

А. Н. Гузь, А. М. Багно

**ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ВОЛНЫ ЛЭМБА В СИСТЕМЕ  
«ПОЛУПРОСТРАНСТВО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ – УПРУГИЙ СЛОЙ»**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: alexbag2016@gmail.com*

**Abstract.** A statement of the problem is given and the quasi-Lamb waves propagation is studied in a pre-deformed elastic layer that interacts with the half-space of ideal compressible fluid. The results are obtained on the basis of three-dimensional equations of linearized theory of elasticity of finite deformations for the elastic layer and the three-dimensional linearized Euler equations for the ideal compressible fluid. A statement of problem and an approach are based on utilization of representations of general solutions of the linearized equations for elastic solid and fluid. The dispersion equations are obtained that describe a propagation of quasi-Lamb waves in the hydroelastic systems over the wide frequency range. An effect of initial stresses as well as half-space of ideal compressible fluid and thickness of elastic layer on the phase velocities of quasi-Lamb modes is analyzed. An approach developed and the results obtained for the wave processes allow to establish the limits of applicability of the models based on different versions of the theory of small initial deformations. The numerical results are presented in the form of graphs and their analysis is given.

**Key words:** elastic layer, half-space of ideal compressible fluid, initial stresses, quasi-Lamb waves.

**Введение.**

Разработке ультразвуковых неразрушающих методов выявления дефектов и определения напряжений в материалах и элементах конструкций посвящена обширная библиография. Отметим лишь работы, опубликованные сравнительно недавно [7, 8, 16, 17, 21, 22, 24 – 28, 30 – 32]. Указанные методы основаны на использовании закономерностей распространения акустических волн в реальных упруго-жидкостных системах. В связи с этим возникает необходимость привлечения моделей, более полно учитывающих свойства реальных упругих и жидких сред. Одной из таких моделей является модель, основанная на линеаризованной теории гидроупругости [3 – 9, 18 – 20]. Она позволяет учесть в упругих телах такой фактор, как начальные напряжения. Они, как известно, возникают в результате перехода сред из одного агрегатного состояния в другое, при действии на тела полей различной физической природы, а также в результате технологических операций при изготовлении разнообразных материалов и элементов конструкций. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в упругих телах начальных напряжений, приведены в [3, 4, 6 – 8, 10 – 13, 15, 19, 23, 29].

В данной работе для исследования распространения квазилэмбовских волн в гидроупругой системе, состоящей из полупространства жидкости и упругого слоя, привлекаются модели предварительно напряженного тела и идеальной сжимаемой жидкости. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для твердого тела и трехмерные линеаризованные уравнения Эйлера для жидкости. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и предварительно напряженного упругого тела, предложенные в работах [3 – 9, 18 – 20].

### §1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассматриваем такие динамические процессы в гидроупругой системе, при которых возникающие дополнительные деформации, т.е. возмущения деформаций, значительно меньше начальных. Исследуем гармонические волновые процессы малой амплитуды. При этом примем, что упругое тело находится в начальном состоянии. Заметим, что в отличие от твердых тел, соотношения которых записаны в лагранжевых координатах, равенства для жидкой среды записываются в эйлеровых координатах, введенных в естественном состоянии жидкости. Следует подчеркнуть, что начальное состояние упругого тела при рассмотрении гидроупругой задачи является естественным состоянием по отношению к жидкости и системе в целом. Поскольку в дальнейшем исследуем распространение малых возмущений, то, как известно, в этом случае подходы Эйлера и Лагранжа в описании поведения сред совпадают. Поэтому ниже не делаем различий между лагранжевыми и эйлеровыми координатами и характерные для нелинейных задач трудности при записи граничных условий при указанных двух подходах не возникают.

Далее предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем  $(-\infty < z_1 < \infty, -h \leq z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$  и контактирует с полупространством идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 < \infty, -\infty < z_3 < \infty)$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений движения упругого тела и жидкости при таких динамических

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \tilde{Q}_1|_{z_2=-h} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=-h} = 0 \quad (1.1)$$

и кинематическом

$$v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \quad (1.2)$$

граничных условиях. Здесь введены следующие обозначения:  $\tilde{Q}_i$  и  $\tilde{P}_i$  – составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости.

