В . Н . Ю р ч у к

О РАЗЛИЧИИ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ КОЛОКОЛООБРАЗНЫХ ВОЛН ПРИ ИХ РАСПРОСТРАНЕНИИ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ КОМПОЗИТАХ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: reol@inmech.kiev.ua

Abstract. For the problem on evolution of the nonlinear elastic plane longitudinal and transverse waves of displacement, a statement is proposed, an analysis of numerical results is carried out, and a data is compared. The 18 variants of initial parameters are studied numerically – two variants of composite materials, three variants of the wave bottom length, three variants of initial maximal amplitude. For each variant, the 3D plots «displacement – passed by wave distance – time of wave propagation» are built. An attention is concentrated on difference in evolution of longitudinal and transverse waves.

Key words: nonlinear plane longitudinal and transverse waves, approximate method, bell-shaped wave profile, difference in wave evolutions.

1. Постановка задачи.

В данном исследовании будем придерживаться подхода к анализу упругих плоских волн в материалах, которые деформируются нелинейно в рамках описания нелинейности потенциалом Мурнагана. Этот подход представлен в [1, 2] и использован применительно к одиночным волнам колоколообразного профиля: к продольной – в [3] и к поперечной – в [4]. Однако сравнение эволюции профиля этих волн не было проведено. Эволюция оказывается существенно разной, чему и посвящено данное сообщение.

Исходными нелинейными волновыми уравнениями являются квадратично нелинейные уравнения, полученные в виде второго приближения [2] при условии движения волн в направлении оси абсцисс

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)\, u_{1,11} = N_1\, u_{1,11} u_{1,1} + N_2 \left(u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1} \right); \tag{1}$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu\, u_{2,11} = N_2 \left(u_{2,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{2,1} \right);\ \rho u_{3,tt} - \mu\, u_{3,11} = N_2 \left(u_{3,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{3,1} \right); \tag{2}$$

$$N_1 = \left[3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C) \right];\ N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2) A + B\, ; \tag{3}$$

u_k – смещения; $\lambda,\ \mu,\ A,\ B,\ C$ – упругие постоянные модели Мурнагана.

Ограничим далее анализ задачей, когда первоначально в материале возбуждается лишь продольная или вертикально поляризованная поперечная волна. Тогда уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)\, u_{1,11} = N_1\, u_{1,11} u_{1,1} \to u_{1,tt} - (c_L)^2\, u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}\, ; \tag{4}$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = 0 \to u_{3,tt} - (c_T)^2\, u_{3,11} = 0\ , \tag{5}$$

где скорости линейных плоских продольной и поперечной волн обозначены как $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho},\ c_T = \sqrt{\mu/\rho}$.

Из вида уравнения (4) следует, что оно нелинейное, тогда как из вида уравнения (5) следует, что оно линейное. Поэтому уравнение (4) позволяет изучать нелинейные волновые эффекты, а уравнение (5) – нет. Для изучения нелинейных волновых эффектов при движении поперечной волны используется следующее после приближения (3), (4) нелинейное приближение [2]

$$\rho u_{3,tt}-\mu u_{3,11}=N_2\left(u_{3,11}u_{1,1}+u_{1,11}u_{3,1}\right)+N_4\,u_{3,11}\left(u_{3,1}\right)^2+N_5\,u_{3,11}\left(u_{1,1}\right)^2+N_6\,u_{3,11}\left(u_{2,1}\right)^2; \tag{6}$$

$$N_4=(1/2)\left[2(\lambda+2\mu)+5A+14B+4C\right];\ N_5=(3/2)(\lambda+2\mu+A+2B),\ N_6=3A+10B+4C.$$

Если первоначально возбуждается лишь поперечная волна, то уравнение (6) упрощается к виду

$$\rho u_{3,tt}-\mu u_{3,11}=N_4\,u_{3,11}\left(u_{3,1}\right)^2\to u_{3,tt}-\left(c_T\right)^2u_{3,11}=\left(N_4/\rho\right)u_{3,11}\left(u_{3,1}\right)^2. \tag{7}$$

Таким образом, сами постановки задач об эволюции плоских продольной и поперечной волн различны – простейшее волновое уравнение для продольной волны содержит квадратично нелинейную составляющую, тогда как для поперечной волны – кубически нелинейную.

2. Приближенный численный подход к анализу эволюции колоколообразного профиля волны.

