УДК 512

Т. Р. Сейфуллин

Корневые функционалы на 1-мерном многообразии

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Летичевским)

For a system of $(n-1)$ polynomials in n variables, we consider a bilinear operation of generation of root functionals which allows one to obtain the third root functional from two root functionals.

Здесь мы будем использовать определения, обозначения и соглашения, данные в работах [1, 2]. В дальнейшем вместо обозначения $\mathbf{R}[x^{\leqslant d}]$ будем использовать обозначение $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $y \simeq x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$. Пусть $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$.*

Положим $R(x,y) = \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla F(x,y) \right\|$. Тогда:

1) $R(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]^{\leqslant \delta_f + d}$;

2) $R(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d}$ независимо от выбора $\nabla F(x,y)$ и определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d}$ и слагаемого вида $(F(x) - F(y)) \cdot \Omega(x,y)$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$, где $\Omega(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]^{\leqslant \delta_f}$ и не зависит от $F(x)$.

Доказательство 1. Поскольку $\nabla F(x,y)$ является ковектором полиномов степеней $\leqslant d-1$, $\nabla f_i(x,y)$ является ковектором полиномов степеней $\leqslant \deg(f_i) - 1$ для $i = 1, n-1$, то $R(x,y)$ имеет степень $\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1} (\deg(f_i) - 1) + (\deg(F) - 1) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n \right) + \deg(F) \leqslant \delta_f + d$.

Доказательство 2. Поскольку $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, то в силу *3* леммы 2 из [2] неоднозначность $\nabla F(x,y)$ имеет вид $\widehat{u}\nabla' F(x,y) = \widehat{u}\nabla F(x,y) + \sum\limits_{k,l} ((x_k - y_k) \cdot \widehat{u}_l - (x_l - y_l) \cdot \widehat{u}_k) \cdot U^{kl}(x,y)$, где $k < l$, и $U^{kl}(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]^{\leqslant d-2}$. Тогда $R(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого

$$\sum_{k,l} \pm \det \begin{Vmatrix} \nabla^{\neq k,l} f(x,y) & 0 \\ \nabla^k f(x,y) & -(x_l - y_l) \\ \nabla^l f(x,y) & (x_k - y_k) \end{Vmatrix} \cdot U^{kl}(x,y) =$$

$$= \sum_{k,l} \pm \det \begin{Vmatrix} \nabla^{\neq k,l} f(x,y) \\ (x_k - y_k)\nabla^k f(x,y) + (x_l - y_l)\nabla^l f(x,y) \end{Vmatrix} \cdot U^{kl}(x,y) =$$

$$= \sum_{k,l} \pm \det \begin{Vmatrix} \nabla^{\neq k,l} f(x,y) \\ f(x) - f(y) \end{Vmatrix} \cdot U^{kl}(x,y) = \sum_i (f_i(x) - f_i(y)) \cdot \omega^i(x,y),$$

здесь $\omega^i(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]^{\leqslant \delta_f + d - \deg(f_i)}$ и не зависит от $f_i(x)$. Третий определитель равен второму определителю, так как получается из второго путем добавления к последней строке линейной комбинации остальных строк, т. е. $((x_k - y_k)\nabla^k f_i(x,y) + (x_l - y_l)\nabla^l f_i(x,y)) +$

$+\sum\limits_{m:\neq k,l}(x_m-y_m)\nabla^m f_i(x,y) = \sum\limits_m (x_m-y_m)\nabla^m f_i(x,y) = f_i(x)-f_i(y)$ для $i = 1,\ n-1$.

Полученный полином принадлежит $(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$. Таким образом, при неоднозначности $\nabla F(x,y)$ полином $R(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$.

Меняя местами $f_j(x)$ и $F(x)$ в вышедоказанном утверждении, мы получаем, что при неоднозначности $\nabla f_j(x,y)$ полином $R(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого вида $\sum\limits_{i\neq j}(f_i(x)-f_i(y))\cdot\omega^i(x,y)+(F(x)-F(y))\cdot\Omega(x,y)$, где $\omega^i(x,y)\in\mathbf{R}[x,y]^{\leqslant\delta_f+d-\deg(f_i)}$, $\Omega(x,y)\in\mathbf{R}[x,y]^{\leqslant\delta_f+d-d}=\mathbf{R}[x,y]^{\leqslant\delta_f}$ и не зависит от $F(x)$. Таким образом, при неоднозначности $\nabla f(x,y)$ полином $R(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$ и слагаемого вида $(F(x)-F(y))\cdot\Omega(x,y)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $y\simeq x=(x_1,\ldots,x_n)$, $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\deg(f_i)-n$.

