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \ \forall \eta \in \mathbb{R}^n : \ \chi_1 |\eta|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi)\eta_i\eta_j \le \chi_2 |\eta|^2.$$

В області Ω_ε розглянемо задачу

$$\begin{aligned}
&L_\varepsilon(u_\varepsilon) = f_\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\
&\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad G_\varepsilon \quad \text{(межі порожнин)}, \\
&\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon g_\varepsilon^\pm \quad \text{на} \quad S_\varepsilon^\pm \quad \text{(верхня та нижня частини межі)}, \\
&u_\varepsilon = \varphi_0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon \quad \text{(вертикальна частина межі)},
\end{aligned} \tag{1}$$

де $\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x/\varepsilon)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,\nu_i\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ — похідна по конормалі, $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — зовнішня одинична нормаль до $\partial\Omega_\varepsilon$. Коефіцієнти рівнянь і дані задачі — дійсні функції, які задовольняють умови $a_{ij}(\xi)$, $f(x', \xi)$, $g^\pm(x', \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, — 1-періодичні за змінними $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$; $a_{ij} \in C^{1,\alpha}$; f та $g^\pm$ мають неперервні похідні першого порядку по x', які, як і самі функції, належать відповідно до $C^{0,\alpha}$, $C^{1,\alpha}$ по змінній ξ рівномірно відносно x'; $\varphi_0 \in H^3(\Omega)$; $f_\varepsilon = f(x', x/\varepsilon)$, $g_\varepsilon^\pm = g^\pm(x', x/\varepsilon)$.

Така задача описує стаціонарні процеси в сильно неоднорідних тонких перфорованих середовищах і мета дослідження — вивчити асимптотичну поведінку розв'язку u_ε задачі (1) при $\varepsilon \to 0$; при цьому область Ω_ε сингулярно вироджується.

Під узагальненим розв'язком задачі (1) при фіксованому ε будемо розуміти функцію $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ таку, що $u_\varepsilon = \varphi_0$ на Γ_ε, тобто $u_\varepsilon - \varphi_0 \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \ v|_{\Gamma_\varepsilon} = 0\}$, і для довільної функції $\psi \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ має місце тотожність

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_i}u_\varepsilon \partial_{x_j}\psi\, dx = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \psi\, dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^\pm} g_\varepsilon^\pm \psi\, d\sigma_x.$$

Тут і далі за індексами i, j, які повторюються в деякому виразі, проводиться підсумовування від 1 до n.

2.1. Допоміжні нерівності. Так само, як у [18] (гл. I, § 4.2]), будуємо оператори продовження $\mathcal{P}_0 : H^1(\omega_0) \mapsto H^1(\omega)$ і $\mathcal{P}_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \mapsto H^1(Q_\varepsilon)$ такі, що $\mathcal{P}_0 u = u$, $\mathcal{P}_\varepsilon u = u$, якщо $u = \mathrm{const}$, та

$$\begin{gathered}\|\mathcal{P}_0 u\|_{H^1(\omega)} \le c_1 \|u\|_{H^1(\omega_0)}, \quad \|\nabla_\xi \mathcal{P}_0 u\|_{L^2(\omega)} \le c_1 \|\nabla_\xi u\|_{L^2(\omega_0)} \quad \forall u \in H^1(\omega_0), \\ \|\mathcal{P}_\varepsilon u\|_{H^1(Q_\varepsilon)} \le c_2 \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \|\nabla_x \mathcal{P}_\varepsilon u\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \le c_2 \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall\, u \in H^1(\Omega_\varepsilon).\end{gathered} \tag{2}$$

Тут і далі всі сталі $c_1, c_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$ не залежать від u та ε.

Покажемо, що стала в нерівності Фрідрікса для функцій з простору $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ не залежить від ε. Оскільки $\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le \|\mathcal{P}_\varepsilon u\|_{L^2(Q_\varepsilon)}$, ввівши позначення $v = \mathcal{P}_\varepsilon u$ (очевидно, що $v_{|\partial\Omega} = 0$) і розбивши область Q_ε гіперплощиною $\{x_n = 0\}$ на дві частини, отримаємо

$$\int\limits_\Omega \int\limits_0^{\varepsilon h_+(x'/\varepsilon)} v^2(x)\, dx_n dx' = \int\limits_0^\varepsilon \int_\Omega v^2 \left(x', y_n h_+ \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\right) h_+ \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx' dy_n \le$$

$$\le C_1 \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n-1} \left(\partial_{x_i} v + \frac{y_n}{\varepsilon} \frac{\partial h_+}{\partial \xi_i} \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \partial_{x_n} v\right)^2 dx'\, dy_n \le$$

$$\le C_2 \int\limits_\Omega \int\limits_0^{\varepsilon h_+(x'/\varepsilon)} |\nabla_x v(x)|^2\, dx,$$

де стала C_2 залежить тільки від області Ω і від максимуму функції h_+ та максимуму $|\nabla_{\xi'} h_+(\xi')|$. Таким чином, за попередніми нерівностями для всіх функцій $u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le C_3 \|\nabla_x \mathcal{P}_\varepsilon u\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \le C_4 \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \tag{3}$$

Оцінимо тепер норму сліду функції u на $S_\varepsilon^\pm$. Очевидно, що слід цієї функції на $S_\varepsilon^\pm$ збігається з слідом її продовження $\mathcal{P}_\varepsilon u$ на область Q_ε. Тоді

$$u\left(x', \varepsilon h_+ (\frac{x'}{\varepsilon})\right) = \int\limits_{x_n}^{\varepsilon h_+(x'/\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{P}_\varepsilon u(x', x_n)}{\partial x_n}\, dx_n + u(x), \quad x_n \in \left(0, \varepsilon h_+ \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\right).$$

Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрата та зінтегруємо по $\left(0, \varepsilon h_+ \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\right)$. Потім домножимо отриману рівність на відповідний елемент поверхні S_ε^+ і зінтегруємо по Ω. В результаті отримаємо $\|u\|^2_{L^2(S_\varepsilon^+)} \le c_1 \varepsilon^{-1} \|\mathcal{P}_\varepsilon u\|^2_{H^1(Q_\varepsilon)}$. Аналогічні обчислення виконаємо для поверхні S_ε^-. Таким чином, на підставі властивостей оператора продовження $\mathcal{P}_\varepsilon$ одержуємо

$$\|u\|_{L^2(S_\varepsilon^\pm)} \le c_2 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall\, u \in H^1(\Omega_\varepsilon). \tag{4}$$

Тепер оцінимо слід функції u на G_ε. Позначимо через I_ε множину таких $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{Z}^n$, $z_n = 0$, що $Q_\varepsilon \cap (T_0^\varepsilon + \varepsilon \mathbf{z}_0) \neq \varnothing$. Тоді, беручи до уваги той факт, що $\|\phi\|_{L^2(\partial T_0)} \leq c_1 \|\phi\|_{H^1(\omega_0)}$ для всіх $\phi \in H^1(\omega_0)$, маємо

$$\|u\|^2_{L^2(G_\varepsilon)} = \sum_{\mathbf{z}_0 \in I_\varepsilon} \|u\|^2_{L^2(\varepsilon \partial T_0^\varepsilon + \varepsilon \mathbf{z}_0)} = \varepsilon^{n-1} \sum_{\mathbf{z}_0 \in I_\varepsilon} \int\limits_{\partial T_0^\varepsilon + \mathbf{z}_0} u^2(\varepsilon \xi)\, d\sigma_\xi \leq$$

$$\leq \varepsilon^{n-1} c_2 \sum_{\mathbf{z}_0 \in I_\varepsilon} \|u(\varepsilon\xi)\|^2_{H^1(\omega_0 + \mathbf{z}_0)} \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{\mathbf{z}_0 \in I_\varepsilon} \left(\varepsilon^{-1} \|u\|^2_{L^2(\varepsilon\omega_0 + \varepsilon \mathbf{z}_0)} + \varepsilon \|\nabla_x u\|^2_{L^2(\varepsilon\omega_0 + \varepsilon \mathbf{z}_0)} \right) \leq c_3 \varepsilon^{-1} \|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Зрозуміло, що при деяких $\mathbf{z}_0 \in I_\varepsilon$ потрібно брати не всю область $\varepsilon\omega_0 + \varepsilon \mathbf{z}_0$, а деяку її частину, яка належить Ω_ε. Отже,

$$\|u\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq c_3 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon). \tag{5}$$

Використовуючи нерівності (3) – (5), стандартним підходом доводимо існування та єдиність розв'язку задачі

$$\begin{aligned} & L_\varepsilon(u_\varepsilon) = f_\varepsilon + \partial_{x_i} f_i^{(\varepsilon)} \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ & \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon \psi_0 + f_i^{(\varepsilon)}\, \nu_i \quad \text{на} \quad G_\varepsilon, \\ & \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon g_\varepsilon^\pm + f_i^{(\varepsilon)}\, \nu_i \quad \text{на} \quad S_\varepsilon^\pm, \\ & u_\varepsilon = \varphi_0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \end{aligned} \tag{6}$$

де $f_i^{(\varepsilon)} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $\psi_0 \in L^2(G_\varepsilon)$, і оцінку

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c_1 \Bigg(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \sum_{i=1}^n \|f_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\ + \sqrt{\varepsilon} \left(\|g_\varepsilon^\pm\|_{L^2(S_\varepsilon^\pm)} + \|\psi_0\|_{L^2(G_\varepsilon)} \right) + \|\varphi_0\|_{H^1(\Omega)} \Bigg). \tag{7}$$

Очевидно, що відповідна оцінка має місце для розв'язку задачі (1).

