https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.009
УДК 517.53

В.В. Савчук [1], М.В. Савчук [2]

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] НТУ України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”
E-mail: savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

Опис класу Шура в термінах коефіцієнтів ряду за базисом Лагера

Представлено академіком НАН України А.М. Самойленком

Класичний критерій Шура дає відповідь на питання, чи є функція f, задана своїм степеневим рядом $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$, функцією Шура, тобто голоморфною в одиничному крузі $\mathbb{D}$ і такою, що $\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|\leqslant 1$. Стосовно цього критерію є велика кількість завершених результатів про його узагальнення і важливі застосування, але, на думку авторів, немає жодного критерію для повного описання класу Шура в термінах коефіцієнтів ортоногальних рядів за довільними повними ортонормованими системами. У даній роботі сформульовано такий критерій для формального ортогонального ряду з комплексними коефіцієнтами за базисом Лагера.

Ключові слова: *голоморфна функція, простір Гарді, функція Шура, клас Шура, базисна система Лагера.*

У даній роботі наведено один результат і низку наслідків, що стосується такої задачі.

Задача про коефіцієнти. *Нехай* $\varphi=\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— повна ортонормована система в просторі Гарді* H^2 *(див. означення нижче) і нехай*

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k \tag{1}$$

— формальний ортогональний ряд з комплексними коефіцієнтами. Якими є необхідні та достатні умови на послідовність коефіцієнтів $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ *для того, щоб сума* f *ряду* (1) *була функцією Шура, тобто була голоморфною функцією в крузі* $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ *і задовольняла умову* $\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|\leqslant 1$*?*

І. Шур [1] дав низку розв’язків задачі про коефіцієнти у випадку, коли система φ має вигляд $\varphi_k(z)=z^k$, а ряд (1) є формальним степеневим рядом. Одним із цих розв’язків є таке твердження (див. міркування про співвідношення (26) в [1]).

Цитування: Савчук В.В., Савчук М.В. Опис класу Шура в термінах коефіцієнтів ряду за базисом Лагера. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 11. С. 9—15. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.009

Теорема Шура. *Сума формального степеневого ряду* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *з комплексними коефіцієнтами є функцією Шура тоді і тільки тоді, коли нерівність*

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n} c_{j-k}\lambda_j\right|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|^2$$

справджується для всіх цілих $n \geqslant 0$ *і будь-якої послідовності комплексних чисел* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Ми розширимо цей критерій на випадок, коли система φ є базисною системою Лагера в крузі $\mathbb{D}$. Нагадаємо необхідні для цього поняття.

Нехай $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ і нехай $d\sigma$ — нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$. Простір Гарді H^p, $1 \leqslant p < \infty$, складається з усіх голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$\|f\|_p := \sup_{0<\rho<1}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(\rho t)|^p\, d\sigma\infty(t)\right)^{1/p} < \infty,$$

а H^∞ — це простір обмежених голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f з нормою $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|$.

Добре відомо, що функції з H^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ мають майже скрізь на $\mathbb{T}$ недотичні граничні значення, які позначатимемо так само f, причому $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Нехай a — фіксована точка у крузі $\mathbb{D}$. Система $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ голоморфних функцій

$$\varphi_k(z) := \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-z\bar{a}}\left(\frac{z-a}{1-z\bar{a}}\right)^k \qquad (2)$$

називається базисом Лагера в просторі Гарді H^2. Така назва закріпилася в сучасній літературі, мабуть, під впливом робіт [2, 3] (див. також історичні коментарі в [4, с. 163—165]), в яких використовувалася та ідея, що аналог системи (1) для простору Гарді у правій півплощині

$$\tilde{\varphi}_k(s) := \frac{\sqrt{2\alpha}}{s+\alpha}\left(\frac{s-\alpha}{s+\alpha}\right)^k, \quad \alpha > 0, s \in \mathbb{H}_+ := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta > 0\},$$

є перетворенням Лапласа ортонормованої на $\mathbb{R}_+$ системи функцій

$$\psi_k(x) = \sqrt{2\alpha}\, e^{-\alpha x} L_k(2\alpha x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де

$$L_k(t) := \frac{e^t}{k!}\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^k)$$

— многочлени Лагера.