### §2. Методика решения.

Воспользуемся постановками задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями и идеальной жидкости, а также представлениями общих решений, предложенными в работах [3 – 9, 18 – 20]. В дальнейшем исследуем волновые процессы в предварительно деформированных сжимаемых и несжимаемых упругих телах, взаимодействующих с идеальной жидкостью, начальное состояние которых является однородным. В случае однородного напряженно-деформированного состояния для плоского случая общие решения имеют вид [3 – 9, 18 – 20]:

1) для упругого слоя из несжимаемого материала –

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[ \lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

2) для упругого слоя из сжимаемого материала –

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2};$$

$$u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

3) для полупространства идеальной сжимаемой жидкости –

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

где введенные функции  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

1) для упругого слоя из несжимаемого материала –

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2 \lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0;$$

2) для упругого слоя из сжимаемого материала –

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

3) для полупространства идеальной сжимаемой жидкости –

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Здесь и выше введены такие обозначения:  $u_i$  – компоненты вектора смещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  – плотность материала упругого слоя;  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  – величины, определяемые из уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [3, 4, 6, 7];  $\lambda_i$  – удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей;  $\bar{\sigma}_{ii}^0$  ( $s_{ii}^0 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0) / \lambda_i^2$ ) – начальные напряжения;  $v_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$  относительно состояния покоя;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя.

Заметим, что для упругих тел приведенные соотношения относительно возмущений являются линейными, однако величины начального состояния, входящие в них, определяются из общих нелинейных уравнений. В связи с этим, несмотря на то, что основные соотношения приведены в координатах начального деформированного со-

стояния  $z_i$  и все величины отнесены к размерам тела в этом состоянии, общая постановка задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями в координатах  $z_i$  по форме аналогична формулировке линейных задач классической теории гидроупругости; есть и существенные различия, которые относятся к структуре уравнений и граничных условий, входящих в нее.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн  $\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)]$  ( $j = \overline{1, 2}$ ), где  $k$  – волновое число;  $\omega$  – круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. В дальнейшем для каждой из гидроупругих систем решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1.1) и (1.2) получаем однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнявая определители систем к нулю, получаем дисперсионные уравнения. Для упруго-жидкостной системы, упругий слой которой из несжимаемого материала, дисперсионное соотношение имеет вид

$$\det \left\| \theta_{lm}(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}). \quad (2.1)$$

Для упруго-жидкостной системы, упругий слой которой из сжимаемого материала, аналогичное уравнение будет таким:

$$\det \left\| \tilde{\theta}_{lm}(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}), \quad (2.2)$$

где  $c$  – фазовая скорость нормальных волн в гидроупругой системе с предварительно напряженным упругим слоем;  $h$  – толщина упругого слоя;  $c_s (c_s^2 = \mu/\rho)$  – скорость волны сдвига в ненапряженном упругом теле;  $\mu$  – модуль сдвига материала упругого тела.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхностях контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Отметим, что дисперсионные уравнения (2.1) и (2.2) не зависят от формы упругого потенциала и получены для несжимаемых и сжимаемых упругих тел, подверженных большим (конечным) начальным деформациям. Они являются наиболее общими и из них можно получить соотношения для ряда частных случаев [1, 4 – 8, 15, 23]. Если положить  $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$ , то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли – Шольте и Лэмба [1].

### §3. Числовые результаты.

В дальнейшем дисперсионные уравнения (2.1) и (2.2) решаем численно. При этом расчеты проводим для *трех гидроупругих систем*. *Первая* состоит из эластичной резины и воды. Ее механические параметры выбираем следующими: упругий слой –  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; полупространство жидкости –  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ . Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резина) является податливым, мягким и несжимаемым. *Вторая* состоит из органического стекла и воды. Она характеризуется следую-

щими параметрами: упругий слой –  $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; полупространство жидкости –  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = 1,152595$ . У этого волновода материал упругого слоя (оргстекло) является жестким. Третья представляет собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбираем такими: упругий слой –  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ; жидкость –  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = 0,463021$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь) относится к разряду более жестких, чем оргстекло.

