

А. Я. Григоренко, Н. П. Яремченко, С. Н. Яремченко

РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛОГО ШАРА

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru*

Abstract. A problem on the stress-strain state of continuously inhomogeneous hollow sphere is considered within the spatial statement. A solution of axi-symmetrical problem is obtained by methods of spline collocation and finite elements. The stress-strain state is studied for various types of materials with varying elastic modulus along radius. The numerical results for both methods are analyzed.

Key words: continuous inhomogeneity, hollow sphere, stress-strain state, FEM, spline-collocation.

Введение.

Неоднородные материалы широко используются при проектировании различных строительных и технических конструкций. Современные технологии позволяют создавать различные материалы, характеристики которых, в частности модуль упругости, могут изменяться непрерывно вдоль некоторых направлений [2]. Исследованию цилиндров из таких материалов посвящены работы [4, 6, 7]. В работе [3] исследовано колебания слоистых полых шаров, в [5] – электроупругих полых шаров. Статья [9] посвящена исследованию температурных напряжений в электромагнитоупругих полых шарах из функционально градиентного материала.

В данной статье на основе трехмерной теории упругости (осесимметричный случай) проведем исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) полого шара на основании метода сплайн-коллокации и стандартного для этих задач метода конечных элементов, как это было сделано в [7] для цилиндра. При этом следует заметить, что чаще всего осесимметричные задачи методом конечных элементов решают в цилиндрической системе координат, используя функционалы, выведенные для цилиндров. В этой работе потенциальная энергия деформации записана в сферической системе координат, что позволило ограничиться использованием прямоугольных элементов в этой области.

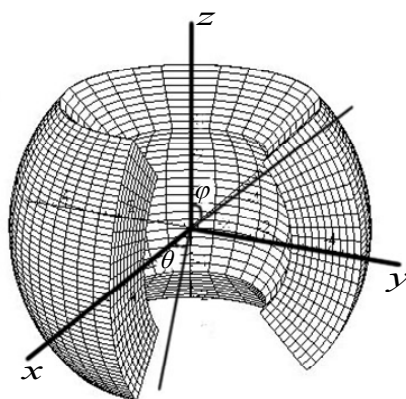


Рис. 1

1. Основные соотношения.

Рассмотрим полый ортотропный шар с внутренним радиусом $R-H$, внешним радиусом $R+H$ (R – радиус средней поверхности, $2H$ – толщина шара от внешнего до внутреннего радиуса) в сферической системе координат r, θ, φ (r – радиальная координата; θ – угол по параллели; φ – угол по меридиану, рис. 1), Пусть $0 < \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 < \pi$.

Осесимметричное НДС такого шара [1] описывают:

соотношения Коши –

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_\theta = \frac{1}{r}(u_r + u_\varphi \cot \varphi); \quad e_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right); \quad 2e_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right); \quad (1)$$

закон Гука –

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda_{11}e_r + \lambda_{12}e_\theta + \lambda_{13}e_\varphi; \quad \sigma_\theta = \lambda_{12}e_r + \lambda_{22}e_\theta + \lambda_{23}e_\varphi; \\ \sigma_\varphi &= \lambda_{13}e_r + \lambda_{23}e_\theta + \lambda_{33}e_\varphi; \quad \sigma_{r\varphi} = 2\lambda_{55}e_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

уравнения равновесия –

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta + \sigma_{r\varphi} \cot \varphi}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \cot \varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае изотропного тела элементы матрицы жесткости $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(r)$, имеют вид

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \lambda + 2\mu; \quad \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = \lambda; \quad \lambda_{55} = \mu, \quad (4)$$

где $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}$, а ν и E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга.