2.2. Усереднена задача. Розглянемо задачу: знайти 1-періодичну за змінними $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$

функцію N таку, що

$$
\begin{aligned}
& L_{\xi\xi} N(\xi) = F_0(\xi) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} F_i(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \\
& \sigma_\xi(N(\xi)) = \Phi_0^{\pm}(\xi) + \sum_{i=1}^{n} F_i(\xi)\nu_i(\xi), \quad \xi \in S^{\pm}, \\
& \sigma_\xi(N(\xi)) = \Phi_1(\xi) + \sum_{i=1}^{n} F_i(\xi)\nu_i(\xi), \quad \xi \in \partial T_0, \\
& \partial_{\xi_i}^{\beta} N(\xi)\Big|_{\xi_i=0} = \partial_{\xi_i}^{\beta} N(\xi)\Big|_{\xi_i=1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \beta = 0, 1, \quad \xi \in \Gamma, \\
& \langle N \rangle_{\omega_0} = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Тут

$$
L_{\xi\xi}(N) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(\xi)\frac{\partial N}{\partial \xi_j}\right), \quad \sigma_\xi(N) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi)\frac{\partial N}{\partial \xi_j}\nu_i(\xi), \quad \langle N \rangle_{\omega_0} = \frac{1}{|\omega_0|}\int\limits_{\omega_0} N(\xi)\, d\xi,
$$

$(\nu_1(\xi), \ldots, \nu_n(\xi))$ — зовнішня одинична нормаль до $\partial\omega_0$, $|\omega_0|$ — міра Лебега області ω_0, $\{F_0, F_1, \ldots, F_n\} \subset L^2(\omega_0)$, $S^{\pm} = \{\xi : \xi' \in [0,1]^{n-1}, \xi_n = \pm h_{\pm}(\xi')\}$, $\Phi_0^{\pm} \in L^2(S^{\pm})$, $\Phi_1 \in \in L^2(\partial T_0)$, $\Gamma = \partial\omega_0 \setminus (S^{\pm} \cup \partial T_0)$.

Означення 2.1. *Функція $N \in H_{\sharp}^1(\omega_0)$ називається узагальненим розв'язком задачі (8), якщо для довільної функції $\psi \in H_{\sharp}^1(\omega_0)$*

$$
\int\limits_{\omega_0} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial N}{\partial \xi_j}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} d\xi = -\int\limits_{\omega_0} F_0 \psi d\xi + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\omega_0} F_i \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} d\xi + \int\limits_{\partial T_0} \Phi_1 \psi d\sigma + \int\limits_{S^{\pm}} \Phi_0^{\pm} \psi d\sigma, \tag{9}
$$

де $H_{\sharp}^1(\omega_0)$ — підпростір функцій з $H^1(\omega_0)$, які 1-періодичні за змінними $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Згідно з теоремою 1 [19, с. 339], задача (8) має єдиний узагальнений розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$
\int\limits_{\omega_0} F_0(\xi) d\xi = \int\limits_{S^+} \Phi_0^+(\xi)\, d\sigma + \int\limits_{S^-} \Phi_0^-(\xi)\, d\sigma + \int\limits_{\partial T_0} \Phi_1(\xi)\, d\sigma. \tag{10}
$$

Крім того, має місце оцінка

$$
\|N\|_{H^1(\omega_0)} \le C\left(\sum_{i=0}^{n} \|F_i\|_{L^2(\omega_0)} + \|\Phi_1\|_{L^2(\partial T_0)} + \left\|\Phi_0^{\pm}\right\|_{L^2(S^{\pm})}\right),
$$

де стала C не залежить від N, $\{F_i\}$, $\Phi_0^{\pm}$, Φ_1.

Визначимо узагальнені розв'язки $N_p \in H^1_\sharp(\omega_0)$, $p = 1, \ldots, n-1$, задач

$$\begin{aligned} &L_{\xi\xi}(N_p(\xi)) = -\partial_{\xi_i} a_{ip}(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \\ &\sigma_\xi(N_p(\xi)) = -a_{ip}(\xi)\nu_i(\xi), \quad \xi \in S^\pm \cup \partial T_0, \\ &\langle N_p \rangle_{\omega_0} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Очевидно, що умова розв'язності (10) для таких задач має місце.

З допомогою цих функцій визначимо диференціальний оператор

$$\widehat{L} = \sum_{p,q=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\widehat{a}_{pq}\frac{\partial}{\partial x_p}\right), \quad \widehat{a}_{pq} = \left\langle a_{pq} + \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\frac{\partial N_p}{\partial \xi_j}\right\rangle_{\omega_0}, \quad p, q = \overline{1, n-1}. \tag{12}$$

Як і в теоремі 1 [19, с. 124], перевіряємо, що коефіцієнти цього оператора задовольняють умови симетрії та еліптичності. Такий диференціальний оператор називається усередненим диференціальним оператором для оператора L_ε.

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &\widehat{L}(u_0(x')) = \widehat{F}(x'), \quad x' \in \Omega, \\ &u_0(x') = \varphi_0(x'), \quad x' \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\widehat{F}(x') = \langle f(x', \cdot)\rangle_{\omega_0} - \frac{1}{|\omega_0|}\left(\int\limits_{S_0^+} g^+(x', \xi)\, dS_\xi + \int\limits_{S_0^-} g^-(x', \xi)\, dS_\xi\right).$$

Лема 2.1. *Для будь-якої функції $u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ при достатньо малих значеннях параметра ε має місце нерівність*

$$\left|\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon u\, dx - \varepsilon\left(\int\limits_{S_\varepsilon^+} g_\varepsilon^+ u\, d\sigma_x + \int\limits_{S_\varepsilon^-} g_\varepsilon^- u\, d\sigma_x\right) - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \widehat{F} u\, dx\right| \le c_3 \varepsilon^{3/2} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)}.$$

Доведення. Згідно з визначенням функції $\widehat{F}$, для кожного $x' \in \Omega$ виконується умова розв'язності (10) для задачі: знайти $N(x', \cdot) \in H^1_\sharp(\omega_0)$ таку, що

$$\begin{aligned} &L_{\xi\xi}(N(x', \xi)) = f(x', \xi) - \widehat{F}(x'), \quad \xi \in \omega_0, \\ &\sigma_\xi(N(x', \xi)) = 0, \quad \xi \in \partial T_0, \\ &\sigma_\xi(N(x', \xi)) = g^\pm(x', \xi), \quad \xi \in S^\pm, \\ &\langle N(x', \cdot)\rangle_{\omega_0} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Внаслідок умов, накладених на гладкість межі областей T_0 і функцій $h_\pm, f, g_\pm,$ і на підставі теореми 6.31 та нерівності (6.80) з [20] маємо

$$\max_{x'\in\Omega}\|N(x',\cdot)\|_{C^{2,\alpha}} \le c_1 \max_{x'\in\Omega}\left(\|f(x',\cdot)\|_{C^{0,\alpha}} + \|g^\pm(x',\cdot)\|_{C^{1,\alpha}}\right),$$

звідки випливає, що

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N}{\partial\xi_i}\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2 dx \le c_2\varepsilon. \tag{15}$$

Перепишемо співвідношення задачі (14) у змінних x :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial N}{\partial\xi_j}\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = f\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right) - \widehat{F}(x'), \quad x\in\Omega_\varepsilon,\\
&a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial N}{\partial\xi_i}\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right)\nu_i = \varepsilon g^\pm\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x\in S_\varepsilon^\pm,\\
&a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial N}{\partial\xi_i}\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right)\nu_i = 0, \quad x\in G_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{16}$$

Домножаючи перше рівняння в (16) на довільну функцію $u \in H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$ і інтегруючи частинами, отримуємо

$$\varepsilon\int\limits_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial N}{\partial\xi_i}\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(\widehat{F}(x') - f\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)u\,dx +$$

$$+\,\varepsilon\left(\int\limits_{S_\varepsilon^+} g^+\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right)\,ud\sigma_x + \int\limits_{S_\varepsilon^-} g^-\left(x',\frac{x}{\varepsilon}\right)\,ud\sigma_x\right).$$

Звідси на підставі (15) і обмеженості коефіцієнтів a_{ij} доводимо твердження леми.

Таким чином, права частина задачі (13) близька в розумінні леми 2.1 до правих частин задачі (1). Задачу (13) будемо називати усередненою задачею для задачі (1).

2.3. Побудова асимптотичного наближення. За наближений розв'язок для задачі (1) візьмемо функцію

$$\widetilde{U}_\varepsilon = u_0(x') + \varepsilon\sum_{p=1}^{n-1}N_p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0(x')}{\partial x_p} =: u_0(x') + \varepsilon U_1(x',\xi)\Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}, \tag{17}$$

де u_0 — розв'язок задачі (13), $N_p, p = 1,\ldots,n-1,$ — розв'язки задач (11).