Заметим, что уравнения (2.1) и (2.2) выведены без введения каких-либо дополнительных ограничений к виду функции упругого потенциала, поэтому они справедливы для упругих потенциалов произвольной формы. В данной работе при численном решении уравнения (2.1) для описания упругих свойств резины применялся потенциал Трелоара [3 – 8, 10, 12, 15, 19, 23]. Для оргстекла и стали использовался потенциал Мурнагана, зависящий от трех алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина [3 – 8, 10 – 13, 15, 19, 23]. При рассмотрении конкретных примеров и численного решения уравнения (2.2) учитывалось то обстоятельство, что оргстекло и сталь, не разрушаясь, не допускают больших деформаций и поэтому коэффициенты уравнений состояния  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  определены в рамках линейного акустического приближения [3 – 8, 19, 22].

Результаты проведенных вычислений представлены в виде графиков на рис. 1 – 14.

На рис. 1 – 4 представлены графики, полученные для гидроупругой системы, состоящей из слоя резины (податливый материал) и воды.

На рис. 1 графики отражают влияние жидкости на волновой процесс. Здесь приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных квази-лэмбовских волн  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) при отсутствии начальных напряжений ( $\lambda_1 = 1$ ). При этом сплошные линии соответствуют гидроупругой системе. Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью.

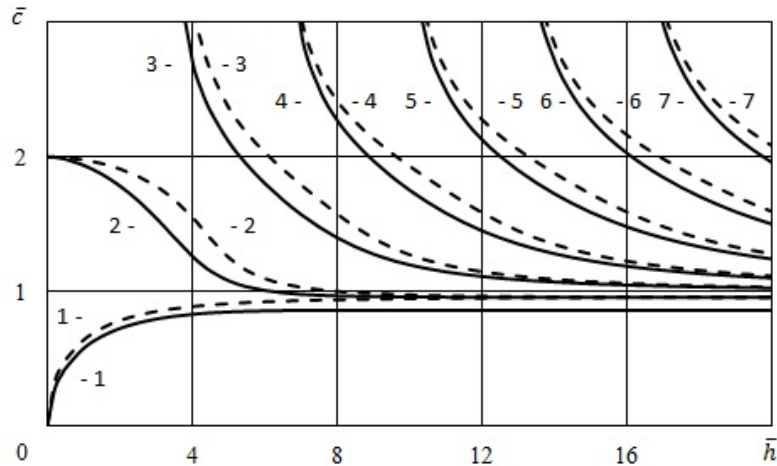


Рис. 1

На рис. 2, 3 приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 2) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 3) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для квазиповерхностной моды 1 (рис. 1). Графики, представленные на рис. 2, 3, отражают распределение смещений (скоростей) по толщине в приконтактных областях слоя из резины ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства воды

( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ). Они получены при частоте (толщине) упругого слоя  $\bar{h} = 20$ . При этом значение фазовой скорости моды 1 равно  $\bar{c} = 0,859257$ .