Граничные условия на внутренней ($r = R - H$) и внешней ($r = R + H$) поверхностях шара –

$$\sigma_r(R - H, \varphi) = q_1; \quad \sigma_r(R + H, \varphi) = q_2; \quad \sigma_{r\varphi}(R \pm H, \varphi) = 0. \quad (5)$$

Разрешающие уравнения в перемещениях, полученные подстановкой (1) в (2) и (2) в (3), будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{\lambda_{22} + \lambda_{33} + 2\lambda_{23} - \lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda'_{12}r}{\lambda_{11}r^2} u_r - \frac{\lambda_{55} \cot \varphi}{\lambda_{11}r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\lambda_{55}}{\lambda_{11}r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2\lambda_{11} + \lambda'_{11}r}{\lambda_{11}r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ &+ \frac{(\lambda_{55} - \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{23} - \lambda'_{12}r) \cot \varphi}{\lambda_{11}r^2} u_\varphi + \frac{\lambda_{33} - \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{55} - \lambda'_{13}r}{\lambda_{11}r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \\ &- \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{55}) \cot \varphi}{\lambda_{11}r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{\lambda_{13} + \lambda_{55}}{\lambda_{11}r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi}; \quad (6) \\ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} &= \frac{(\lambda_{22} - \lambda_{33}) \cot \varphi}{\lambda_{55}r^2} u_r - \frac{\lambda_{23} + \lambda_{33} + 2\lambda_{55} + \lambda'_{55}r}{\lambda_{55}r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{(\lambda_{12} - \lambda_{13}) \cot \varphi}{\lambda_{55}r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \\ &- \frac{\lambda_{55} + \lambda_{13}}{\lambda_{55}r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2\lambda_{55} + \lambda_{22} \cot^2 \varphi + \lambda_{23} + \lambda'_{55}r}{\lambda_{55}r^2} u_\varphi - \frac{\lambda_{33} \cot \varphi}{\lambda_{55}r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \\ &- \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{55}r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{2\lambda_{55} + \lambda'_{55}r}{\lambda_{55}r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Уравнения (6) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{11}u_r + a_{12} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + a_{13} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + a_{14} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{15}u_\varphi + a_{16} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + a_{17} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + a_{18} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi}; \\ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} &= a_{21}u_r + a_{22} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + a_{23} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{24} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + a_{25}u_\varphi + a_{26} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + a_{27} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + a_{28} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}, \end{aligned} \quad (7)$$

для коэффициентов $a_{kl} = a_{kl}(r, \varphi)$ имеем формулы:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\lambda_{22} + \lambda_{33} + 2\lambda_{23} - \lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda'_{12}r}{\lambda_{11}r^2}; & a_{12} &= -\frac{\lambda_{55} \cot \varphi}{\lambda_{11}r^2}; & a_{13} &= -\frac{\lambda_{55}}{\lambda_{11}r^2}; & a_{14} &= -\frac{2\lambda_{41} + \lambda'_{11}r}{\lambda_{11}r}; \\
a_{15} &= \frac{(\lambda_{55} - \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{23} - \lambda'_{12}r) \cot \varphi}{\lambda_{11}r^2}; & a_{16} &= \frac{\lambda_{33} - \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{55} - \lambda'_{13}r}{\lambda_{11}r^2}; \\
a_{17} &= -\frac{(\lambda_{12} + \lambda_{55}) \cot \varphi}{\lambda_{11}r}; & a_{18} &= -\frac{\lambda_{13} + \lambda_{55}}{\lambda_{11}r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi}; & a_{21} &= \frac{(\lambda_{22} - \lambda_{33}) \cot \varphi}{\lambda_{55}r^2}; \\
a_{22} &= -\frac{\lambda_{23} + \lambda_{33} + 2\lambda_{55} + \lambda'_{55}r}{\lambda_{55}r^2}; & a_{23} &= \frac{(\lambda_{12} - \lambda_{13}) \cot \varphi}{\lambda_{55}r}; \\
a_{24} &= -\frac{\lambda_{55} + \lambda_{13}}{\lambda_{55}r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi}; & a_{25} &= \frac{2\lambda_{55} + \lambda_{22} \cot^2 \varphi + \lambda_{23} + \lambda'_{55}r}{\lambda_{55}r^2}; & a_{26} &= -\frac{\lambda_{33} \cot \varphi}{\lambda_{55}r^2}; \\
a_{27} &= -\frac{\lambda_{33}}{\lambda_{55}r^2}; & a_{28} &= -\frac{2\lambda_{55} + \lambda'_{55}r}{\lambda_{55}r}.
\end{aligned}$$