Положим $T_x(x,y)=\det\left\|\nabla f(x,y)\quad \nabla_x(x,y)\right\|$. *Тогда:*

1) $T_x(x,y).\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}\subseteq\mathbf{R}[x,y]^{\leqslant\delta_f+d}$ *для любого* $d\in\mathbb{Z}$;

2) отображение $T_x(x,y)$ *определяется однозначно с точностью слагаемого* $Q_x^1(x,y)$ *независимо от выбора* $\nabla_x(x,y)$ *и определяется однозначно с точностью до слагаемого вида* $\Omega(x,y)\cdot(\mathbf{1}_x(x)-\mathbf{1}_x(y))+Q_x^2(x,y)$ *независимо от выбора* $\nabla f(x,y)$*; здесь* $\Omega(x,y)\in\mathbf{R}[x,y]^{\leqslant\delta_f}$*, и отображение* $Q_x^p(x,y)\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[x],\mathbf{R}[x,y])$ *такое, что* $Q_x^p(x,y).\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}\subseteq(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}\subseteq(f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$ *для любого* $d\in\mathbb{Z}$*, где* $p=1,2$;

3) $T_x(x,y).(f(x))_x^{\leqslant d}\subseteq(f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$ *для любого* $d\in\mathbb{Z}$;

4) пусть $F_1(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1}$, $F_2(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$*, тогда разности*

$$T_x(x,y).F_1(x)\cdot F_2(x)-(T_x(x,y).F_1(x))\cdot F_2(x)-F_1(y)\cdot(T_x(x,y).F_2(x)),$$

$$T_x(x,y).F_1(x)\cdot F_2(x)-(T_x(x,y).F_1(x))\cdot F_2(y)-F_1(x)\cdot(T_x(x,y).F_2(x))$$

принадлежат $(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d_1+d_2}\subseteq(f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d_1+d_2}$;

5) пусть $H(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta}$*, тогда* $(H(x)-H(y))\cdot T_{x'}(x,y)-(T_x(x,y).H(x))\cdot(\mathbf{1}_{x'}(x)-\mathbf{1}_{x'}(y))$ *такое отображение, что образ* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$ *этого отображения лежит в* $(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+\delta+d}\subseteq(f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+\delta+d}$.

Доказательство 1. Пусть $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, тогда в силу *1* леммы 1 $T_x(x,y).F(x)=\det\left\|\nabla f(x,y)\quad\nabla F(x,y)\right\|\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+d}$, следовательно, $T_x(x,y).\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+d}$, где $\nabla F(x,y)=\nabla_x(x,y).F(x)$.

Доказательство 2. Пусть $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$. Пусть $\nabla'_x(x,y)$ — другой оператор разностной производной, положим $T'_x(x,y)=\det\left\|\nabla f(x,y)\quad\nabla'_x(x,y)\right\|$, $Q_x^1(x,y)=T'_x(x,y)-T_x(x,y)$, $\nabla F(x,y)=\nabla_x(x,y).F(x)$, $\nabla' F(x,y)=\nabla'_x(x,y).F(x)$. Тогда в силу первой части *2* леммы 1 $Q_x^1(x,y).F(x)=\det\left\|\nabla f(x,y)\quad\nabla' F(x,y)\right\|-\det\left\|\nabla f(x,y)\quad\nabla F(x,y)\right\|\in(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$. Таким образом, при неоднозначности $\nabla_x(x,y)$ отображение $T_x(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $Q_x^1(x,y)$ такого, что $Q_x^1(x,y).\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}\subseteq(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$.