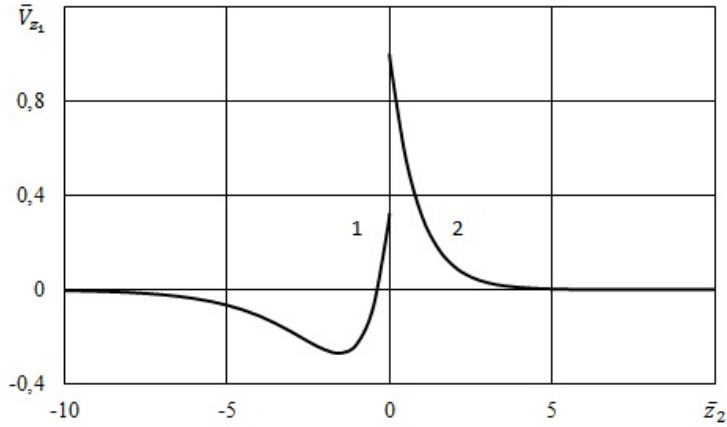


Рис. 2

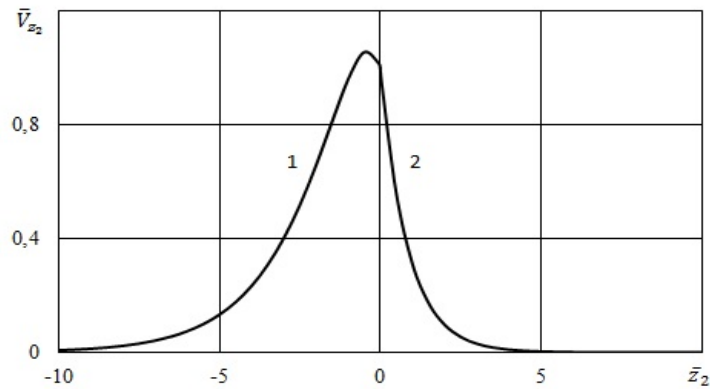


Рис. 3

Характер влияния предварительного сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ) на скорости нормальных квазилэмбовских волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 4. При этом сплошные линии соответствуют гидроупругой системе с упругим слоем, подвергнутому начальному сжатию ( $\lambda_1 = 0,8$ ). Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые для ненапряженного упругого слоя.

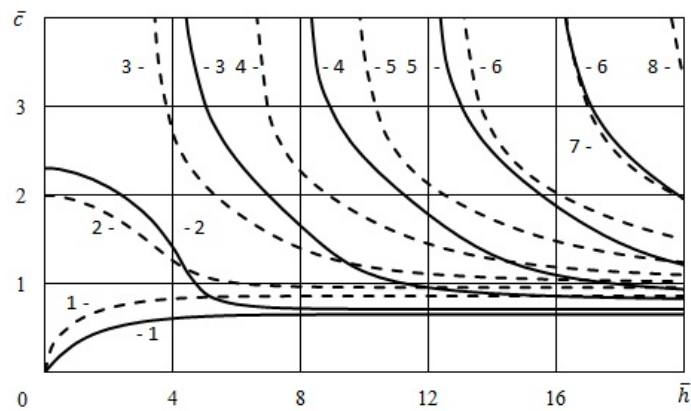


Рис. 4

На рис. 5 – 9 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из упругого слоя из органического стекла (менее жесткий материал) и воды.

На рис. 5 для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  [3 – 8, 10] при отсутствии начальных напряжений ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$ ). На этом рисунке штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины (частоты).

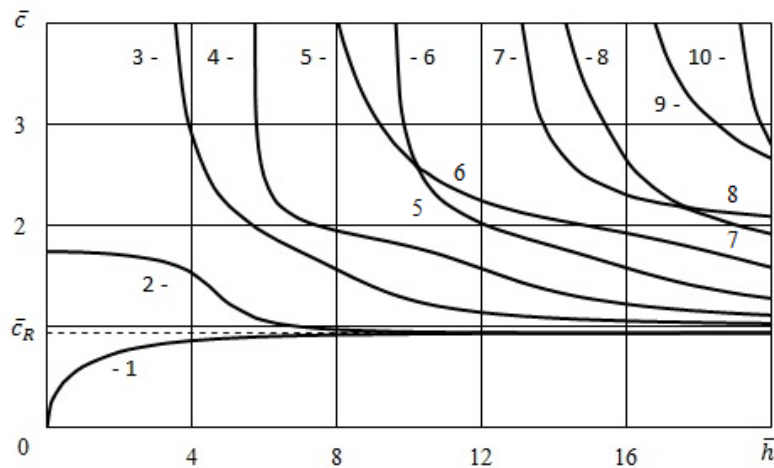


Рис. 5

На рис. 6 показаны дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  при отсутствии начальных напряжений ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$ ). На этом рисунке штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины (частоты).