У випадку $a = 0$ базис Лагера збігається з базисом Тейлора, тобто $\varphi_k(z) = z^k$.

Скрізь далі ми будемо ототожнювати базис Лагера φ з точкою a, яка його породжує за правилом (2).

Система Лагера є повною ортонормованою системою в H^2. Додаймо до цього ще таке

Твердження 1. *Нехай* $a \in \mathbb{D}$ *і* $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — *система Лагера. Тоді для кожної голоморфної в* $\mathbb{D}$ *функції* f *:*

1) справджується рівність $f = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_a(k)\varphi_k$ *, в якій ряд збігається рівномірно і абсолютно всередині* $\mathbb{D}$, *а коефіцієнти* $\hat{f}_a(k)$ *визначаються як коефіцієнти Тейлора функції* $z \mapsto \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1+z\overline{a}}(f \circ w_a)(z)$, де $w_a(z) := \frac{z+a}{1+z\overline{a}}$;

2) для кожного цілого $k \geqslant 0$ *виконується рівність*

$$\hat{f}_a(k) = \sqrt{1-|a|^2} \lim_{\rho \to 1-} \int_{\mathbb{T}} \frac{(f \circ \rho w_a)(t)}{1+t\overline{a}} \overline{t^k} d\sigma(t) = \sqrt{1-|a|^2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (1-|a|^2)^j (-\overline{a})^{k-j};$$

3) *якщо* $f \in H^1$, *то* $\hat{f}_a(k) = \int_{\mathbb{T}} f \overline{\varphi}_k d\sigma$.

Твердження 1 показує, що базис Лагера має основні властивості степеневої системи (базису Тейлора) — свого частинного випадку при $a = 0$, зокрема, властивість відтворення будь-якої голоморфної функції f за інформацією про її коефіцієнти $\hat{f}_a(k)$.

Основним результатом цієї роботи є

Теорема 1. *Нехай* $a \in \mathbb{D}$, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — *система Лагера і* $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ — *послідовність комплексних чисел. Сума ряду* (1) *є функцією Шура тоді і тільки тоді, коли нерівність*

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} c_{j-k} \lambda_j \right|^2 \leqslant (1-|a|^2) \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} (-\overline{a})^{j-k} \lambda_j \right|^2 \tag{3}$$

справджується для всіх цілих $n \geqslant 0$ *і будь-якої послідовності комплексних чисел* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$.

У випадку $a = 0$, маючи на увазі, що $0^0 = 1$, з теореми 1 легко одержуємо теорему Шура.

Позначимо B клас Шура, тобто множину всіх функцій Шура.

Наслідок 1. *Нехай* $a \in \mathbb{D}$, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — *система Лагера і* $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ — *послідовність комплексних чисел. Тоді справджується імплікація*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k \in B \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}} B.$$

Справді, сума степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} (1-|a|)(-\overline{a})^k z^k$ належить до B, оскільки

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-|a|)(-\overline{a})^k z^k = \frac{1-|a|}{1+z\overline{a}} \tag{4}$$

і

$$\left\| \frac{1-|a|}{1+\cdot\overline{a}} \right\|_{\infty} = \frac{1-|a|}{1-|a|} = 1.$$

Тому, застосувавши теорему Шура до ряду в (4), можемо продовжити далі нерівність (3), оцінивши її праву частину:

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}c_{j-k}\lambda_j\right|^2 \leqslant (1-|a|^2)\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}(-\overline{a})^{j-k}\lambda_j\right|^2 \leqslant \frac{1+|a|}{1-|a|}\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|^2 .$$

Звідси випливає нерівність

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}\sqrt{\frac{1-|a|}{1+|a|}}c_{j-k}\lambda_j\right|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|^2 ,$$

що й потрібно було довести.

Наслідок 2. *Нехай* $a\in\mathbb{D}$. *Тоді для кожного цілого* $n\geqslant 0$

$$\max_{f\in B}\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{f}_a(k)\right|^2 = 1-|a|^{2(n+1)}.$$

Максимум досягається для функцій вигляду $f=\omega=\mathrm{const}$, $|\omega|=1$.