Пусть $\nabla' f_i(x,y)$ — другая разностная производная $f_i(x)$ для $i=1,\ n-1$, положим $T'_x(x,y)=\det\left\|\nabla' f(x,y)\quad\nabla_x(x,y)\right\|$, тогда в силу второй части *2* леммы 1 имеет место $T'_x(x,y).F(x)-T_x(x,y).F(x)-\Omega(x,y)\cdot(\mathbf{1}_x(x)-\mathbf{1}_x(y)).F(x)=\det\left\|\nabla' f(x,y)\quad\nabla F(x,y)\right\|-\det\left\|\nabla f(x,y)\quad\nabla F(x,y)\right\|-(F(x)-F(y))\cdot\Omega(x,y)\in(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$ для некоторого

$\Omega(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]^{\leqslant \delta_f}$, которое не зависит от $F(x)$. Положим $Q_x^2(x,y) = T_x'(x,y) - T_x(x,y) - \Omega(x,y) \cdot (\mathbf{1}_x(x) - \mathbf{1}_x(y))$. Тогда последнее выражение равно $Q_x^2(x,y).F(x)$. Следовательно, $Q_x^2(x,y).\mathbf{R}[x]^{\leqslant d} \subseteq (f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d}$. Таким образом, при неоднозначности $\nabla f(x,y)$ отображение $T_x(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $\Omega(x,y)\cdot(\mathbf{1}_x(x)-\mathbf{1}_x(y)) + Q_x^2(x,y)$, где $\Omega(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]^{\leqslant \delta_f}$ и $Q_x^2(x,y)$ такое, что $Q_x^2(x,y).\mathbf{R}[x]^{\leqslant d} \subseteq (f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d}$.

Доказательство 3. Положим $R(x,y) = T_x(x,y).F(x) = \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla F(x,y) \right\|$. Пусть $F(x) = f(x)g(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d}$, тогда в силу *2* леммы 2 из [2] $F(x)$ обладает также разностной производной $\nabla' F(x,y) = \nabla f(x,y) g(x) + f(y) \nabla g(x,y)$, она является ковектором полиномов степеней $\leqslant d-1$. Положим $R'(x,y) = \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla' F(x,y) \right\|$, тогда

$$R'(x,y) = \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla f(x,y) \cdot g(x) + f(y) \nabla g(x,y) \right\| =$$
$$= \det \left\| \nabla f(x,y) \quad f(y) \nabla g(x,y) \right\| = \sum_i f_i(y) \cdot \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla g^i(x,y) \right\|.$$

Так как $f(x)g(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d}$, то $g^i(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d - \deg(f_i)}$, тогда в силу *1* леммы 1 имеет место $\det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla g^i(x,y) \right\| \in \mathbf{R}[x,y]^{\leqslant \delta_f + d - \deg(f_i)}$, следовательно, $R'(x,y) \in (f(y))_{x,y}^{\leqslant d + \delta_f}$.

В силу первой части *2* леммы 1 имеет место $R(x,y) - R'(x,y) \in (f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant d+\delta_f}$, следовательно, $R(x,y) \in (f(x), f(y))_{x,y}^{\leqslant d+\delta_f}$. Таким образом, $T_x(x,y).(f(x))_x^{\leqslant d} \subseteq (f(x), f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d}$.

Доказательство 4. Положим $F(x) = F_1(x) \cdot F_2(x)$. Тогда в силу *2* леммы 2 из [2] $F(x)$ обладает также разностной производной $\nabla' F(x,y) = \nabla F_1(x,y) \cdot F_2(x) + F_1(y) \cdot \nabla F_2(x,y)$, она является ковектором полиномов степеней $\leqslant (d_1 + d_2) - 1$, тогда $\det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla' F(x,y) \right\|$ равен

$$\det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla F_1(x,y) \right\| \cdot F_2(x) + F_1(y) \cdot \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla F_2(x,y) \right\| =$$
$$= (T_x(x,y).F_1(x)) \cdot F_2(x) + F_1(y) \cdot (T_x(x,y).F_2(x)).$$

В силу первой части *2* леммы 1 разность определителей $T_x(x,y) = \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla F(x,y) \right\|$ и $\det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla' F(x,y) \right\|$ есть полином из $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d_1 + d_2}$. Таким образом, имеет место первое равенство утверждения. Второе равенство утверждения получается из первого путем подстановки в него $F_1(x) \mapsto F_2(x)$ и $F_2(x) \mapsto F_1(x)$.