Представим уравнение (4) в виде

$$u_{1,tt}-\left\{\left(c_L\right)^2+\left(N_1/\rho\right)u_{1,1}\right\}u_{1,11}=0\to u_{1,tt}-\left[1+\alpha_L u_{1,1}\right]\left(c_L\right)^2u_{1,11}=0,\ \alpha=\left[N_1/(\lambda+2\mu)\right] \tag{8}$$

и уравнение (7) в подобном (8) виде

$$u_{3,tt}-\left(c_T\right)^2u_{3,11}=\left(N_4/\rho\right)u_{3,11}\left(u_{3,1}\right)^2\to u_{3,tt}-\left[1+\alpha_T\left(u_{3,1}\right)^2\right]\left(c_T\right)^2u_{3,11}=0,\alpha_T=\left(N_4/\mu\right). \tag{9}$$

Далее для профиля волны в виде колокола приближенное решение уравнений (8) и (9) получается по одинаковой процедуре и имеет вид [4, 5]

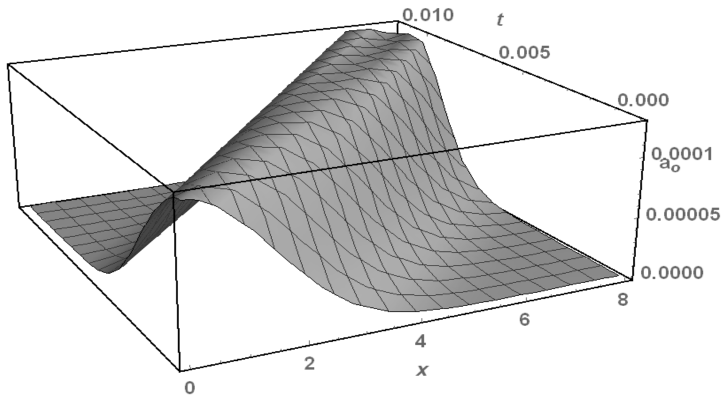
$$u_1\left(x_1,t\right)=A_L^o e^{-\left[a_L^2\left(x_1-c_Lt\right)^2/2\right]}-(1/2)t\alpha_L c_L a^2\left(x_1-c_Lt\right)^2\left(A_L^o\right)^2e^{-a_L^2\left(x_1-c_Lt\right)^2}; \tag{10}$$

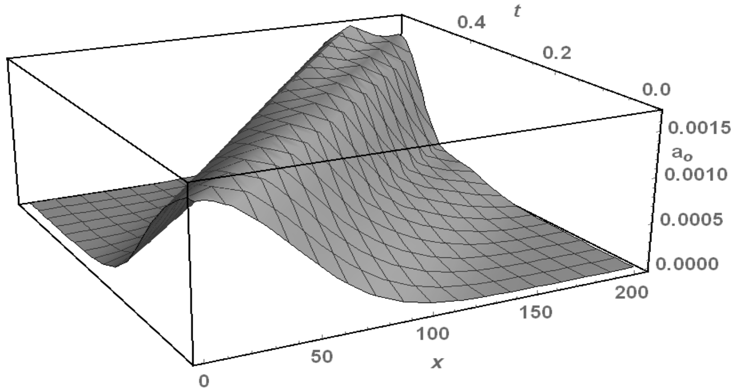
$$u_3\left(x_1,t\right)\approx u_3^o e^{-(\sigma^o)^2\left(x_1-c_3t\right)^2/2}+(1/2)t\alpha_3c_3(\sigma^o)^3\left(x_1-c_3t\right)^3(u_3^o)^3e^{-3(\sigma^o)^2\left(x_1-c_3t\right)^2/2}. \tag{11}$$

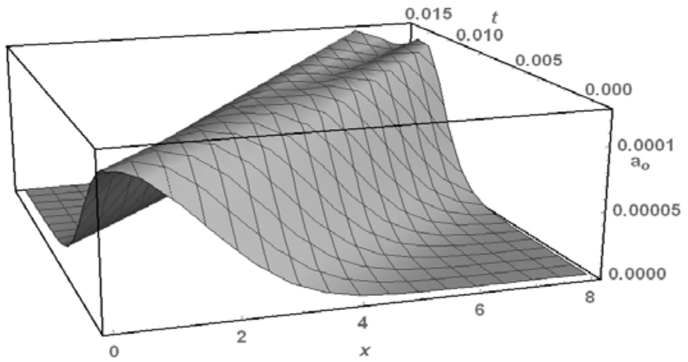
При анализе профилей (10), (11) понятия первой, второй и третьей гармоник неприменимы и функции $e^{-a^2\sigma^2/2}$, $e^{-a^2\sigma^2}$, $e^{-3a^2\sigma^2/2}$ ($\sigma=x_1-c_Lt$ – фаза волны) можно считать гармониками весьма условно, но структура приближенных решений (10), (11) достаточно подобна структуре подобных решений для гармонической волны [2].