Введемо такі позначення:

$$L_{x\xi} = \frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \frac{\partial}{\partial\xi_i}a_{ij}(\xi)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad L_{xx} = a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Легко перевірити, що для довільної функції $\phi(x',\xi) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n_\xi)$ має місце тотожність

$$L_\varepsilon\left(\phi\left(x', \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \left\{\left(\varepsilon^{-2}L_{\xi\xi} + \varepsilon^{-1}L_{x\xi} + L_{xx}\right)\left(\phi(x',\xi)\right)\right\}\Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}. \tag{18}$$

На підставі цієї тотожності, враховуючи співвідношення задач (11), виводимо

$$\begin{aligned} L_\varepsilon\left(u_\varepsilon - \widetilde{U}_\varepsilon\right) &= f(x',\xi) - \varepsilon^{-1}\left(L_{\xi\xi}U_1(x',\xi) + L_{x\xi}u_0(x')\right) - \\ &- \left(L_{x\xi}U_1(x',\xi) + L_{xx}u_0(x')\right) - \varepsilon L_{xx}U_1(x',\xi) = \\ &= -f(x',\xi) - \left(L_{x\xi}U_1(x',\xi) + L_{xx}u_0(x')\right) - \varepsilon L_{xx}U_1(x',\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Визначимо 1-періодичні за змінними ξ' функції N_{pq}, $p,q = 1,\ldots,n-1$, як узагальнені розв'язки крайових задач

$$\begin{aligned} L_{\xi\xi}(N_{pq}(\xi)) + \frac{\partial}{\partial_{\xi_i}}\left(a_{iq}(\xi)N_p\right) + a_{iq}(\xi)\frac{\partial N_p}{\partial_{\xi_i}} + a_{pq}(\xi) &= \widehat{a}_{pq}, \quad \xi \in \omega_0, \\ \sigma_\xi(N_{pq}(\xi)) + a_{iq}(\xi)N_p(\xi)\nu_i(\xi) &= 0, \quad \xi \in S^\pm \cup \partial T_0, \\ \langle N_{pq}\rangle_{\omega_0} &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Існування та єдиність розв'язків задач (19) випливає з умови розв'язності (10). Використовуючи ці розв'язки в попередній рівності, одержуємо

$$L_\varepsilon\left(u_\varepsilon - \widetilde{U}_\varepsilon\right) = f\left(x', \frac{x}{\varepsilon}\right) - \widehat{F}(x') - \varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\Psi_k, \tag{20}$$

де

$$\Psi_0 = a_{kq}N_p\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_k \partial x_q \partial x_p} + a_{kj}\frac{\partial N_{pq}}{\partial \xi_j}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_k \partial x_q \partial x_p}, \quad \Psi_k = a_{kj}\frac{\partial N_{pq}}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_q \partial x_p},$$

до того ж у першому виразі підсумовування проводиться за індексами $p,q,k = 1,\ldots,n-1$ та $j = 1,\ldots,n$, а в другому — за індексами $p,q = 1,\ldots,n-1$ та $j = 1,\ldots,n$.

Крайові умови для цієї різниці мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon\left(u_\varepsilon - \widetilde{U}_\varepsilon\right) &= \varepsilon\left(g^\pm\left(x', \frac{x}{\varepsilon}\right) - \Psi_0 - \Psi_k\,\nu_k\right), \quad x \in S^\pm_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon\left(u_\varepsilon - \widetilde{U}_\varepsilon\right) &= -\varepsilon\Psi_k\,\nu_k, \quad x \in G_\varepsilon, \\ u_\varepsilon - \widetilde{U}_\varepsilon &= -\varepsilon U_1, \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Внаслідок гладкості межі і коефіцієнтів задачі, а також властивостей функцій N_p, N_{pq}, маємо $\sum_{k=0}^n \|\Psi_k\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le c_1\|u_0\|_{H^3(\Omega)}$. Як і в § 1.2 гл. II [18], показуємо, що $\|\varepsilon U_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \le$ $\le c_2\varepsilon\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$. Тому на підставі нерівності (7) і леми 2.1 з (20) і (21) виводимо

$$\|u_\varepsilon - \widetilde{U}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c\left(\varepsilon^{3/2}\|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon\|u_0\|_{H^3(\Omega)} + \varepsilon\|u_0\|_{H^2(\Omega)}\right).$$

Згідно з апріорними оцінками для розв'язків еліптичних рівнянь (див., наприклад, [21]) права частина цієї нерівності не перевищує суми таких величин $\|\widehat{F}\|_{H^1(\Omega)}$ і $\|\varphi_0\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)}$. Таким чином, має місце така теорема.

Теорема 2.1. *Існують додатні константи c, ε_0 такі, що для всіх значень $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*

$$\|u_\varepsilon - \widetilde{U}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c\varepsilon. \tag{22}$$

Наслідок 2.1. *Якщо область Ω_ε є циліндричною, тобто $\Omega_\varepsilon = Q_\varepsilon$ (у цьому випадку $T_0 = \varnothing$, $G_\varepsilon = \varnothing$, а в задачах (1), (11), (14) і (21) відсутні відповідні крайові умови), то з нерівності Пуанкаре для тонкої області*

$$\left| \int\limits_{\Omega} \left(E_\varepsilon(u^2) - E_\varepsilon^2(u) \right) dx' \right| \le c\varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \tag{23}$$

де

$$E_\varepsilon(u)(x') = \frac{1}{\varepsilon\left(h_+(\frac{x'}{\varepsilon}) + h_-(\frac{x'}{\varepsilon})\right)} \int\limits_{-\varepsilon h_-(\frac{x'}{\varepsilon})}^{\varepsilon h_+(\frac{x'}{\varepsilon})} u(x)\, dx_n, \tag{24}$$

та з оцінки (22) випливає нерівність

$$\|E_\varepsilon(u_\varepsilon) - u_0\|_{L^2(\Omega)} \le c_1\sqrt{\varepsilon}.$$

3. Асимптотичні оцінки для розв'язків спектральної задачі. Тепер в області Ω_ε розглянемо спектральну задачу

$$\begin{aligned} &- L_\varepsilon(u^\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ &\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad S_\varepsilon^\pm \cup G_\varepsilon, \\ &u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \end{aligned} \tag{25}$$

де $\lambda(\varepsilon)$ — спектральний параметр, $\rho(\xi)$ — 1−періодична за змінними ξ' функція, яка належить простору $C^{0,\alpha}$ і обмежена додатними константами, $0 < \rho_0 \le \rho \le \rho_1$. Позначимо $\rho_\varepsilon(x) = \rho\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Узагальнена постановка цієї задачі полягає в знаходженні функції $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}$ і числа $\lambda(\varepsilon)$ таких, що має місце інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_i} u^\varepsilon \partial_{x_j} v\, dx = \lambda(\varepsilon) \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u^\varepsilon\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon). \tag{26}$$

Очевидно, що для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ власні значення задачі (25) формують неспадну послідовність

$$0 < c_0 \le \lambda_1(\varepsilon) \le \ldots \le \lambda_n(\varepsilon) \le \ldots \to +\infty, \quad n \to \infty, \tag{27}$$

де кожне власне значення рахується стільки разів, яка його кратність. Послідовність відповідних власних функцій нормуємо таким чином:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_n^\varepsilon(x)\, u_m^\varepsilon(x)\, dx = \varepsilon\, \delta_{n,m}, \quad \{n,m\} \in \mathbb{N}, \tag{28}$$

де $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Враховуючи результати попереднього пункту і використовуючи введені там позначення, записуємо усереднену спектральну задачу

$$\widehat{L}(v) + \mu\widehat{\rho}\, v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{29}$$

де $\widehat{\rho} = \langle\rho\rangle = |\omega_0|^{-1}\int_{\omega_0}\rho(\xi)\,d\xi$, μ — спектральний параметр. Спектр задачі (29) складається з неспадної послідовності скінченнократних власних значень

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \le \ldots \le \mu_n \le \ldots \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{30}$$

Вивчимо асимптотичну поведінку власних значень та власних функцій задачі (25) при $\varepsilon \to 0$. Для цього використаємо абстрактну схему з роботи [18] (гл. III, § 1).

Через $\mathcal{H}_\varepsilon$, $\mathcal{H}_0$ позначимо простори функцій $L^2(\Omega_\varepsilon)$, $L^2(\Omega)$, в яких скалярні добутки визначаються відповідно рівностями

$$(u,v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon uv\, dx, \quad (\varphi,\psi)_{\mathcal{H}_0} = \widehat{\rho}\int\limits_{\Omega} \varphi\psi\, dx'.$$

За оператор R_ε в умові C_1 візьмемо оператор, який кожній функції $v \in \mathcal{H}_0$, яку можна розглядати як функцію, задану в $L^2(Q_\varepsilon)$, ставить у відповідність її звуження на Ω_ε, помножене на $(\sqrt{|\omega_0|})^{-1}$. Довизначимо функцію ρ_ε нулем на $Q_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon$. Тоді, згідно з наслідком 1.7 [18] (гл. I), маємо

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon\,(R_\varepsilon v)^2\, dx = \int\limits_{\Omega} v^2(x')\,\frac{1}{|\omega_0|}\int\limits_{h_-(\frac{x'}{\varepsilon})}^{h_+(\frac{x'}{\varepsilon})} \rho\left(\frac{x'}{\varepsilon},\xi_n\right)\, d\xi_n\, dx' \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \widehat{\rho}\int\limits_{\Omega} v^2(x')\, dx',$$

а це означає виконання умови C_1.