Доказательство 5.

$$\begin{aligned}
(H(x) - H(y)) \cdot T_x(x,y) &= (H(x) - H(y)) \cdot \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla_x(x,y) \right\| = \\
&= \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) & \nabla_x(x,y) & \nabla H(x,y) \\ 0 & 0 & H(x) - H(y) \end{Vmatrix} = \\
&= -\det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) & \nabla_x(x,y) & \nabla H(x,y) \\ f(x) - f(y) & \mathbf{1}_x(x) - \mathbf{1}_x(y) & 0 \end{Vmatrix} = \\
&= (T_x(x,y).H(x)) \cdot (\mathbf{1}_x(x) - \mathbf{1}_y(y)) + U_x(x,y),
\end{aligned}$$

где $U_x(x,y) = -\det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) & \nabla_x(x,y) & \nabla H(x,y) \\ f(x) - f(y) & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, при этом образ $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$ этого отображения лежит в $(f(x) - f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + \delta + d}$, $T_x(x,y).H(x) = \det \left\| \nabla f(x,y) \quad \nabla H(x,y) \right\|$.

Определение 1. При условиях теоремы 1 $\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla_x(x,y)\|$ назовем отображением T для $(\nabla f,\nabla)$, или для f. Обычно такие отображения будем обозначать $T_x(x,y)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $y \simeq x = (x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\deg(f_i) - n$.

Пусть функционал $L(x_*)$ *аннулирует* $(f(x))_x$, *и аннулирует* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle-1}$, *где* $\triangle \geqslant 0$.

Положим $T_x(x,y) = \det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla_x(x,y)\|$, $H(x) = L(y_*).T_x(x,y).F(x)$.

1) Если $F(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d}$, *то* $H(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d-\triangle+\delta_f}$.

Доказательство 1. Поскольку $F(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d}$, то в силу *3* теоремы 1 $T_x(x,y).F(x) \in \in (f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$, тогда $H(x) \in L(y_*).(f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d} \subseteq (f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\triangle+d}$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $y \simeq x = (x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\deg(f_i) - n$.

Пусть функционалы $L_1(x_*)$ *и* $L_2(x_*)$ *аннулируют* $(f(x))_x$.

Положим $L(x_*) = L_1(x_*).L_2(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla_x(x,y)\|$. *Тогда*

1) $L(x_*)$ *аннулирует* $(f(x))_x$.

Доказательство 1. $L(x_*) = L_1(x_*).L_2(y_*).T_x(x,y)$. Если $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$, $L_2(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y$, то $L_1(x_*).L_2(y_*).(f(x)-f(y))_{x,y} = \{0\}$. Тогда $L(x_*).(f(x))_x = = L_1(x_*).L_2(y_*).T_x(x,y).(f(x))_x = 0$, так как в силу *3* теоремы 1 имеет место $T_x(x,y).(f(x))_x \subseteq (f(x)-f(y))_{x,y}$, а также так как $L_1(x_*).L_2(y_*).(f(x)-f(y))_{x,y} = \{0\}$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $y \simeq x = (x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\deg(f_i) - n$. *Пусть* $T_{x'}(x,y) = \det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla_{x'}(x,y)\|$ *является* T *отображением для* f.

1. Имеет место кокоммутативность с отклонением, т. е. $T'_{x'}(x,y) = T_{x'}(y,x)$ *является* T *отображением для* f, *при этом*

$$T_{x'}(x,y) - T_{x'}(y,x) = \Omega(x,y)\cdot(\mathbf{1}_{x'}(x) - \mathbf{1}_{x'}(y)) + P_{x'}(x,y),$$

где $\Omega(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]^{\leqslant\delta_f}$, *отображение* $P_x(x,y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[x],\mathbf{R}[x,y])$ *такое, что имеет место* $P_x(x,y).\mathbf{R}[x]^{\leqslant d} \subseteq (f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d} \subseteq (f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$ *для любого* $d \in \mathbb{Z}$.

Также имеет место $\Omega(x,y) - \Omega(y,x) \in (f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f}$.

Обозначим $T^+_{x'}(x,y) = T_{x'}(x,y) + \Omega(x,y)\cdot\mathbf{1}_{x'}(y)$ *и* $T^-_{x'}(x,y) = T_{x'}(x,y) - \Omega(x,y)\cdot\mathbf{1}_{x'}(x)$. *Имеет место*

$$(\Omega(x,y) - \Omega(y,x))\cdot(\mathbf{1}_{x'}(x) - \mathbf{1}_{x'}(y)) = -(P_{x'}(x,y) - P_{x'}(y,x));$$

$$T^+_{x'}(x,y) - T^+_{x'}(y,x) = P_{x'}(x,y) + (\Omega(x,y) - \Omega(y,x))\cdot\mathbf{1}_{x'}(x);$$

$$T^-_{x'}(x,y) - T^-_{x'}(y,x) = P_{x'}(x,y) - (\Omega(x,y) - \Omega(y,x))\cdot\mathbf{1}_{x'}(y);$$

таким образом, имеет место более точная кокоммутативность: $T^+_{x'}(x,y) - T^+_{x'}(y,x)$ *и* $T^-_{x'}(x,y) - T^-_{x'}(y,x)$ *такие отображения, что для любого* $d \in \mathbb{Z}$ *образ* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$ *при этих отображениях лежит в* $(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d} \subseteq (f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$.