Справді, поклавши в теоремі 1 $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-1}=0$ і $\lambda_n=1$ після елементарних перетворень одержимо оцінку зверху

$$\max_{f\in B}\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{f}_a(k)\right|^2 \leqslant 1-|a|^{2(n+1)}.$$

Для оцінки знизу візьмемо функцію $f=\omega=\mathrm{const}$, $|\omega|=1$. Тоді згідно з п. 2 твердження 1

$$f(z)=\omega=\omega\sqrt{1-|a|^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-\overline{a})^k\varphi_k(z), \tag{5}$$

а отже, $\hat{f}_a(k)=\omega\sqrt{1-|a|^2}(-\overline{a})^k$.

Таким чином, для цієї функції

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{f}_a(k)\right|^2 = (1-|a|^2)\sum_{k=0}^{n}|a|^{2k} = 1-|a|^{2(n+1)}.$$

Для формулювання наступного наслідку позначимо

$$S_{k,a}(f)(t) := \sum_{j=0}^{k}\hat{f}_a(k)\varphi_k(t).$$

Наслідок 3. *Нехай* $a\in\mathbb{D}$. *Тоді для кожного цілого* $n\geqslant 0$ *і* $t\in\mathbb{T}$

$$\max_{f\in B}\sum_{k=0}^{n}\left|S_{k,a}(f)(t)\right|^2 = \sum_{k=0}^{n}\left|1-\left(\frac{|a|^2-t\overline{a}}{1-t\overline{a}}\right)^{k+1}\right|^2. \tag{6}$$

Максимум досягається для функцій вигляду $f = \omega = \text{const}$, $|\omega| = 1$.

Справді, поклавши в теоремі 1 $\lambda_j = \varphi_j(t)$ і врахувавши, що

$$\varphi_j(t) = \left(\frac{t-a}{1-t\overline{a}} \right)^k \varphi_{j-k}(t),$$

після простих обчислень одержимо

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{k} \hat{f}_a(j)\varphi_j(t) \right|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{k} \sqrt{1-|a|^2}(-\overline{a})^j \varphi_j(t) \right|^2 = \sum_{k=0}^{n} \left| 1-(-\overline{a})^{k+1} \left(\frac{t-a}{1-t\overline{a}} \right)^{k+1} \right|^2 .$$

Згідно з (5) для функції $f = \omega = \text{const}$, $|\omega| = 1$, у цих співвідношеннях виконуються рівності.

Нижченаведене твердження є аналогом знаменитого результату Л. Фейєра, про норму $(C, 1)$ середніх Чезаро ряду Тейлора функцій з H^∞ .

Наслідок 4. *Нехай* $a \in \mathbb{D}$. *Тоді для кожного цілого* $n \geqslant 0$ *і* $t \in \mathbb{T}$

$$\max_{f \in B} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_{k,a}(f)(t) \right| \leqslant 1 + |a| .$$

Рівність виконується у випадку $a = 0$, *а максимум при цьому досягається для функції* $f = \omega = \text{const}$, $|\omega| = 1$,

Справді, за нерівністю Коші—Буняковського для будь-якої функції $f \in B$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} S_{k,a}(f)(t) \right| \leqslant \sqrt{n+1} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left| S_{k,a}(f)(t) \right|^2} .$$

З іншого боку, для величини в правій частині (6) маємо оцінку

$$\sum_{k=0}^{n} \left| 1 - \left(\frac{|a|^2 - t\overline{a}}{1-t\overline{a}} \right)^{k+1} \right|^2 \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n,\, t \in \mathbb{T}} \left| 1 - \left(\frac{|a|^2 - t\overline{a}}{1-t\overline{a}} \right)^{k+1} \right|^2 (n+1) = (1+|a|)^2 (n+1) .$$

Об'єднавши дві останніх нерівності, одержимо доводжуване співвідношення. Для доведення рівності у випадку, коли $a = 0$, досить зауважити, що для відповідної функції $S_{k,0}(f)(t) = 1$ при всіх k і $t \in \mathbb{T}$.

Добре відомо, що для будь-якої функції $f \in H^2, \|f\|_2 \leqslant 1$ у кожній точці $z \in \mathbb{D}$ виконується точна нерівність

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} .$$

Нижченаведений наслідок, який випливає з твердження 1, узагальнює цей факт.