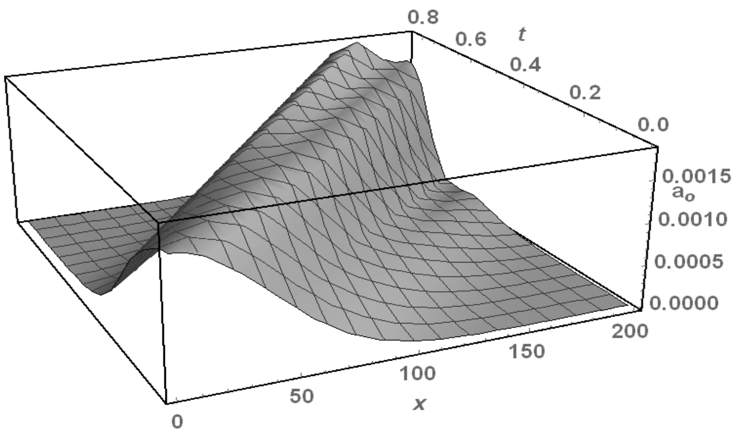
Выберем с целью численного анализа два композитных материала с такими параметрами в рамках модели Мурнагана (система СИ) [1 – 3]. Материал 21 «матрица полистирол – гранулы медь; объемное содержание матрицы и гранул: 0,2 и 0,8» – $\rho=0{,}179\cdot10^4$, $\lambda=0{,}0222\cdot10^{10}$, $\mu=0{,}0424\cdot10^{10}$, $A=-19{,}58\cdot10^{10}$, $B=-17{,}04\cdot10^{10}$, $C=$ $=-15{,}34\cdot10^{10}$. Материал 51 «матрица алюминий – гранулы вольфрам; объемное содержание матрицы и гранул: 0,2 и 0,8» $\rho=0{,}378\cdot10^4$, $\lambda=0{,}022\cdot10^{10}$, $\mu=0{,}043\cdot10^{10}$, $A=-3{,}970\cdot10^{10}$, $B=-15{,}24\cdot10^{10}$, $C=-70{,}10\cdot10^{10}$.

Для колоколообразной одиночной волны примем предположение, что длиной подошвы волны L является интервал (расстояние), для которого площадь под графиком начального профиля волны вне этого интервала ничтожно мала. Тогда для функции Гаусса (колоколообразной функции) $e^{-(x^2/2\bar\sigma^2)}=e^{-[(x/\bar\sigma)^2/2]}$ по правилу $3\bar\sigma$ длина подошвы профиля равна $6\bar\sigma$. Поэтому в представлении профиля параметр a определяет длину подошвы по формуле $\sigma=(1/a)$. Для рассмотренных материалов начальная подошва выбрана одинаковой.


t
0.010
0.005
0.000
a_o
0.0001
0.00005
0.0000
x
0
2
4
6
8


t
0.4
0.2
0.0
a_o
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
x
0
50
100
150
200


t
0.015
0.010
0.005
0.000
a_o
0.0001
0.00005
0.0000
x
0
2
4
6
8


t
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
a_o
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
x
0
50
100
150
200

По формулам (10), (11) построены трехмерные графики с координатами «смещение u_1 – пройденное волной расстояние x_1 – время распространения t». Всего 18 наборов (2 материала, 3 варианта подошвы волны, 3 варианта максимальной начальной амплитуды). На рисунке приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров: материалы 21 и 51, $L = 0{,}15$, $a = 2/3$, $a_o = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ для продольной волны и $L = 0{,}15$, $a = 1/40$, $a_o = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ для поперечной волны.

Из графиков следует, что решение (10) существенно зависит от фазы σ и описывает эволюцию таким образом: начальный симметричный профиль деформируется симметрично, средняя часть профиля расширяется – он как бы «полнеет», сохраняя подошву неизменной.

Решение (11) существенно зависит от фазы σ: в разных точках профиля его изменение происходит по-разному, но нелинейная добавка всегда антисимметрична. В вершине колокола изменение отсутствует (максимальная амплитуда профиля неизменна). Однако в других, симметричных относительно вершины точках профиля, профиль изменяется несимметрично: правая часть профиля расширяется («полнеет»), тогда как левая часть профиля сужается («худеет»).

Проведен сравнительный числовой анализ одиночных нелинейных упругих плоских продольной и поперечной волн смещения колоколообразного профиля. Общим для эволюции этих волн является искажение профиля вследствие нелинейного взаимодействия волны самой с собой. Различия проявляются как в описании волновыми уравнениями, так и в сценарии эволюции. Эволюция происходит для каждой волны по-своему.

Р Е З Ю М Е . Описано теоретично, проаналізовано і зіставлено отримані результати для задачі про еволюцію нелінійно пружних плоских поздовжньої і поперечної хвиль дзвіноподібного профіля. Чисельно вивчено 18 варіантів початкових параметрів –два варіанти композитного матеріалу, три варіанти довжини підошви хвилі, три варіанти початкової максимальної амплітуди. Для кожного варіанту побудовані тривимірні графіки «зміщення – пройдена хвилею відстань – час поширення хвилі». Акцентовано увагу на відмінності в еволюції поздовжньої та поперечної хвиль.

1. *Рущицький Я.Я., Цурпал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
3. *Rushchitsky J.J. Cattani C., Sinchilo S.V.* Physical Constants for One Type of Nonlinearly Elastic Fibrous micro and Nanocomposites with Hard and Soft Nonlinearities // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 12. – P. 1368 – 1377.
4. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* An Approximate Method for Analysis of Solitary Waves in Nonlinear Elastic Materials // Int. App. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 282 – 289.
5. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N3. – P. 300 – 305.
6. *Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J.* Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 104 – 110.

Поступила 28.12.2017 Утверждена в печать 22.11.2018