Оператори $A_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$, $A_0 : \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_0$ визначимо за формулами $A_\varepsilon f^\varepsilon = u^\varepsilon$, $A_0 f^0 = u^0$, де u^ε, u^0 — узагальнені розв'язки задач

$$\begin{aligned} -L_\varepsilon(u^\varepsilon) &= \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f^\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) &= 0 \quad \text{на} \quad S_\varepsilon^\pm \cup G_\varepsilon, \\ u^\varepsilon &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \end{aligned} \tag{31}$$

$$-\widehat{L}(u^0) = \widehat{\rho} f^0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{32}$$

Очевидно, що так визначені оператори є самоспряженими і додатними. Внаслідок компактності вкладення $H^1 \subset L^2$ вони будуть компактними. На підставі оцінки (7) норми $\|A_\varepsilon\|$ обмежені константою, яка не залежить від параметра ε. Отже, має місце умова C_2.

Нехай $f^0 \in H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Визначимо функції $u^\varepsilon = A_\varepsilon R_\varepsilon f^0$, $u^0 = A_0 f^0$. Внаслідок нерівності (7) $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)} \le c_1\sqrt{\varepsilon}$. Тоді $\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_2$. Відповідна функція $\widehat{F}^0$, яка визначається в задачі (13), має вигляд $\widehat{F}^0 = (\sqrt{|\omega_0|})^{-1} f^0 \widehat{\rho}$. Тому на підставі теореми 2.1 виконується нерівність $\|u^\varepsilon - (\sqrt{|\omega_0|})^{-1} u^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le c_3\varepsilon$, яку можна подати у вигляді

$$\|A_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon A_0 f^0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_2\sqrt{\varepsilon}.$$

Це означає, що виконується умова C_3.

Умова C_4 вимагає деякої модифікації, оскільки розмірності задач (25) та (29) є різними. Спочатку зауважимо, що має місце твердження.

Твердження. *Існує лінійний оператор* $\mathrm{P}_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) \mapsto H^1(\Omega, \partial\Omega)$ *такий, що для будь-якої функції* $u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$

$$\|\mathrm{P}_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \le c_3 \varepsilon^{-1/2} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Такий оператор P_ε є суперпозицією оператора $\mathcal{P}_\varepsilon$ (див. (2)) і оператора E_ε (див. (24)), тобто $\mathrm{P}_\varepsilon = E_\varepsilon \mathcal{P}_\varepsilon$.

Нехай $\sup_{\varepsilon>0} \|f^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_4$. Тоді згідно з нерівністю (7) $\|A_\varepsilon f^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)} \le c_5\sqrt{\varepsilon}$, а отже, $\|\mathrm{P}_\varepsilon A_\varepsilon f^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le c_6$. З огляду на компактність вкладення $H^1 \subset L^2$ існує функція $v_0 \in \in H^1(\Omega, \partial\Omega)$ така, що $\|\mathcal{P}_{\varepsilon'} A_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - v_0\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ по деякій підпослідовності $\varepsilon' \to 0$. Тепер, оскільки норми операторів R_ε рівномірно обмежені відносно ε,

$$\|R_{\varepsilon'} \mathrm{P}_{\varepsilon'} A_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - R_{\varepsilon'} v_0\|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon' \to 0.$$

Таким чином, умова C_4 також справджується.

Зауваження 3.1. Відмінність умови C_4 в [18] (гл. III, § 1) полягає в тому, що суперпозиція операторів R_ε та $\mathrm{P}_{\varepsilon'}$ дорівнює тотожному оператору в $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Застосовуючи результати схеми з роботи [18] (гл. III, § 1) до задач (25) та (29), отримуємо такі теореми.

Теорема 3.1. *Нехай* $\{\lambda_n(\varepsilon) : n \in \mathbb{N}\}$ *і* $\{\mu_n\}$ *— впорядковані послідовності (27) і (30) власних значень задач (25) та (29) відповідно;* $\{u_n^\varepsilon : n \in \mathbb{N}\}$ *— послідовність власних функцій задачі (25), які нормовані умовою (28).*

Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lambda_n(\varepsilon) \to \mu_n \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Існує підпослідовність послідовності $\{\varepsilon\}$, *яку знов перепозначимо через* $\{\varepsilon\}$, *така, що*

$$\mathrm{P}_\varepsilon u_n^\varepsilon \to v_n \quad \textit{слабко в} \quad H^1(\Omega, \partial\Omega) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

де $\{v_n\}$ *— власні функції задачі (29), які ортонормовані в* $\mathcal{H}_0$.

Теорема 3.2. *Для довільного $n \in \mathbb{N}$ і достатньо малих значень ε маємо*

$$|\lambda_n(\varepsilon) - \mu_n| \le c_1(n)\sqrt{\varepsilon}.$$

Припустимо, що $\mu_n = \mu_{n+1} = \ldots = \mu_{n+q}$ — q-кратне власне значення задачі (29). Тоді для довільної функції $v \in N(\mu_n, A_0) := \{u \in \mathcal{H}_0 : A_0 u = \mu_n u\}$, $\|v\|_{\mathcal{H}_0} = 1$, існує лінійна комбінація $\widetilde{u}^\varepsilon$ власних векторів $u_n^\varepsilon, \ldots, u_{n+q}^\varepsilon$ задачі (25) така, що

$$\|R_\varepsilon v - \widetilde{u}^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_2(n)\sqrt{\varepsilon}. \tag{33}$$

Зауваження 3.2. При виконанні умов наслідку 2.1 з (33) виводимо нерівність

$$\|v - E_\varepsilon(\widetilde{u}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \le c_3(n)\sqrt{\varepsilon}.$$

4. Побудова асимптотичного розвинення для розв'язку крайової задачі в тонкій перфорованій області. В цьому пункті зробимо додаткові припущення для тонкої області Ω_ε та коефіцієнтів диференціального оператора L_ε. Будемо вважати, що $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}$, функції $h_\pm$ парні за кожною змінною $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, $\Omega = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : x_i \in (0,1),\ i = 1, \ldots, n-1\}$, а комірка періодичності ω_0 є симетричною відносно гіперплощин $\xi_i = \dfrac{1}{2}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Коефіцієнти a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, оператора L_ε задовольняють умови

$$a_{ij}(S_h'\xi) = (-1)^{\delta_{i,h}+\delta_{j,h}} a_{ij}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall h = \overline{1, n-1}, \tag{34}$$

де $S_h'\xi = \left((-1)^{\delta_{1,h}}\xi_1, \ldots, (-1)^{\delta_{n-1,h}}\xi_{n-1}, \xi_n\right)$, $\delta_{i,h}$ — символ Кронекера.

У такій тонкій перфорованій області Ω_ε розглянемо задачу

$$\begin{aligned}
& -L_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) = f(x'), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\
& \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) - \varepsilon k_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in G_\varepsilon, \\
& \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) - \varepsilon k^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in S_\varepsilon^\pm, \\
& u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{35}$$

де $f \in C_0^\infty(\Omega)$, а функції $k_0(\xi)$, $k^\pm(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, — гладкі, 1-періодичні, додатні та парні за кожною із змінних $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

4.1. Побудова формального асимптотичного розв'язку. Формальний асимптотичний розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_\infty\left(x', \frac{x}{\varepsilon}\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^\alpha v_\varepsilon(x'), \quad \varepsilon \to 0, \tag{36}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — мультиіндекс довжини $|\alpha| = k$, в якому $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$; $N_\alpha(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, — гладкі та 1-періодичні по ξ' функції; $N_0 \equiv 1$; $D^\alpha v \equiv \dfrac{\partial^k v}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_k}}$, $D^0 v \equiv v$.

Далі для скорочення записів, якщо це не буде викликати непорозумінь, будемо нехтувати аргументами у функціях $a_{ij} = a_{ij}(\xi)$, $N_\alpha = N_\alpha(\xi)$ та $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x')$. Використовуючи (18) та формально застосовуючи до u_∞ оператор L_ε, отримуємо

$$L_\varepsilon\left(u_\infty\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \sum_{|\alpha|=k} L_{\xi\xi} N_\alpha D^\alpha v_\varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{\xi_i}(a_{ij}N_\alpha)\partial_{x_j}\left(D^\alpha v_\varepsilon\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{\xi_j}\left(N_\alpha\right)\partial_{x_i}\left(D^\alpha v_\varepsilon\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} N_\alpha \partial_{x_i x_j}\left(D^\alpha v_\varepsilon\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \sum_{|\alpha|=k} L_{\xi\xi} N_\alpha D^\alpha v_\varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \sum_{|\alpha|=k+1} \sum_{i=1}^{n} \partial_{\xi_i}\left(a_{i\alpha_1} N_{\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}}\right) D^\alpha v_\varepsilon +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \sum_{|\alpha|=k+1} \sum_{j=1}^{n} a_{\alpha_1 j}\partial_{\xi_j}\left(N_{\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}}\right) D^\alpha v_\varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} \sum_{|\alpha|=k+2} a_{\alpha_1\alpha_2} N_{\alpha_3\ldots\alpha_{k+2}} D^\alpha v_\varepsilon =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \sum_{|\alpha|=k} L_{\xi\xi} N_\alpha D^\alpha v_\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{i=1}^{n} \partial_{\xi_i}\left(a_{i\alpha_1} N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}\right) D^\alpha v_\varepsilon +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{j=1}^{n} a_{\alpha_1 j}\partial_{\xi_j}\left(N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}\right) D^\alpha v_\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha_1\alpha_2} N_{\alpha_3\ldots\alpha_k} D^\alpha v_\varepsilon =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \sum_{|\alpha|=k} \left(L_{\xi\xi} N_\alpha + M_\alpha + a_{\alpha_1\alpha_2} N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}\right) D^\alpha v_\varepsilon, \tag{37}$$