Назовем такой $\Omega(x,y)$ *коммутаторным полиномом для* $(\nabla f,\nabla)$.

Доказательство 1. В силу *1* леммы 2 из [2] $\nabla' f_i(x,y) = \nabla f_i(y,x)$ является полуоднородной (монотонной) разностной производной полинома $f_i(x)$ для $i = 1,\, n-1$, $\nabla'_x(x,y) = = \nabla_x(y,x)$ является полуоднородным (монотонным) оператором разностной производной.

Следовательно, $T'_{x'}(x,y)=T_{x'}(y,x)=\det\left\|\nabla f(y,x)\quad \nabla_{x'}(y,x)\right\|=\det\left\|\nabla' f(x,y)\quad \nabla'_{x'}(x,y)\right\|$ является T отображением для f. В силу *2* теоремы имеет место *1* $T_{x'}(x,y)-T_{x'}(y,x)=$ $=T_{x'}(x,y)-T'_{x'}(x,y)=\Omega(x,y)\cdot(\mathbf{1}_{x'}(x)-\mathbf{1}_{x'}(y))+P_{x'}(x,y)$, где $\Omega(x,y)\in\mathbf{R}[x,y]^{\leqslant\delta_f}$, и $P_{x'}(x,y)\in$ $\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[x'],\mathbf{R}[x,y])$ такое, что $P_{x'}(x,y).\mathbf{R}[x']^{\leqslant d}\subseteq(f(x)-f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$.

Утверждение $\Omega(x,y)-\Omega(y,x)\in(f(x),f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f}$ будет доказано в последующих работах. Остальные утверждения легко получаются из предшествующих.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $z\simeq y\simeq x=(x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\deg(f_i)-n$. *Положим* $T_x(x,y)=\det\left\|\nabla f(x,y)\quad \nabla_x(x,y)\right\|$.

1. Имеет место коассоциативность с отклонением, т. е.

$$
\begin{aligned}
&T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z)-T_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x')=\\
&\qquad=W^1(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x)-\mathbf{1}_{x''}(z))+\Omega(y,z)\cdot T_{x''}(x,z)+Q^1_{x''}(x,y,z)=\\
&\qquad=W^2(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x)-\mathbf{1}_{x''}(z))+\Omega(x,y)\cdot T_{x''}(x,z)+Q^2_{x''}(x,y,z),\\
&T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z)-T^+_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x')=W^1(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x)-\mathbf{1}_{x''}(z))+Q^1_{x''}(x,y,z),\\
&T^-_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z)-T_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x')=W^2(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x)-\mathbf{1}_{x''}(z))+Q^2_{x''}(x,y,z),\\
&T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z)-T_{x'}(x,z).T_{x''}(x',y)=W^3(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(y)-\mathbf{1}_{x''}(z))+Q^3_{x''}(x,y,z),
\end{aligned}
$$

где $\Omega(x,y)$ *является коммутаторным полиномом для* $(\nabla f,\nabla)$, *отображение* $Q^p_x(x,y,z)\in$ $\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[x],\mathbf{R}[x,y,z])$ *такое, что* $Q^p_x(x,y,z).\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}\subseteq(f(x),f(y),f(z))_{x,y,z}^{\leqslant 2\delta_f+d}$ *для любого* $d\in\mathbb{Z}$, $W^p(x,y,z)\in\mathbf{R}[x,y,z]^{\leqslant 2\delta_f}$, *здесь* $p=1,2,3$.