Наслідок 5. *Для будь-якого цілого* $k \geqslant 0$ *і будь-якого* $z \in \mathbb{D}$

$$\max_{f \in H^2, \|f\|_2 \leqslant 1} \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{f^{(j)}(z)}{j!} (1-|z|^2)^j (-\overline{z})^{k-j} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} .$$

При даних k і z максимум досягається для функції

$$f(t)=\omega\frac{\sqrt{1-|z|^2}}{1-t\overline{z}}\cdot\left(\frac{t-z}{1-t\overline{z}}\right)^k,\quad |\omega|=1\,. \tag{7}$$

Справді, згідно з п. 2, 3 твердження 1 маємо формулу

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(1-|a|^2)^j(-\overline{a})^{k-j}=\frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}\int_{\mathbb{T}}f\overline{\varphi}_k d\sigma\,.$$

Поклавши у ній $a=z$, а потім оцінивши інтеграл справа за нерівністю Коші—Буняковського, одержимо потрібну оцінку зверху. Для оцінки знизу візьмемо функцію f, означену в (7). Для цієї функції інтеграл в останній формулі (при $a=z$) дорівнює одиниці, що й доводить точність верхньої оцінки.

У [5] дано просте доведення теореми Шура, яке ґрунтується на описі функції Шура в термінах обмеженості оператора мультиплікатора в просторі H^2. Ми використали подібну схему для доведення теореми 1. Ключовим моментом при цьому стала така

Лема 1. *Нехай* $a\in\mathbb{D}$ *і* $g\in H^2$. *Тоді для будь-якої функції* $f\in B$ *при кожному цілому* $n\geqslant 0$ *справджується нерівність*

$$\sum_{k=0}^{n}\left|(\widehat{fg})_a(k)\right|^2\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\hat{g}_a(k)\right|^2.$$

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проєктом Ф84/177-2019 Національного фонду досліджень України.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.* 1917. **147**. S. 205—232.
2. Lee Y.W. Synthesis of electric networks by means of the Fourier transforms of Laguerre functions. *J. Math. Phys.* 1932. **11**, № 1—4. P. 83—113.
3. Hille E. Bilinear formulas in the theory of the transformation of Laplace. *Compos. Math.* 1939. **6**. P. 93—102.
4. Masani P.R. Norbert Wiener: 1894—1964. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1990. 416 p.
5. Kortram R. A. A simple proof for Schur's theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2001. **129**, № 11. C. 3211—3212.

Надійшло до редакції 05.10.2020

REFERENCES

1. Schur, I. (1917). Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. J. Reine Angew. Math., 147, pp. 205-232.
2. Lee, Y. W. (1932). Synthesis of electric networks by means of the Fourier transforms of Laguerre functions. J. Math. Phys., 11, No. 1-4, pp. 83-113.
3. Hille, E. (1939). Bilinear formulas in the theory of the transformation of Laplace. Compos. Math., 6, pp. 93-102.
4. Masani, P. R. (1990). Norbert Wiener: 1894–1964. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.
5. Kortram, R. A. (2001). A simple proof for Schur's theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 129, No. 11, pp. 3211-3212.

Received 05.10.2020

V.V. Savchuk [1], *M.V. Savchuk* [2]

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] NTU of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnical Institute"
E-mail: savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

CHARACTERIZATION OF THE SCHUR CLASS
IN TERMS OF THE COEFFICIENTS
OF A SERIES ON THE LAGUERRE BASIS

The classical Schur criterion answers the question of whether a function f given by its power series $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ is a Schur function that is, holomorphic in a unit disk $\mathbb{D}$ and such that $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leqslant 1$. Regarding this criterion, there are a large number of completed results devoted to its generalizations and various applications, but, as it seems to us, there is no criterion for a complete description of the Schur class in terms of coefficients of orthogonal series on arbitrary complete orthonormal systems. In this paper, we formulate such criterion for a formal orthogonal series with complex coefficients based on the Laguerre system.

Keywords: *holomorphic function, Hardy space, Schur function, Schur class, Laguerre basis.*