де $M_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{\alpha_1 i}\,\partial_{\xi_i} N_{\alpha_2\ldots\alpha_k} + \partial_{\xi_i}\left(a_{i\alpha_1} N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}\right)\right)$, $L_{\xi\xi} N = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{\xi_i}\left(a_{ij}\partial_{\xi_j} N\right)$, $N_\alpha \equiv 0$ при $|\alpha| < 0$, $a_{i0} = a_{0i} = a_{00} = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Підставляючи (37) у диференціальне рівняння задачі (34) і збираючи коефіцієнти при однакових степенях ε, знаходимо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \sum_{|\alpha|=k} \left[L_{\xi\xi} N_\alpha(\xi) + M_\alpha(\xi) + a_{\alpha_1\alpha_2}(\xi) N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi)\right]\Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} D^\alpha v_\varepsilon(x') \sim -f(x'). \tag{38}$$

Права частина (38) залежить тільки від x', тому вираз у лівій частині (38) у квадратних дужках, що залежить тільки від ξ, має бути константою, тобто

$$L_{\xi\xi} N_\alpha(\xi) + M_\alpha(\xi) + a_{\alpha_1\alpha_2}(\xi) N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi) = h_\alpha, \quad |\alpha| = k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{39}$$

де h_α — деякі константи, які будуть визначені нижче.

Застосовуючи до u_∞ оператор конормальної похідної σ_ε, отримуємо

$$\sigma_\varepsilon(u_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \sum_{|\alpha|=k} \left[\sigma_\xi(N_\alpha(\xi)) + \sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha_1}(\xi)\nu_i(\xi) N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}(\xi)\right]\Bigg|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} D^\alpha v_\varepsilon(x'),$$

де $\sigma_\xi(N) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi)\partial_{\xi_j}N(\xi)\nu_i(\xi)$. Перегруповуючи і перепозначуючи індекси підсумовування, вираз $\varepsilon u_\infty(x',\xi)$ можна записати у вигляді

$$\varepsilon u_\infty(x',\xi) = \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{|\alpha|=k}N_\alpha(\xi)D^\alpha v_\varepsilon(x') = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}\sum_{|\alpha|=k}\delta_{\alpha_1,0}\delta_{\alpha_2,0}N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi)D^\alpha v_\varepsilon(x').$$

Таким чином, при підстановці u_∞ у крайові умови маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}\sum_{|\alpha|=k}\Bigg[\sigma_\xi\left(N_\alpha(\xi)\right) + \sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha_1}(\xi)\nu_i(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}(\xi) - \\ - \delta_{\alpha_1,0}\delta_{\alpha_2,0}k^{\pm}(\xi)N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi)\Bigg]\Bigg|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} D^\alpha v_\varepsilon(x') \sim 0 \quad \text{при} \quad x\in S_\varepsilon^{\pm} \tag{40}$$

та

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}\sum_{|\alpha|=k}\Bigg[\sigma_\xi\left(N_\alpha(\xi)\right) + \sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha_1}(\xi)\nu_i(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}(\xi) - \\ - \delta_{\alpha_1,0}\delta_{\alpha_2,0}k_0(\xi)N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi)\Bigg]\Bigg|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} D^\alpha v_\varepsilon(x') \sim 0 \quad \text{при} \quad x\in G_\varepsilon. \tag{41}$$

Із співвідношень (39) – (41) отримуємо рекурентну процедуру для визначення функцій N_α :

$$\begin{aligned}
&L_{\xi\xi}N_\alpha(\xi) + M_\alpha(\xi) + a_{\alpha_1\alpha_2}(\xi)N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi) = h_\alpha, \quad \xi\in\omega_0,\\
&\sigma_\xi\left(N_\alpha(\xi)\right) + \sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha_1}(\xi)\nu_i(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}(\xi) - \delta_{\alpha_1,0}\delta_{\alpha_2,0}k^{\pm}(\xi)N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi) = 0, \quad \xi\in S^{\pm},\\
&\sigma_\xi\left(N_\alpha(\xi)\right) + \sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha_1}(\xi)\nu_i(\xi)N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}(\xi) - \delta_{\alpha_1,0}\delta_{\alpha_2,0}k_0(\xi)N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi) = 0, \quad \xi\in\partial T_0,\\
&\partial^\beta_{\xi_i}N_\alpha(\xi)\Big|_{\xi_i=0} = \partial^\beta_{\xi_i}N_\alpha(\xi)\Big|_{\xi_i=1}, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad \beta=0,1, \quad \xi\in\Gamma,\\
&\langle N_\alpha\rangle_{\omega_0} = 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Рекурентна процедура (42) буде однозначно розв’язною, якщо буде виконуватись умова розв’язності (10). Тому сталі h_α потрібно вибрати таким чином:

$$h_\alpha = \left\langle\sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha_1}\partial_{\xi_i}N_{\alpha_2\ldots\alpha_k} + a_{\alpha_1\alpha_2}N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}\right\rangle_{\omega_0} + \frac{\delta_{\alpha_1,0}\delta_{\alpha_2,0}}{|\omega_0|}\int\limits_{\partial T_0}k_0N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}d\sigma + \\ + \frac{\delta_{\alpha_1,0}\delta_{\alpha_2,0}}{|\omega_0|}\int\limits_{S^{\pm}}k^{\pm}N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}d\sigma. \tag{43}$$

Зокрема, при $|\alpha| = 1$ коефіцієнти $h_\alpha = 0$ і відповідні крайові задачі набирають вигляду

$$
\begin{aligned}
& L_{\xi\xi} N_{\alpha_1}(\xi) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{\xi_i} a_{i\alpha_1}(\xi) = 0, \quad \xi \in \omega_0, \\
& \sigma_\xi \left(N_{\alpha_1}(\xi) \right) + \sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha_1}(\xi) \nu_i(\xi) = 0, \quad \xi \in S^\pm, \\
& \sigma_\xi \left(N_{\alpha_1}(\xi) \right) + \sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha_1}(\xi) \nu_i(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial T_0, \\
& \partial_{\xi_i}^\beta N_{\alpha_1}(\xi) \Big|_{\xi_i=0} = \partial_{\xi_i}^\beta N_{\alpha_1}(\xi) \Big|_{\xi_i=1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \beta = 0, 1, \quad \xi \in \Gamma, \\
& \langle N_{\alpha_1} \rangle_{\omega_0} = 0.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Згідно з нашою домовленістю (див. (37)) $a_{i0} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тому при $\alpha_1 = 0$ задача (44) буде мати лише нульовий розв'язок: $N_0 \equiv 0$. При $\alpha_1 \in \{1, \ldots, n-1\}$ розв'язок N_{α_1} збігається з відповідним розв'язком задачі (11).

Розглянемо задачі для функцій $N_{\alpha_1\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. При $(\alpha_1, \alpha_2) = (p, q)$, $p, q = \overline{1, n-1}$, маємо

$$
\begin{aligned}
& L_{\xi\xi} N_{pq}(\xi) + \sum_{i=1}^{n} \Big(a_{pi}(\xi) \partial_{\xi_i} N_q(\xi) + \partial_{\xi_i} \left(a_{ip}(\xi) N_q(\xi) \right) \Big) + a_{pq}(\xi) = \widehat{a}_{pq}, \quad \xi \in \omega_0, \\
& \sigma_\xi \left(N_{pq}(\xi) \right) + \sum_{i=1}^{n} a_{ip}(\xi) \nu_i(\xi) N_q(\xi) = 0, \quad \xi \in S^\pm, \\
& \sigma_\xi \left(N_{pq}(\xi) \right) + \sum_{i=1}^{n} a_{ip}(\xi) \nu_i(\xi) N_q(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial T_0, \\
& \partial_{\xi_i}^\beta N_{pq}(\xi) \Big|_{\xi_i=0} = \partial_{\xi_i}^\beta N_{pq}(\xi) \Big|_{\xi_i=1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \beta = 0, 1, \quad \xi \in \Gamma, \\
& \langle N_{pq} \rangle_{\omega_0} = 0,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

де $\widehat{a}_{pq} := \langle \sum_{i=1}^n a_{ip} \partial_{\xi_i} N_q + a_{pq} \rangle_{\omega_0} = h_{pq}$ (для порівняння див. (12) та (19)).

У випадку, коли $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, q)$ або $(\alpha_1, \alpha_2) = (p, 0)$, $p, q = \overline{1, n-1}$, задачі мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&L_{\xi\xi}\left(N_{0q}(\xi)\right) = 0, \quad \xi \in \omega_0,\\
&\sigma_\xi\left(N_{0q}(\xi)\right) = 0, \quad \xi \in S^{\pm},\\
&\sigma_\xi\left(N_{0q}(\xi)\right) = 0, \quad \xi \in \partial T_0,\\
&\partial^{\beta}_{\xi_i} N_{0q}(\xi)\Big|_{\xi_i=0} = \partial^{\beta}_{\xi_i} N_{0q}(\xi)\Big|_{\xi_i=1}, i = \overline{1, n-1}, \quad \beta = 0,1, \quad \xi \in \Gamma,\\
&\langle N_{0q}\rangle_{\omega_0} = 0,
\end{aligned}
\tag{46}
$$

звідки $N_{p0} = N_{0q} \equiv 0, p, q = \overline{1, n-1}$.

