УДК 517 . 9

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ДВОХ ІНДЕКСІВ

М. Я. Бойко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 30680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 7

We prove a criterion for existence of a unique periodic solution for a linear two-parameter difference equation in a Banach space.

Получен критерий существования единственного периодического решения для линейного двупараметрического разностного уравнения в банаховом пространстве.

1. Вступ. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір; $\mathcal{L}(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють із B в B; E — замкнений оператор, що діє в B, з областю визначення $D \subset B$. Зазначимо, що D — комплексний банахів простір з нормою $|x| := \|x\| + \|Ex\|$. Зафіксуємо натуральні числа p, q.

Означення 1. *Послідовність* $\{y_{m,n}:\ m,n \in Z\}$ *елементів з* B *будемо називати* (p,q)-*періодичною, якщо для всіх* $m, n \in Z$ *виконуються рівності* $y_{m+p,n} = y_{m,n} = y_{m,n+q}$.

Мета цієї статті — дослідити умови, при виконанні яких для довільної (p,q)-періодичної послідовності $\{y_{m,n}\} \subset B$ різницеве рівняння

$$Ex_{m,n} = \sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} E_{k,l}x_{m+k,n+l} + y_{m,n}, \quad m,n \in Z, \tag{1}$$

має єдиний (p,q)-періодичний розв'язок $\{x_{m,n}\} \subset D$. Тут $\{E_{k,l}:\ k,l \in Z\}$ — такий фіксований набір операторів з $\mathcal{L}(B)$, що $\sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z}\|E_{k,l}\| < +\infty$.

Про існування періодичних розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі, що залежать від одного параметра, див. [1, 2].

2. Формулювання основного результату. Внаслідок (p,q)-періодичності рівняння (1) можна подати у вигляді лінійної системи зі скінченним числом невідомих:

$$y_{m,n} = Ex_{m,n} - \sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} E_{k,l}x_{m+k,n+l} = \sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{q} H_{\mu,\nu}x_{m+\mu,n+\nu}, \tag{2}$$

де

$$H_{\mu,\nu} = \delta_{\mu p}\delta_{\nu q}E - \sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} E_{\mu+pk,\nu+ql}, \quad 1 \le m \le p, \quad 1 \le n \le q, \quad \delta_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s, \\ 0, & r \ne s. \end{cases}$$

Систему (2) можна переписати у вигляді матричного рівняння

$$\overline{y} = \mathbf{T}\,\overline{x}, \tag{3}$$

в якому

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \dots \\ y^{(p-1)} \\ y^{(p)} \end{pmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \dots \\ x^{(p-1)} \\ x^{(p)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_p & T_1 & T_2 & \dots & T_{p-2} & T_{p-1} \\ T_{p-1} & T_p & T_1 & \dots & T_{p-3} & T_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_2 & T_3 & T_4 & \dots & T_p & T_1 \\ T_1 & T_2 & T_3 & \dots & T_{p-1} & T_p \end{pmatrix},$$

до того ж для кожного $1 \leq m \leq p$

$$y^{(m)} = \begin{pmatrix} y_{m,1} \\ y_{m,2} \\ \dots \\ y_{m,q-1} \\ y_{m,q} \end{pmatrix}, \quad x^{(m)} = \begin{pmatrix} x_{m,1} \\ x_{m,2} \\ \dots \\ x_{m,q-1} \\ x_{m,q} \end{pmatrix},$$

$$T_m = \begin{pmatrix} H_{m,q} & H_{m,1} & H_{m,2} & \dots & H_{m,q-2} & H_{m,q-1} \\ H_{m,q-1} & H_{m,q} & H_{m,1} & \dots & H_{m,q-3} & H_{m,q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{m,2} & H_{m,3} & H_{m,4} & \dots & H_{m,q} & H_{m,1} \\ H_{m,1} & H_{m,2} & H_{m,3} & \dots & H_{m,q-1} & H_{m,q} \end{pmatrix}.$$

У рівнянні (3) $\overline{y} \in B^{pq}$, $\overline{x} \in D^{pq}$, де B^{pq}, D^{pq} — декартові добутки pq екземплярів B та D відповідно. У цих декартових добутках визначимо норми таким чином:

$$\|\overline{y}\|_{pq} = \max_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q} \|y_{i,j}\|, \quad \overline{y} = \{y_{i,j} : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\} \in B^{pq},$$

$$|\overline{x}|_{pq} = \max_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q} \|x_{i,j}\| + \max_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q} \|Ex_{i,j}\|, \quad \overline{x} = \{x_{i,j} : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\} \in D^{pq}.$$

Тоді $(B_{pq}, \|\cdot\|_{pq})$ і з урахуванням замкненості оператора E $(D_{pq}, |\cdot|_{pq})$ — комплексні банахові простори, а $\mathbf{T} : D^{pq} \to B^{pq}$ — лінійний обмежений оператор.