Граничные условия (5) для контура $r = R - H$ запишем в виде:

$$\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{r} u_r + \lambda_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda_{12} \cot \varphi}{r} u_\varphi + \frac{\lambda_{13}}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = q_1; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = 0.$$

При действии на внутреннюю и внешнюю полость цилиндра давления (5) потенциальная энергия деформации имеет вид

$$\begin{aligned}
\Pi &= 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_r e_r + \sigma_\varphi e_\varphi + \sigma_\theta e_\theta) + \sigma_{r\varphi} e_{r\varphi} \right\} r^2 \sin \varphi d\varphi dr + \\
&+ 2\pi (R-H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_1 u_r \sin \varphi dz - 2\pi (R+H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_2 u_r \sin \varphi d\varphi.
\end{aligned} \tag{8}$$

Используя (1), (2) и (4) первое подынтегральное выражение (8) запишем в перемещениях, тогда имеем:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{1}{2} (\sigma_r e_r + \sigma_\varphi e_\varphi + \sigma_\theta e_\theta) + \sigma_{r\varphi} e_{r\varphi} \right\} r^2 \sin \varphi = \\
&= 2 \sin \varphi (\lambda + \mu) u_r^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right)^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \sin \varphi (\mu + (\lambda + 2\mu) \cot^2(\varphi)) u_\varphi^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \tag{9} \\
&+ \cos \varphi \lambda u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r \cos \varphi \lambda u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu) u_r u_\varphi + r \sin \varphi \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + 2 r \sin \varphi \lambda u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
&+ 2 \sin \varphi (\lambda + \mu) u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r \sin \varphi \mu \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - r \sin \varphi \mu u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \sin \varphi \mu u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

2. Методы решения.

2.1. *Сплайн-коллокация.* Краевую задачу (7) при соответствующих граничных условиях можно решить с использованием метода сплайн-коллокации. Для этого разрешающие функции $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$ представим в виде

$$u_r = u_{r_i}(r)\phi_{i_1}(\varphi), \quad u_\varphi = u_{\varphi_i}(r)\phi_{2i}(\varphi) \quad i = \overline{0, N}, \quad (10)$$

u_{r_i} , u_{φ_i} – искомые величины, а $\phi_{j_i}, j = 1, 2$ линейные комбинации нормализованных B -сплайнов на равномерной сетке, удовлетворяющие граничным условиям на краях интервала $[\varphi_1, \varphi_2]$. Здесь и далее при наличии парных индексов знак суммы будем опускать.