При $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$

$$
\begin{aligned}
&L_{\xi\xi}\left(N_{00}(\xi)\right) = \widehat{K}, \quad \xi \in \omega_0,\\
&\sigma_\xi\left(N_{00}(\xi)\right) = k^{\pm}(\xi), \quad \xi \in S^{\pm},\\
&\sigma_\xi\left(N_{00}(\xi)\right) = k_0(\xi), \quad \xi \in \partial T_0,\\
&\partial^{\beta}_{\xi_i} N_{00}(\xi)\Big|_{\xi_i=0} = \partial^{\beta}_{\xi_i} N_{00}(\xi)\Big|_{\xi_i=1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \beta = 0,1, \quad \xi \in \Gamma,\\
&\langle N_{00}\rangle_{\omega_0} = 0,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

де

$$
h_{00} := \widehat{K} := \frac{1}{|\omega_0|}\left(\int\limits_{\partial T_0} k_0 d\sigma + \int\limits_{S^{\pm}} k^{\pm} d\sigma \right).
$$

Тепер на підставі симетрії області ω_0 та умов (34), як і в роботах [19] (§ 6.3) та [22] (лема 2.2), доведемо наступну лему і знайдемо нові властивості розв'язків рекурентної процедури (42).

Лема 4.1. *Якщо для деякого $h \in \{1, \ldots, n-1\}$ праві частини задачі (8) задовольняють умови*

$$
\Phi_0(S'_h(\xi)) = \Phi_0(\xi), \quad \xi \in \partial T_0, \quad \Phi_0^{\pm}(S'_h(\xi)) = \Phi_0^{\pm}(\xi), \quad \xi \in S^{\pm}, \tag{48}
$$

$$
F_i(S'_h(\xi)) = (-1)^{\delta_{i,h}} F_i(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{49}
$$

то розв'язком задачі (8) є парна відносно $\frac{1}{2}$ за змінною ξ_h функція, тобто

$$
N(S'_h(\xi)) = N(\xi), \quad \xi \in \omega_0. \tag{50}
$$

Якщо для деякого $h \in \{1, \ldots, n-1\}$ праві частини задачі (8) задовольняють умови

$$\Phi_0(S'_h(\xi)) = -\Phi_0(\xi), \quad \xi \in \partial T_0, \quad \Phi_0^{\pm}(S'_h(\xi)) = -\Phi_0^{\pm}(\xi), \quad \xi \in S^{\pm}, \tag{51}$$

$$F_i(S'_h(\xi)) = (-1)^{\delta_{i,h}+1} F_i(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{52}$$

то розв'язком задачі (8) є непарна відносно $\frac{1}{2}$ за змінною ξ_h функція, тобто

$$N(S'_h(\xi)) = -N(\xi), \quad \xi \in \omega_0. \tag{53}$$

Доведення. Врахувавши умови (34) та симетрію області ω_0 відносно гіперплощин $\xi_i = \frac{1}{2}$, $i = 1, \ldots, n-1$, отримаємо наступні співвідношення для розв'язку N задачі (8):

$$L_{\eta\eta}\big(N(\eta)\big)|_{\eta = S'_h(\xi)} = L_{\xi\xi}\big(N(S'_h(\xi))\big), \quad \xi \in \omega_0,$$

$$\sigma_\eta\big(N(\eta)\big)|_{\eta = S'_h(\xi)} = \sigma_\xi\big(N(S'_h(\xi))\big), \quad \xi \in \partial T_0 \cup S^{\pm}.$$

Таким чином, функція $N(S'_h(\xi))$, $\xi \in \omega_0$, є розв'язком задачі

$$\begin{aligned}
&L_{\xi\xi} N(S'_h(\xi)) = F_0(S'_h(\xi)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i}(S'_h(\xi)), \quad \xi \in \omega_0, \\
&\sigma_\xi(N(S'_h(\xi))) = \Phi_0^{\pm}(S'_h(\xi)) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\delta_{i,h}} F_i(S'_h(\xi)) \nu_i(\xi), \quad \xi \in S^{\pm}, \\
&\sigma_\xi(N(S'_h(\xi))) = \Phi_1(S'_h(\xi)) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\delta_{i,h}} F_i(S'_h(\xi)) \nu_i(\xi), \quad \xi \in \partial T_0, \\
&\partial_{\xi_i}^{\beta} N(S'_h(\xi))\Big|_{\xi_i = 0} = \partial_{\xi_i}^{\beta} N(S'_h(\xi))\Big|_{\xi_i = 1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \beta = 0, 1, \quad \xi \in \Gamma, \\
&\big\langle N(S'_h(\xi)) \big\rangle_{\omega_0} = 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Тут ми врахували той факт, що для компонент нормалі виконуються співвідношення $\nu_i(S'_h(\xi)) = (-1)^{\delta_{i,h}} \nu_i(\xi)$, $i = 1, \ldots, n$.

Нехай мають місце умови (48) та (49). Віднявши від співвідношень задачі (8) відповідні співвідношення задачі (54), отримаємо

$$\begin{aligned}
&L_{\xi\xi}\big(N(\xi) - N(S'_h(\xi))\big) = 0, \quad \xi \in \omega_0, \\
&\sigma_\xi\big(N(\xi) - N(S'_h(\xi))\big) = 0, \quad \xi \in S^{\pm}, \\
&\sigma_\xi\big(N(\xi) - N(S'_h(\xi))\big) = 0, \quad \xi \in \partial T_0, \\
&\partial_{\xi_i}^{\beta}\big(N(\xi) - N(S'_h(\xi))\big)\Big|_{\xi_i = 0} = \partial_{\xi_i}^{\beta}\big(N(\xi) - (S'_h(\xi))\Big|_{\xi_i = 1}, \quad \beta = 0, 1, \quad \xi \in \Gamma, \\
&\big\langle N(\xi) - N(S'_h(\xi)) \big\rangle_{\omega_0} = 0.
\end{aligned} \tag{55}$$

На підставі єдиності розв'язку задачі (8) з (55) випливає (50). Аналогічно доводиться лема при виконанні умов (51) та (52).

Наслідок 4.1. *Для розв'язків N_α рекурентної процедури (42) та констант h_α виконуються співвідношення:*

1) $N_\alpha(S'_h\xi) = (-1)^{\delta_{\alpha_1,h}+\ldots+\delta_{\alpha_k,h}} N_\alpha(\xi)$, $\xi \in \omega_0$, $h = \overline{1, n-1}$;

2) $N_\alpha \equiv 0$, *якщо набір індексів* $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ *містить непарну кількість нулів;*

3) $h_\alpha = 0$, *якщо* $(-1)^{\delta_{\alpha_1,h}+\ldots+\delta_{\alpha_k,h}} = -1$ *хоча б при одному* $h \in \{1, \ldots, n-1\}$;

4) $h_\alpha = 0$ *при непарному* $|\alpha|$.

Доведення проведемо методом математичної індукції. Базу індукції перевіримо на задачах (44) – (47). Розглядаючи задачу (44), неважко бачити, що згідно з лемою 4.1 та властивостями коефіцієнтів a_{ij} (див. (34)) для розв'язків N_{α_1}, $\alpha_1 \in \{1, \ldots, n-1\}$, мають місце співвідношення

$$N_{\alpha_1}\left(S'_h\xi\right) = (-1)^{\delta_{\alpha_1,h}}\, N_{\alpha_1}(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \quad h = \overline{1, n-1}, \tag{56}$$

а відповідні константи $h_{\alpha_1} = 0$.

З леми 4.1 випливає, що розв'язок N_{00} задачі (47) є парним за кожною зі змінних $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Функції $N_{p0} = N_{0q} \equiv 0$, $p, q = \overline{1, n-1}$. Праві частини задачі (45) задовольняють рівності

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{pj}(S'_h\xi)\partial_{\xi_j} N_q(S'_h\xi) + \partial_{\xi_i}\left(a_{ip}(S'_h\xi)N_q(S'_h\xi)\right)\right) + a_{pq}(S'_h\xi) =$$

$$= (-1)^{\delta_{p,h}+\delta_{q,h}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \Big(a_{pj}(\xi)\partial_{\xi_j} N_q(\xi) + \partial_{\xi_i}\left(a_{ip}(\xi)N_q(\xi)\right)\Big) + a_{pq}(\xi)\right],$$

$$\widehat{a}_{pq} = 0, \quad p \neq q, \tag{57}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ip}(S'_h\xi)\nu_i(S'_h\xi)N_q(S'_h\xi) = (-1)^{\delta_{p,h}+\delta_{q,h}} \sum_{i=1}^{n} a_{ip}(\xi)\nu_i(\xi)N_q(\xi).$$

Таким чином, можна стверджувати, що

$$N_{\alpha_1\alpha_2}\left(S'_h\xi\right) = (-1)^{\delta_{\alpha_1,h}+\delta_{\alpha_2,h}}\, N_{\alpha_1\alpha_2}(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \quad h = \overline{1, n-1}. \tag{58}$$

Нехай тепер для всіх α, $|\alpha| \le k-1$, функції $N_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}$ задовольняють співвідношення

$$N_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}(S'_h\xi) = (-1)^{\delta_{\alpha_1,h}+\ldots+\delta_{\alpha_{k-1},h}} N_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \quad h = \overline{1, n-1}.$$

Тоді на підставі умов (34) маємо

$$\left(M_\alpha(\eta) + a_{\alpha_1\alpha_2}(\eta)\, N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\eta)\right)\Big|_{\eta = S'_h\xi} =$$

$$= (-1)^{\delta_{\alpha_1,h}+\ldots+\delta_{\alpha_k,h}} \left(M_\alpha(\xi) + a_{\alpha_1\alpha_2}(\xi)N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}(\xi)\right), \quad \xi \in \omega_0.$$

З леми 4.1 випливає, що функції N_α задовольняють рівності

$$N_\alpha(S'_h\xi) = (-1)^{\delta_{\alpha_1,h}+\ldots+\delta_{\alpha_k,h}} N_\alpha(\xi), \quad |\alpha| = k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad h = \overline{1, n-1},$$

$h_\alpha = 0$, якщо $(-1)^{\delta_{\alpha_1,h}+\ldots+\delta_{\alpha_k,h}} = -1$ хоча б при одному $h \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Таким чином, ми довели властивості 1 та 3 наслідку 4.1.