Позначимо через Θ множину всіх наборів операторів $\{F_{k,l} : 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q\}$, які задовольняють такі умови:

1) $\forall\, 1 \leq k \leq p \,\forall\, 1 \leq l \leq q : F_{k,l} : B \to D$, $E\,F_{k,l} \in L(B)$;

2) на B виконуються рівності

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} H_{k,l}F_{m-k+1,n-l+1} = \delta_{pm}\delta_{qn}\mathbf{I}, \quad 1 \leq m \leq p, \quad 1 \leq n \leq q; \tag{4}$$

3) на D виконуються рівності

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} F_{m-k+1,n-l+1}H_{k,l} = \delta_{pm}\delta_{qn}\mathbf{I}, \quad 1 \leq m \leq p, \quad 1 \leq n \leq q. \tag{5}$$

Покладемо

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_{p-1} & C_p \\ C_p & C_1 & C_2 & \dots & C_{p-2} & C_{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_3 & C_4 & C_5 & \dots & C_1 & C_2 \\ C_2 & C_3 & C_4 & \dots & C_p & C_1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де

$$C_m = \begin{pmatrix} F_{m,1} & F_{m,2} & F_{m,3} & \dots & F_{m,q-1} & F_{m,q} \\ F_{m,q} & F_{m,1} & F_{m,2} & \dots & F_{m,q-2} & F_{m,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m,3} & F_{m,4} & F_{m,5} & \dots & F_{m,1} & F_{m,2} \\ F_{m,2} & F_{m,3} & F_{m,4} & \dots & F_{m,q} & F_{m,1} \end{pmatrix}, \quad 1 \le m \le p. \tag{7}$$

Також для спрощення записів далі вважатимемо, що для довільних $m, n \in Z$

$$F_{m,n} = F_{m+p,n} = F_{m,n+q}, \quad H_{m,n} = H_{m+p,n} = H_{m,n+q},$$

і покладемо $w_p := \exp\left\{\dfrac{i2\pi}{p}\right\}$, $w_q := \exp\left\{\dfrac{i2\pi}{q}\right\}$.

Теорема 1. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) існує такий набір операторів $\{F_{k,l} :\ 1 \le k \le p, 1 \le l \le q\} \in \Theta$, *що визначений за допомогою цього набору та співвідношень (6), (7) оператор* $\mathbf{C}$ *діє з* B^{pq} *в* D^{pq}, *є лінійним і неперервним, а також для кожного* $\overline{y} \in B^{pq}$ *рівняння (1) має розв'язок* $\overline{x} = \mathbf{C}\,\overline{y}$;

2) для довільних $1 \le \mu \le p$, $1 \le \nu \le q$ *оператор*

$$D_{\mu,\nu} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{k\mu} w_q^{l\nu} \tag{8}$$

діє з D *в* B *і є лінійним, неперервним та неперервно оборотним;*

3) оператор $\mathbf{T}$ *неперервно оборотний.*

3. Доведення теореми 1. Імплікація $1) \Rightarrow 3)$ випливає з того, що матриця $\mathbf{C}$ обернена до $\mathbf{T}$ за побудовою внаслідок співвідношень (4), (5).