Подставляя (10) в (7) и удовлетворяя в некоторых точках коллокации $\xi_k \in [\varphi_1, \varphi_2] (k = \overline{0, N})$ можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_r}{dr} &= \bar{u}_r'; \quad \frac{d\bar{u}_\varphi}{dr} = \bar{u}_\varphi'; \\ \frac{d\bar{u}_r}{dr} &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{11} * \Phi_1 + \bar{a}_{12} * \Phi_1' + \bar{a}_{13} * \Phi_1'')\bar{u}_r + \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{14} * \Phi_1)\bar{u}_\varphi + \\ &+ \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{15} * \Phi_2 + \bar{a}_{16} * \Phi_2')\bar{u}_\varphi + \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{17} * \Phi_2 + \bar{a}_{18} * \Phi_2')\bar{u}_\varphi'; \\ \frac{d\bar{u}_\varphi}{dr} &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{21}\Phi_1 + \bar{a}_{22}\Phi_1')\bar{u}_r + \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{23} * \Phi_1 + \bar{a}_{24} * \Phi_1')\bar{u}_r + \\ &+ \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{25} * \Phi_2 + \bar{a}_{26} * \Phi_2' + \bar{a}_{27} * \Phi_2'')\bar{u}_r + \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{28} * \Phi_2)\bar{u}_r'. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) принято: $\bar{u}_{r_i} = u_{r_i}'$, $\bar{u}_{\varphi_i} = u_{\varphi_i}'$, $\Phi_j = [\phi_{j_i}(\xi_k)]$, $\Phi_j' = [\phi_{j_i}'(\xi_k)]$, $\Phi_j'' = [\phi_{j_i}''(\xi_k)]$, $k, i = 0, \dots, N$, $j = 1, 2$, $\bar{u}_r = \{u_{r_0}, u_{r_1}, \dots, u_{r_N}\}^T$, $\bar{u}_\varphi = \{\bar{u}_{\varphi_0}, \bar{u}_{\varphi_1}, \dots, \bar{u}_{\varphi_N}\}^T$, $\bar{u}_\varphi' = \{u_{\varphi_0}', u_{\varphi_1}', \dots, u_{\varphi_N}'\}^T$; $\bar{a}_{kl} = \{a_{kl}(r, \xi_0), a_{kl}(r, \xi_1), \dots, a_{kl}(r, \xi_N)\}^T (k = 1, 2; l = 1, \dots, 8)$, $\bar{c} * A$ – матрица, компоненты которой $(c_i a_{ij} (A = [a_{ij}] - \text{матрица}, (i, j = 0, \dots, N)$, $\bar{c} = \{c_0, c_1, \dots, c_N\}^T$ – вектор-столбец).

Более детально метод сплайн-коллокации для таких задач изложен в [6 – 8].

Аналогично можно получить и граничные условия. Далее одномерную краевую задачу решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

2.2. *Метод конечных элементов.* Для получения матрицы жесткости конечного элемента, следуя методу, представим разрешающие функции в виде

$$u_r = u_{r_i} N_i; \quad u_\varphi = u_{\varphi_i} N_i, \quad (12)$$

где u_{r_i} , u_{φ_i} – искомые значения перемещений в узлах, а N_i – функции формы, зависящие от выбранного конечного элемента. Подставим (12) в выражение (9):

$$\begin{aligned} &2 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{r_i} N_i)^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi (\lambda + 2\mu)(u_{\varphi_i} N_{\varphi_i})^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi \mu (u_{r_i} N_{\varphi_i})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sin \varphi (\mu + (\lambda + 2\mu) \cot^2 \varphi)(u_{\varphi_i} N_i)^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi (\lambda + 2\mu)(u_{r_i} N_{r_i})^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi \mu (u_{\varphi_i} N_{r_i})^2 + \\ &+ \cos \varphi \lambda (u_{\varphi_i} N_i)(u_{\varphi_i} N_{\varphi_i}) + r \cos \varphi \lambda (u_{\varphi_i} N_i)(u_{r_i} N_{r_i}) + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu)(u_{r_i} N_i)(u_{\varphi_i} N_i) + \end{aligned} \quad (13)$$

$$+r \sin \varphi \lambda (u_{r_i} N_{r_i})(u_{\varphi_i} N_{\varphi_i}) + 2r \sin \varphi \lambda (u_{r_i} N_i)(u_{r_i} N_{r_i}) + 2 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{r_i} N_i)(u_{\varphi_i} N_{\varphi_i}) +$$

$$+r \sin \varphi \mu (u_{\varphi_i} N_{r_i})(u_{r_i} N_{\varphi_i}) - r \sin \varphi \mu (u_{\varphi_i} N_i)(u_{\varphi_i} N_{r_i}) - \sin \varphi \mu (u_{\varphi_i} N_i)(u_{r_i} N_{\varphi_i});$$