Також методом математичної індукції покажемо, що розв'язок задачі (42) $N_\alpha \equiv 0$, якщо мультиіндекс $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ містить у собі непарну кількість нулів. За базу індукції візьмемо попередньо розглянуті випадки для $k = 1$ та $k = 2$. Нехай $N_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} \equiv \equiv 0$, $N_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}} \equiv 0$ для деякого $k \in \mathbb{N}$, якщо відповідні набори індексів містять непарну кількість нулів. Тоді доданки $a_{\alpha_1 j}\, \partial_{\xi_j} N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}$, $\partial_{\xi_i}\left(a_{i\alpha_1} N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}\right)$, $a_{\alpha_1\alpha_2} N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}$ з диференціального рівняння задачі (42) будуть дорівнювати нулю або на підставі властивостей a_{ij}, або за припущенням індукції. З тих самих міркувань будуть дорівнювати нулю доданки вигляду $a_{i\alpha_1}\, \nu_i N_{\alpha_2\ldots\alpha_k}$ в крайових умовах. Розглядаючи вирази $\delta_{\alpha_1,0}\, \delta_{\alpha_2,0}\, N_{\alpha_3\ldots\alpha_k}$, матимемо два випадки: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ та коли набір нулів у індексі α розподіляється будь-яким іншим чином. У першому випадку цей вираз дорівнюватиме нулю за припущенням індукції, оскільки на мультиіндекс $(\alpha_3, \ldots, \alpha_k)$ припадає непарна кількість нулів. У другому випадку цей вираз буде нулем за означенням символу Кронекера. Отже, всі праві частини як в диференціальному рівнянні задачі (42), так і в крайових умовах дорівнюють нулю. Тому $N_\alpha = 0$, $|\alpha| = k$.

Пункт 4 леми випливає з щойно доведених властивостей функцій N_α, властивостей коефіцієнтів a_{ij} та того, що інтегрування в формулі (43) проводиться по симетричній області.

Наслідок доведено.

Зауваження 4.1. З (57) випливає, що у випадку симетрії коефіцієнтів задачі та симетрії області ω_0 усереднений оператор має вигляд

$$\widehat{L} = \sum_{p=1}^{n-1} \widehat{a}_{pp}\, \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}.$$

Таким чином, співвідношення (38) можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-2} \sum_{|\alpha|=2k} h_\alpha D^\alpha v_\varepsilon(x') \sim -f(x'), \quad x' \in \Omega. \tag{59}$$

Врахувавши властивість 4 з наслідку 4.1, асимптотичний анзац для v_ε подамо у вигляді

$$v_\varepsilon(x') = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} v_m(x'), \quad x' \in \Omega. \tag{60}$$

Підставивши (60) в (59), отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \left[\sum_{|\alpha|=2} h_\alpha D^\alpha v_m(x') + \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=2(k-m)+2} h_\alpha D^\alpha v_m(x') \right] \sim -f(x').$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях ε, будемо мати рекурентну процедуру для визначення функцій $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} &\widehat{L}(v_k(x')) + \widehat{K}v_k(x') = f_k(x'), \quad x' \in \Omega, \\ &v_k(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{61}$$

де

$$f_0(x') = -f(x'), \quad f_k(x') = -\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=2(k-m)+2} h_\alpha D^\alpha v_m(x'), \quad x' \in \Omega.$$

Зауваження 4.2. З крайових умов задачі (61) випливає, що всі похідні функцій $v_k|_{x_i=0}$, $v_k|_{x_i=1}$ за всіма змінними, крім x_i, на гранях $\{x_i = 0\}$ і $\{x_i = 1\}$ $(n-1)$-вимірного куба Ω також дорівнюють нулю.

Лема 4.2. *Для розв'язків рекурентної процедури (61) на межі куба Ω виконуються співвідношення*

$$\left.\frac{\partial^{2l} v_k}{\partial x_i^{2l}}\right|_{x_i=0} = \left.\frac{\partial^{2l} v_k}{\partial x_i^{2l}}\right|_{x_i=1} = 0, \quad l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{62}$$

Доведення проведемо у випадку $i = 1$. Будемо інтерпретувати символи $\widetilde{f}, \widetilde{\Omega}, \ldots$ таким чином: $\widetilde{\Omega}$ означає об'єднання Ω та її симетричного образу відносно гіперплощини $\{x' : x_1 = 0\}$, включаючи їх спільну межу; $\widetilde{f}$ — непарне продовження функції f на область $\widetilde{\Omega}$.

Оскільки f_0 є фінітною, то розв'язок задачі (61) при $k = 0$, продовжений непарним чином через гіперплощину $\{x' : x_1 = 0\}$, є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} &\widehat{L}\big(\widetilde{v_0}(x')\big) + \widehat{K}\widetilde{v_0}(x') = \widetilde{f_0}(x'), \quad x' \in \widetilde{\Omega}, \\ &\widetilde{v_0}(x') = 0, \quad x' \in \partial\widetilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{63}$$

Отже, $\widetilde{v_0} \in C^\infty(\widetilde{\Omega})$ і мають місце співвідношення (62) при $k = 0$.

Припустимо, що співвідношення (62) виконуються при всіх $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Тоді $f_p \in C^\infty(\overline{\Omega})$ та

$$\left.\frac{\partial^{2l} f_p(x')}{\partial x_1^{2l}}\right|_{x_1=0} = -\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{|\alpha|=2(p-m)+2} h_\alpha \left.\frac{\partial^{2l} D^\alpha v_m(x')}{\partial x_1^{2l}}\right|_{x_1=0} = 0, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{64}$$

Дійсно, якщо мультиіндекс α містить парну кількість похідних за змінною x_1, то рівності (64) мають місце на підставі попередніх припущень леми та зауваження 4.2. Нехай мультиіндекс α містить непарну кількість похідних за змінною x_1. Тоді з властивості 3 наслідку 4.1 випливає, що $h_\alpha = 0$.

Тому задачу (61) при $k = p$ можна продовжити непарним чином через гіперплощину $\{x' : x_1 = 0\}$, а отже, розв'язок $\widetilde{v_p}$ є непарною гладкою функцією відносно змінної x_1 і співвідношення (62) виконуються при $k = p$.

4.2. Обґрунтування побудованої асимптотики. Розглянемо частинну суму

$$S_p(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{p} \varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^\alpha V_{p-1}(x',\varepsilon), \quad V_{p-1}(x',\varepsilon) = \sum_{m=0}^{(p-1)/2} \varepsilon^{2m} v_m(x')$$

при довільному фіксованому непарному p. Для зручності подамо S_p у вигляді

$$S_p(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{(p-1)/2} \varepsilon^{2k} \sum_{|\alpha|=2k} N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{m=0}^{(p-1)/2} \varepsilon^{2m} D^\alpha v_m(x') +$$

$$+ \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \varepsilon^{2k-1} \sum_{|\alpha|=2k-1} N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{m=0}^{(p-1)/2} \varepsilon^{2m} D^\alpha v_m(x').$$