Перевіримо, що $1) \Rightarrow 2)$. Будемо доводити, що $D_{\mu,\nu}$ має обернений оператор $D_{\mu,\nu}^{-1} \in L(B, D)$. У співвідношенні (4) вираз з $H_{1,1}F_{m,n}$ домножимо на $w_p^{m\mu} w_q^{n\nu}$. Отримані рівності підсумуємо по m, n і отримаємо

$$\sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} F_{m-k+1,n-l+1} w_p^{m\mu} w_q^{n\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{k\mu} w_q^{l\nu} \left(\sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} F_{m-k+1,n-l+1} w_p^{(m-k)\mu} w_q^{(n-l)\nu} \right) =$$

$$= D_{\mu,\nu} \left(\sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{q} F_{r,s} w_p^{(r-1)\mu} w_q^{(s-1)\nu} \right) = \mathbf{I}$$

на B. Аналогічно з рівняння (5) знаходимо

$$\left(\sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} F_{r,s} w_p^{(r-1)\mu} w_q^{(s-1)\nu}\right) D_{\mu,\nu} = \mathbf{I}$$

на D.

З останніх двох співвідношень випливає, що оператор $D_{\mu,\nu}$ має неперервний обернений оператор

$$D_{\mu,\nu}^{-1} = \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} F_{r,s} w_p^{(r-1)\mu} w_q^{(s-1)\nu}. \tag{9}$$

Доведемо імплікацію $2) \Rightarrow 1)$. Задамо $F_{r,s}$ таким чином:

$$F_{r,s} = \frac{1}{pq} \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{q} D_{\mu,\nu}^{-1} w_p^{(p-r+1)\mu} w_q^{(q-s+1)\nu}. \tag{10}$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} F_{m-k+1,n-l+1} = \frac{1}{pq} \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{k\mu} w_q^{l\nu}\right) D_{\mu,\nu}^{-1} w_p^{(p-m)\mu} w_q^{(q-n)\nu} =$$

$$= \frac{1}{pq} \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{q} w_p^{(p-m)\mu} w_q^{(q-n)\nu} \mathbf{I} = \delta_{pm}\delta_{qn}\mathbf{I},$$

а отже, рівності (4) виконуються. Перевірка рівностей (5) проводиться аналогічно. Імплікацію $3) \Rightarrow 2)$ будемо доводити від супротивного. Нехай $D_{\mu,\nu}$ не має оберненого. З теореми Банаха про обернений оператор випливає, що виконується одна з умов:

а) існують $y \in B$ та $x_1, x_2 \in D$ такі, що $x_1 \neq x_2$, $D_{\mu,\nu}x_1 = y$, $D_{\mu,\nu}x_2 = y$;

б) існує $y \in B$ таке, що рівняння $D_{\mu,\nu}x = y$ не має розв'язків.

При виконанні умови а) покладемо $u := x_1 - x_2 \in D$. Тоді

$$D_{\mu,\nu} u = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{k\mu} w_q^{l\nu} u = 0$$

і для

$$\overline{u} := (u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{1,q}, u_{2,1}, u_{2,2}, \ldots, u_{2,q}, \ldots, u_{p,1}, u_{p,2}, \ldots, u_{p,q})^T, \quad u_{k,l} = w_p^{k\mu} w_q^{l\nu} u,$$

$$(\mathbf{T}\,\overline{u})_{(r-1)q+s} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{(k+r)\mu} w_q^{(l+s)\nu} u = w_p^{r\mu} w_q^{s\nu} D_{\mu,\nu}(u) = 0, \quad 1 \leq r \leq p, \quad 1 \leq s \leq q.$$

Отже, $\mathbf{T}\overline{u} = \overline{0}$, до того ж $\overline{u} \neq \overline{0}$. Це суперечить твердженню 3 теореми 1.

При виконанні умови б) розглянемо $\overline{y}$ з компонентами $y_{m,n} = w_p^{m\mu} w_q^{n\nu} y$, $1 \le m \le p$, $1 \le n \le q$. Рівняння $\mathbf{T}\overline{x} = \overline{y}$ має єдиний розв'язок. Тому для довільних $m, n \in Z$

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} x_{m+k,n+l} w_p^{-m\mu} w_q^{-n\nu} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{k\mu} w_q^{l\nu} x_{m+k,n+l} w_p^{(-m-k)\mu} w_q^{(-n-l)\nu} = y. \quad (11)$$

Від рівності (11) з $m = m_0 + r$, $n = n_0 + s$ віднімемо рівність (11) з $m = m_0$, $n = n_0$. Дістанемо

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{k\mu} w_q^{l\nu} u_{m_0+k,n_0+l} = 0, \quad m_0, n_0 \in Z, \quad (12)$$