здесь $N_{r_i} = \frac{\partial N_i}{\partial r}$; $N_{\varphi_i} = \frac{\partial N_i}{\partial \varphi}$;

Продифференцируем (13) по u_{r_j} , получим

$$4 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{r_i} N_i) N_j + \sin \varphi \mu (u_{r_i} N_{\varphi_i}) N_{\varphi_j} + r^2 \sin \varphi (\lambda + 2\mu)(u_{r_i} N_{r_i}) N_{r_j} +$$

$$+ 2r \sin \varphi \lambda (u_{r_i} N_{r_i}) N_j + 2r \sin \varphi \lambda (u_{r_i} N_i) N_{r_j} +$$

$$+ r \cos \varphi \lambda (u_{\varphi_i} N_i) N_{r_j} + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu)(u_{\varphi_i} N_i) N_j + r \sin \varphi \lambda (u_{\varphi_i} N_{\varphi_i}) N_{r_j} + \quad (14)$$

$$+ 2 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{\varphi_i} N_{\varphi_i}) N_j + r \sin \varphi \mu (u_{\varphi_i} N_{r_i}) N_{\varphi_j} - \sin \varphi \mu (u_{\varphi_i} N_i) N_{\varphi_j},$$

по u_{φ_j} –

$$r \cos \varphi \lambda (u_{r_i} N_{r_i}) N_j + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu)(u_{r_i} N_i) N_j + r \sin \varphi \lambda (u_{r_i} N_{r_i}) N_{\varphi_j} +$$

$$+ 2 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{r_i} N_i) N_{\varphi_j} + r \sin \varphi \mu (u_{r_i} N_{\varphi_i}) N_{r_j} - \sin \varphi \mu (u_{r_i} N_{\varphi_i}) N_j + \quad (15)$$

$$+ \sin \varphi (\lambda + 2\mu)(u_{\varphi_i} N_{\varphi_i}) N_{\varphi_j} + \sin \varphi (\mu + (\lambda + 2\mu) \cot^2 \varphi)(u_{\varphi_i} N_i) N_j + r^2 \sin \varphi \mu (u_{\varphi_i} N_{r_i}) N_{r_j} +$$

$$+ \cos \varphi \lambda ((u_{\varphi_i} N_i)(N_{\varphi_j}) + (u_{\varphi_i} N_{\varphi_i}) N_j) - r \sin \varphi \mu ((u_{\varphi_i} N_{r_i}) N_j + (u_{\varphi_i} N_i) N_{r_j}).$$

Проинтегрировав выражения (14) и (15) по площади и записав их в матричном виде, можно получить матрицы жесткости элемента. Для элементов, находящихся на границе, следует учитывать также одномерные интегралы в (8), а также граничные условия на контурах $\varphi = \text{const}$. Составив из матриц жесткости и векторов правых частей для каждого элемента ансамбль, получим систему уравнений для определения перемещений во всех узловых точках области.

3. Числовые результаты и их анализ.

С помощью изложенных подходов определим НДС полых шаров (рис. 1) с такими параметрами: внутренний радиус $R - H = 3$; внешний радиус $R + H = 5$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$. Модуль упругости изменяется по закону $E(r) = ar^2 + br + c$.

Рассмотрены такие случаи:

1) возрастающий модуль Юнга ($E(R - H) = 11E_0 / 15$, $E(R) = E_0$, $E(R + H) = 81E_0 / 50$, $a = 0,1767$, $b = -0,97$, $c = 2,053$);

2) спадающий модуль Юнга ($E(R - H) = 81E_0 / 50$, $E(R) = E_0$, $E(R + H) = 11E_0 / 15$, $a = 0,1767$, $b = -1,857$, $c = 5,6$);

3) усредненный по толщине модуль Юнга $E = 1,0589E_0$.

Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует нормальное равномерно распределенное давление $q = \text{const}$; тогда в граничных условиях (5) – $q_1 = -q$, $q_2 = 0$.