Доказательство 1. Пятое равенство утверждения доказывается трудоемко, первое и второе равенства утверждения получаются из пятого несложно, но эти доказательства будут даны в последующих работах. Третье равенство утверждения получается из первого равенства утверждения следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&T^+_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x')=(T_{x'}(y,z)+\Omega(y,z)\cdot\mathbf{1}_{x'}(z)).T_{x''}(x,x')=\\
&\qquad=T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z)-W^1(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x)-\mathbf{1}_{x''}(z))-\Omega(y,z)\cdot T_{x''}(x,z)+\\
&\qquad\quad+Q^1_{x''}(x,y,z)+\Omega(y,z)\cdot T_{x''}(x,z)=\\
&\qquad=T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z)-W^1(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x)-\mathbf{1}_{x''}(z))-Q^1_{x''}(x,y,z).
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом четвертое равенство утверждения получается из второго равенства утверждения.

Обозначение 1. Пусть имеют место условия и обозначения теоремы 1, $l(x_*)$, $L(x_*)\in$ $\in\mathbf{R}[x]_*$, $F(x)\in\mathbf{R}[x]$, обозначим

$$
\begin{aligned}
&l(x_*)*L(x_*)=l(x_*).L(y_*).T_x(x,y), &&L(x_*)*F(x)=L(y_*).T_x(x,y).F(x);\\
&l(x_*)\overset{+}{*}L(x_*)=l(x_*).L(y_*).T^+_x(x,y), &&L(x_*)\overset{+}{*}F(x)=L(y_*).T^+_x(x,y).F(x);\\
&l(x_*)\overset{-}{*}L(x_*)=l(x_*).L(y_*).T^-_x(x,y), &&L(x_*)\overset{-}{*}F(x)=L(y_*).T^-_x(x,y).F(x).
\end{aligned}
$$

1. *Сейфуллин Т. Р.* Корневые функционалы и корневые полиномы системы полиномов // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 5–8.
2. *Seifullin T. R.* Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Там же. – 2002. – No 7. – С. 35–42.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.02.2007

УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Приближенный анализ одной пространственной, конвективной задачи теплопроводности

The problem of three-dimensional stationary convection in the liquid phase is investigated. A method of studying this problem by means of the expansion in a small Reynolds number is proposed. In this case, the zero and first expansion terms are defined by the Ritz method. A formula of the dependence of the free-boundary equation on the Reynolds number is obtained.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — заданная область в R^3, граница которой состоит из двух связных компонент Γ^+ и Γ^-, причем замкнутая поверхность Γ^+ ограничивает непустую область, замыкание которой лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^-. Поверхности $\Gamma^{\pm}$ предполагаются принадлежащими классу $C^{3+\alpha}$ и не имеющими самопересечений. Задача Стефана при наличии конвективных движений в жидкой фазе состоит в нахождении скорости жидкости $\vec{V}(x)) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$, давления $p(x)$, распределения температур $u^{\pm}(x)$ и свободной поверхности Γ по следующим условиям:

$$\lambda(\vec{V}\nabla)u^+(x) = \kappa\nabla^2 u^+(x), \qquad x \in \Omega^+, \qquad \nabla^2 u^-(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1}$$

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V}(x) + \nabla p(x) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x) + \vec{f}(u^+), \quad x \in \Omega^+, \quad \operatorname{div}\vec{V}(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \tag{2}$$

$$\vec{V}|_{x\in\Gamma\cup\Gamma^+} = 0, \tag{3}$$

$$u^{\pm}(x)|_{x\in\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x), \tag{4}$$

$$u^+ = u^- = 1, \qquad x \in \Gamma, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u^-}{\partial\vec{n}}\right|_{\Gamma} - \kappa\left.\frac{\partial u^+}{\partial\vec{n}}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{6}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\Omega^{\pm}$ — области жидкой и твердой фазы, на которые разбивает область Ω свободная граница раздела фаз Γ, причем $\partial\Omega^{\pm} = \Gamma\bigcup\Gamma^{\pm}$, т. е. Γ лежит между Γ^+ и Γ^-, ограничивая область, содержащую Γ^+, и Γ предполагается не имеющая самопересечений и лежащая внутри области Ω; $\vec{n}$ — единичная нормаль к Γ, направленная в сторону Ω^+; $B^{\pm}(x)$ — заданные функции на $\Gamma^{\pm}$, принадлежащие классу $C^{3+\alpha}(\Gamma^{\pm})$ и удовлетворяющие условию $\pm(B^{\pm}(x) - 1)|_{x\in\Gamma^+} \geqslant \varepsilon_0 > 0$. В задаче (1)–(6) параметры κ, Re, λ, ε_0 предполагаются