Знайдемо значення S_p на вертикальній частині Γ_ε межі тонкої перфорованої області Ω_ε. При $x_i = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, маємо

$$S_p(x,\varepsilon)\big|_{x_i=0} = \Bigg[\varepsilon^0 v_0 + \varepsilon^2\Bigg(\sum_{|\alpha|=2} N_\alpha D^\alpha v_0 + v_1\Bigg) +$$

$$+ \varepsilon^4\Bigg(\sum_{|\alpha|=4} N_\alpha D^\alpha v_0 + \sum_{|\alpha|=2} N_\alpha D^\alpha v_1 + v_2\Bigg) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^{p-1}\Bigg(\sum_{|\alpha|=p-1} N_\alpha D^\alpha v_0 + \sum_{|\alpha|=p-3} N_\alpha D^\alpha v_1 + \ldots + v_{\frac{p-1}{2}}\Bigg)\Bigg]\Bigg|_{x_i=0} +$$

$$+ \Bigg[\varepsilon^1 \sum_{|\alpha|=1} N_\alpha D^\alpha v_0 + \varepsilon^3\Bigg(\sum_{|\alpha|=3} N_\alpha D^\alpha v_0 + \sum_{|\alpha|=1} N_\alpha D^\alpha v_1\Bigg) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^p\Bigg(\sum_{|\alpha|=p} N_\alpha D^\alpha v_0 + \sum_{|\alpha|=p-2} N_\alpha D^\alpha v_1 + \ldots + \sum_{|\alpha|=1} N_\alpha D^\alpha v_{\frac{p-1}{2}}\Bigg)\Bigg]\Bigg|_{x_i=0},$$

$$x \in \Gamma_\varepsilon.$$

Покажемо, що доданки вигляду $N_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-m}} \dfrac{\partial^{k-m} v_m}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_{k-m}}}$, які входять до S_p при відповідних степенях ε, дорівнюють нулю при $x_i = 0$. Якщо кількість тих компонент мультиіндексу $(\alpha_1\ldots\alpha_{k-m})$, що збігаються з i, є парною, то $S_p(x,\varepsilon)\big|_{x_i=0} = 0$ за рівностями (62). Якщо кількість тих компонент мультиіндексу $(\alpha_1\ldots\alpha_{k-m})$, що збігаються з i, є непарною, то $S_p(x,\varepsilon)\big|_{x_i=0} = 0$ за наслідком 4.1. Якщо ж серед компонент мультиіндексу

$(\alpha_1 \dots \alpha_{k-m})$ немає таких, що дорівнюють i, то $S_p(x,\varepsilon)|_{x_i=0} = 0$ за зауваженням 4.2. Отже, $S_p(x,\varepsilon)|_{x_i=0} = 0$.

Внаслідок 1-періодичності N_α по $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$ та співвідношень (62) маємо

$$S_p(x,\varepsilon)|_{x_i=0} = S_p(x,\varepsilon)|_{x_i=1} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

При $x \in S_\varepsilon^\pm$ відповідно будемо мати

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial S_p(x,\varepsilon)}{\partial x_j}\nu_i - \varepsilon k^\pm \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) S_p(x,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^p \sum_{|\alpha|=p+1}\sum_{i=1}^n a_{i\alpha_1} N_{\alpha_2\dots\alpha_{p+1}}\nu_i D^\alpha V_{p-1} -$$

$$- \sum_{k=p+1}^{p+2}\varepsilon^{k-1}\sum_{|\alpha|=k} k^\pm \delta_0^{\alpha_1}\delta_0^{\alpha_2} N_{\alpha_3\dots\alpha_k} D^\alpha V_{p-1} =: \varepsilon^p r_p^{(0)}(x,\varepsilon).$$

З огляду на гладкість функцій v_m доданки, які входять до $r_p^{(0)}$, оцінюються таким чином:

$$\left\| N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^\alpha V_{p-1}\right\|^2_{L^2(S_\varepsilon^\pm)} \le c_1 \left\| N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{L^2(S_\varepsilon^\pm)} \le c_2 \varepsilon^{-1}\|N_\alpha(\xi)\|^2_{H^1(\omega_0)}.$$

Тому $\|r_p^{(0)}\|_{L^2(S_\varepsilon^\pm)} \le C_1\varepsilon^{-1/2}$. Аналогічно для $x \in G_\varepsilon$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial S_p(x,\varepsilon)}{\partial x_j}\nu_i - \varepsilon k_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) S_p(x,\varepsilon) = \varepsilon^p r_p^{(1)}(x,\varepsilon), \quad \left\| r_p^{(1)}\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le C_2\,\varepsilon^{-1/2}.$$

Застосовуючи оператор L_ε до розглядуваної частинної суми, маємо

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial S_p(x,\varepsilon)}{\partial x_j}\right) + f(x') =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{p-2}\varepsilon^k\left[\sum_{|\alpha|=2} h_\alpha D^\alpha v_m(x') + \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=2(k-m)+2} h_\alpha D^\alpha v_m(x')\right] + f(x')\right) +$$

$$+ \varepsilon^{p-1}R_p(x,\varepsilon) = \varepsilon^{p-1}R_p(x,\varepsilon), \quad \|R_p\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le C_3\sqrt{\varepsilon}.$$

Таким чином, отримали співвідношення

$$\begin{gathered}
L_\varepsilon(S_p(x,\varepsilon)) + f(x') = \varepsilon^{p-1}R_p(x,\varepsilon), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\
\sigma_\varepsilon(S_p(x,\varepsilon)) - \varepsilon k^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) S_p(x,\varepsilon) = \varepsilon^p r_p^{(0)}(x,\varepsilon), \quad x \in S_\varepsilon^\pm, \\
\sigma_\varepsilon(S_p(x,\varepsilon)) - \varepsilon k_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) S_p(x,\varepsilon) = \varepsilon^p r_p^{(1)}(x,\varepsilon), \quad x \in G_\varepsilon, \\
S_p(x,\varepsilon)|_{x_i=0} = 0, \quad S_p(x,\varepsilon)|_{x_i=1} = 0, \quad i = \overline{1,n-1}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon.
\end{gathered} \tag{65}$$

Віднімемо від (65) задачу (35):

$$\begin{aligned}
&L_\varepsilon(S_p - u_\varepsilon) = \varepsilon^{p-1} R_p(x,\varepsilon), \quad x \in \Omega_\varepsilon,\\
&\sigma_\varepsilon(S_p - u_\varepsilon) - \varepsilon k^{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(S_p - u_\varepsilon) = \varepsilon^p r_p^{(0)}(x,\varepsilon), \quad x \in S_\varepsilon^{\pm},\\
&\sigma_\varepsilon(S_p - u_\varepsilon) - \varepsilon k_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(S_p - u_\varepsilon) = \varepsilon^p r_p^{(1)}(x,\varepsilon), \quad x \in G_\varepsilon,\\
&S_p(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x,\varepsilon) = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{66}$$

На підставі отриманих оцінок для відхилів задачі (65) та апріорної оцінки (7) маємо

$$\|S_p - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_p \varepsilon^{p-1/2}.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 4.1. *Для розв'язку задачі (35) має місце таке асимптотичне розвинення у просторі* $H^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$u_\varepsilon(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} N_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^\alpha v_\varepsilon(x'), \quad v_\varepsilon(x') = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} v_m(x'), \quad \varepsilon \to 0,$$

де N_α *визначаються з рекурентної процедури (42), а* v_m *— з рекурентної процедури (61).*

Наслідок 4.2. *Якщо в (66) покласти* $p = 3$, *то отримаємо асимптотичну оцінку*

$$\left\| u_\varepsilon(x) - v_0(x') - \varepsilon \sum_{\alpha_1=1}^{n-1} N_{\alpha_1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial v_0(x')}{\partial x_{\alpha_1}} - \varepsilon^2 \sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{n-1} N_{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 v_0(x')}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_1\, \varepsilon^2,$$

з якої випливає й оцінка (22) для першого наближення.

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976.
3. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. — Новосибирск: Науч. книга, 2002. — Т. 1. — 408 с.
4. *Caillerie D.* Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. Appl. Sci. — 1984. — **6**. — P. 159 – 191.
5. *Lewinsky T., Telega J.* Plates, laminates and shells // Asymptotic Analysis and Homogenization. — Singapore: World Sci., 2000.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикл. математика и механика. — 1962. — **26**, № 4. — С. 668 – 686.
7. *Джавадов М. Г.* Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в тонких областях // Дифференц. уравнения. — 1968. — **4**, № 10. — С. 1901 – 1909.
8. *Назаров С. А.* Структура решений краевой задачи для эллиптических уравнений в тонких областях // Вестн. Ленингр. ун-та. Математика, механика, астрономия. — 1982. — Вып. 2. — С. 65 – 68.

9. *Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В.* Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1986. — **26**, № 7. — С. 1032 – 1048.

10. *Назаров С. А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. — 1995. — **7**, № 5. — С. 1 – 92.

11. *Ciarlet P., Kesavan S.* Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problem in plate theory // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. — 1981. — **26**. — P. 145 – 172.

12. *Korn R.V., Vogelius M.* A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II: A convergence proof // Quart. Appl. Math. — 1985. — **18**, № 1. — P. 1 – 22.

13. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, № 5. — С. 3 – 192.

14. *Панасенко Г. П., Резцов М. В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. — 1987. — **294**, № 5. — С. 1061 – 1065.

15. *Мельник Т. А.* Усереднення еліптичних рівнянь, які описують процеси в сильно неоднорідних тонких перфорованих областях з швидко змінною товщиною // Доп. АН України. — 1991. — № 10. — С. 15 – 19.

16. *Колпаков А. Г.* Определяющие уравнения тонкой упругой напряженной балки периодической структуры // Прикл. математика и механика. — 1999. — **63**, вып. 3. — С. 513 – 523.

17. *Chechkin G. A., Pichugina E. A.* Weighted Korn's inequality for a thin plate with a rough surface // Russian J. Math. Phys. — 2000. — **7**, № 3. — P. 375 – 383.

18. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 310 с.

19. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984. — 352 с.

20. *Гилбарт Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

21. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

22. *Мельник Т. А.* Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций эллиптических краевых задач с быстроосциллирующими коэффициентами в перфорованном кубе // Тр. сем. им. И. Г. Петровского — 1994. — Вып. 17. — С. 51 – 88.

Одержано 24.03.08