Проведем сравнение результатов решения задач с использованием МКЭ и метода сплайн-коллокации в случае, когда на контурах $\varphi_1 = \pi/6$, $\varphi_2 = 5\pi/6$ заданы условия жесткого закрепления (для модуля Юнга 1).

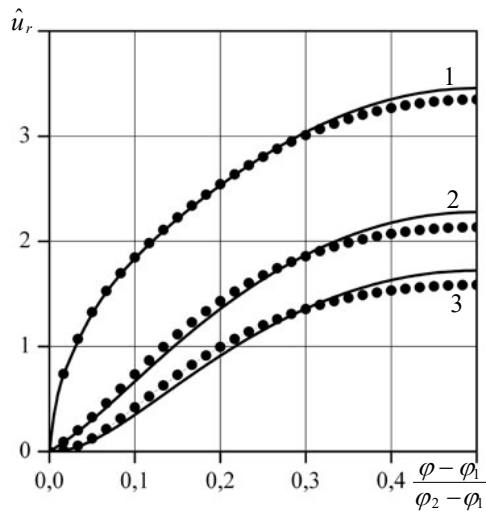


Рис. 2

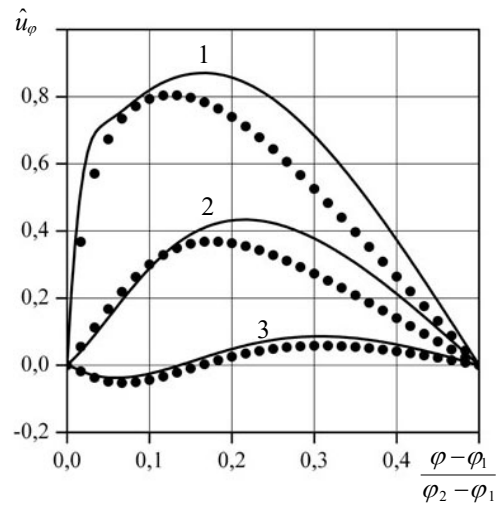


Рис. 3

На рис. 2 показаны распределения перемещений $\hat{u}_r = (u_r E_0)/q$, а на рис. 3 – $\hat{u}_\varphi = (u_\varphi E_0)/q$ на внутренней (1), внешней (3) поверхностях шара и в сечении $r = 4$ (2) вдоль меридиана; так как задача симметрична по φ , решение показано на половине отрезка. Сплошные линии – результат расчета методом сплайн-коллокации, кружочки – МКЭ. При решении методом сплайн-коллокации $N = 49$, точек интегрирования 400. При решении МКЭ отрезок по r был разделен на 20 частей, а по φ – на 60; таким образом область была разбита на 1200 «прямоугольных» четырехузловых элементов.

Из рис. 2 следует, что перемещения \hat{u}_r , полученные различными методами, отличаются незначительно; в частности, на внутренней поверхности шара различие составляет около 3%. Более заметно отличие в расчетах для \hat{u}_φ . Однако, эти перемещения примерно в три раза меньше, чем \hat{u}_r , причем на внешней поверхности шара они близки к нулю.

Также решена задача для несимметричного по φ шара, когда $\varphi_1 = \pi/20$, а $\varphi_2 = \pi/2$ при тех же граничных условиях для различных вариантов изменения модуля