де

$$u_{m_0,n_0} = x_{m_0+r,n_0+s} w_p^{(-m_0-r)\mu} w_q^{(-n_0-s)\nu} - x_{m_0,n_0} w_p^{-m_0\mu} w_q^{-n_0\nu}.$$

Тим же методом, що й при доведенні леми 1 з роботи [2], можна довести, що

$$x_{r,s} = x_{p,q} w_p^{r\mu} w_q^{s\nu}, \quad r, s \in Z.$$

Тому внаслідок (11) дістанемо

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{k\mu} w_q^{l\nu} (x_{p,q} w_p^{(m+k)\mu} w_q^{(n+l)\nu}) w_p^{(-m-k)\mu} w_q^{(-n-l)\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} H_{k,l} w_p^{k\mu} w_q^{l\nu} x_{p,q} = D_{\mu,\nu}(x_{p,q}) = y,$$

що суперечить умові б).

Теорему доведено.

Оскільки

$$D_{\mu,\nu} = E - \sum_{k\in Z} \sum_{l\in Z} E_{k,l} \exp\left\{\frac{i2\pi k\mu}{p}\right\} \exp\left\{\frac{i2\pi l\nu}{q}\right\},$$

то справджується такий наслідок.

Наслідок 1. *Для того щоб для довільної (p, q)-періодичної послідовності $\{y_{m,n}\} \subset B$ рівняння (1) мало єдиний (p, q)-періодичний розв'язок $\{x_{m,n}\} \subset D$, необхідно і достатньо, щоб для довільних $\lambda_1, \lambda_2 \in C$ таких, що $\lambda_1^p = 1$, $\lambda_2^q = 1$, оператор $g(\lambda_1, \lambda_2) := E - \sum_{k\in Z} \sum_{l\in Z} E_{k,l} \lambda_1^k \lambda_2^l$ був неперервно оборотним.*

4. Приклади. ***Приклад 1.*** Система лінійних рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} \frac{(i\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{(2l)!} x_{2k+1+m,2l+n} + y_{m,n} = 0, \quad m, n \in Z,$$

має для довільної (p, q)-періодичної послідовності комплексних чисел $\{y_{m,n}\}$ єдиний (p, q)-періодичний розв'язок $\{x_{m,n}\}$ для довільних натуральних p, q таких, що p не ділиться на 4.

Справді, поклавши $B = C$, $E := 0$,

$$E_{2k+1,2l} := (-1)^{k+l} \frac{(\pi i)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{(2l)!}$$

для невід'ємних $k, l \in Z$ і $E_{m,n} := 0$ для решти індексів $m, n \in Z$, дістанемо $g(\lambda_1, \lambda_2) = \sin(\pi i \lambda_1) \cos \lambda_2 = 0$, тому твердження прикладу 1 випливає з наслідку 1.

Приклад 2. Нехай $B = C([0,1])$, $D = \{x \in C^1([0,1]) : x(0) = 0\}$, замкнений оператор $E : D \to B$ визначається за правилом $Ex(t) := x'(t)$, $t \in [0,1]$. Нехай для невід'ємних $k, l \in Z$ оператор $E_{k,l} : B \to B$ задається формулою $E_{k,l}x(t) := \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} x(t)$, $t \in [0,1]$, а для решти $k, l \in Z$ оператор $E_{k,l}$ є нульовим. Скориставшись наслідком 1, дістанемо, що для довільних натуральних p, q зліченна система диференціальних рівнянь

$$x'_{m,n}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} x_{k+m,l+n}(t) + y_{m,n}(t), \quad t \in [0,1], \quad m, n \in Z,$$

має для довільної (p,q)-періодичної послідовності функцій $\{y_{m,n}\} \subset B$ єдиний (p,q)-періодичний розв'язок $\{x_{m,n}\} \subset D$.

Дійсно, для цього прикладу $g(\lambda_1, \lambda_2)x(t) = x'(t) - e^{\lambda_1 + \lambda_2} x(t)$, $t \in [0,1]$, а отже, оператор $g(\lambda_1, \lambda_2)$ є неперервно оборотним для довільних $\lambda_1, \lambda_2 \in C$.

1. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — Київ: Вища шк., 1992. — 319 с.

2. *Городній М. Ф.* Періодичні та майже періодичні розв'язки одного різницевого рівняння // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2001. — № 4. — С. 114–117.

Одержано 08.05.09