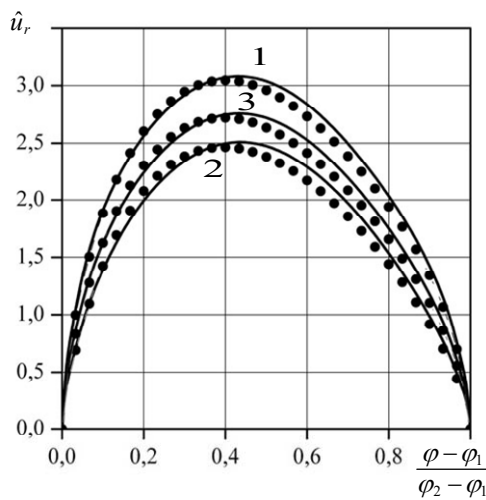


Рис. 4

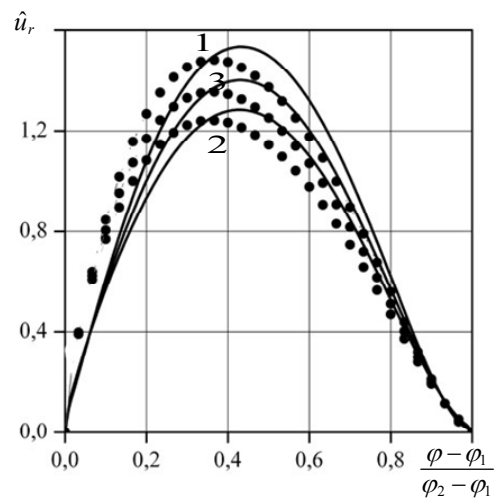


Рис. 5

упругости (1 – 3). На рис. 4 и 5 приведены графики распределения вдоль меридиана перемещений \hat{u}_r на внешней и внутренней поверхностях полого шара, соответственно. Как и следовало ожидать, перемещения \hat{u}_r для варианта 1 будут наибольшими, поскольку в зоне нагрузки модуль упругости у этого материала ниже. Также отметим, что на внешней поверхности шара (рис. 5) имеет место значительное отличие в решениях, полученных разными методами. Получено также, что максимальные перемещения отличаются мало, но графики, полученные согласно МКЭ, заметно сдвинуты. Такое поведение решений, возможно, объясняется различными способами учета жестких граничных условий разными методами.

Заключение.

В статье предложены подходы для исследования напряженно-деформированного состояния неоднородных полых шаров, с изменяющимся вдоль радиуса модулем упругости методом сплайн-коллокации и МКЭ. На их основании установлен характер распределения перемещений в зависимости от различных характеристик материала. Проведено сравнение результатов, полученных методами сплайн-коллокации и конечных элементов.

РЕЗЮМЕ. Досліджено напружено-деформований стан неперервно-неоднорідної порожнистої кулі в просторовій постановці. Методами сплайн-колокації та скінченних елементів отримано розв'язки осесиметричної задачі. Проведено дослідження НДС для різних типів матеріалів зі змінним модулем пружності вздовж радіуса. Дано аналіз числових результатів, отриманих двома різними методами.

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. – К: Вища шк., 1985. – 190 с.
2. Birman V., Byrd L. W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – 60 – P. 195 – 215.
3. Chen W.Q., Ding H.J. Free Vibration of Multi-layered Spherically Isotropic Hollow Spheres // Int. J. Mech. Sci. – 2001. – 43. – P. 667 – 680.
4. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Free Axisymmetric Vibrations of Solid Cylinders: Numerical Problem Solving // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 5. – P. 499 – 508.
5. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Willi R., Loza I.A. Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of Hollow Sphere Made of Functionally Gradient Piezoelectric Materials // Cont. Mech. and Thermodynamics – 2014. – 26. – P. 717 – 781.
6. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N. Numerical Solution of the Problem on the Stress-strain State in Hollow Cylinders by Means of Spline-approximations // Mat. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, N 3. – С. 127 – 134.
7. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Analysis of the Stress-Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 342 – 349.
8. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G. Problems of Mechanics for Anisotropic Inhomogeneous Shells on the Basis of Different Models. – К.: Academperiodika, 2009. – 550 p.
9. Ootao Y., Ishihara M. Transient Thermal Stress Problem of a Functionally Graded Magneto-Electro-Thermoelastic Hollow Sphere // Materials. – 2011. – N 4. P. 2136-2150.

Поступила 20.11.2017

Утверждена в печать 22.05.2018