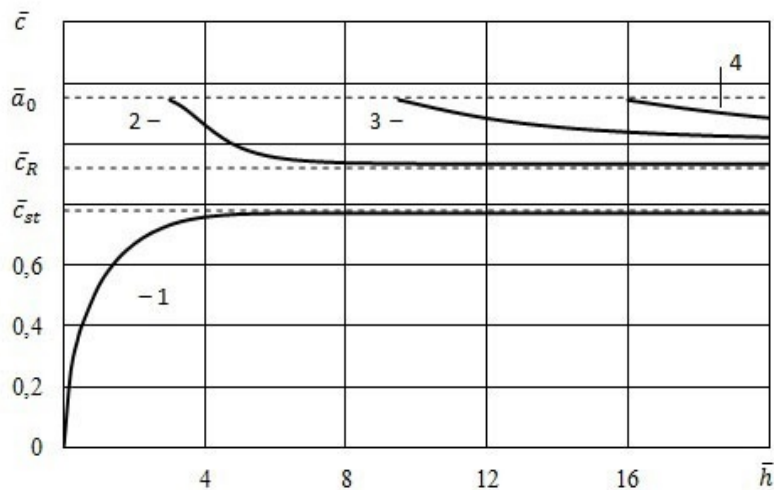


Рис. 6

На рис. 7, 8 приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 7) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 8) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для квазиповерхностной волны 1 (рис. 6). Графики, представленные на рис. 7, 8, отражают распределение смещений (скоростей) по толщине в приконтактных областях слоя из органического стекла ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства воды ( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ). Они получены при частоте (толщине) упругого слоя  $\bar{h} = 20$ . При этом значение фазовой скорости моды 1 равно  $\bar{c} = 0,7717101$ .

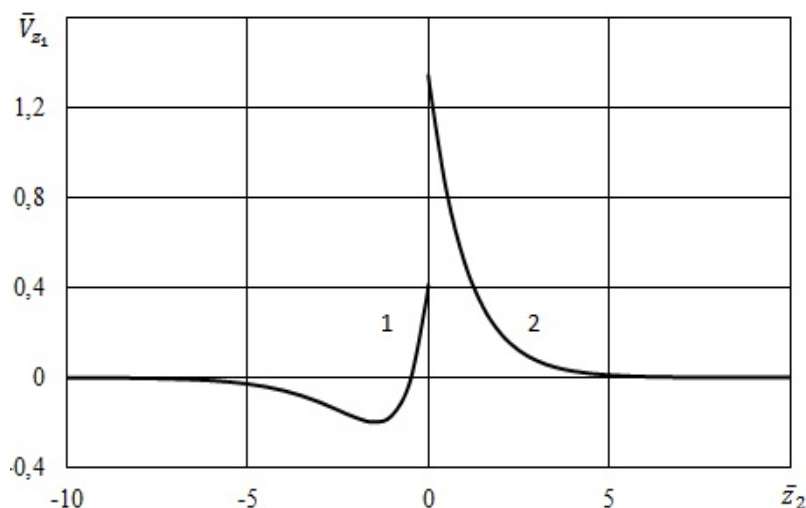


Рис. 7

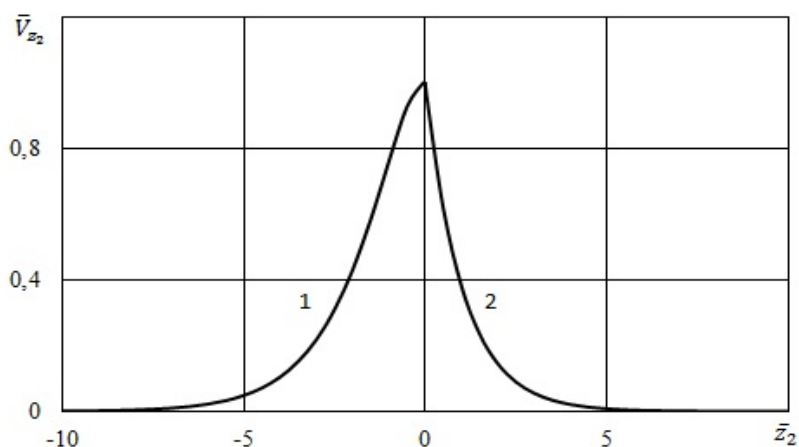


Рис. 8

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорости нормальных волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 9, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей  $c_\varepsilon$  [ $c_\varepsilon = (c_\sigma - c)/c$ ,  $c_\sigma$  – фазовая скорость мод в предварительно напряженном слое,  $c$  – фазовая скорость нормальных волн в упругом слое при отсутствии начальных деформаций] от толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$ .



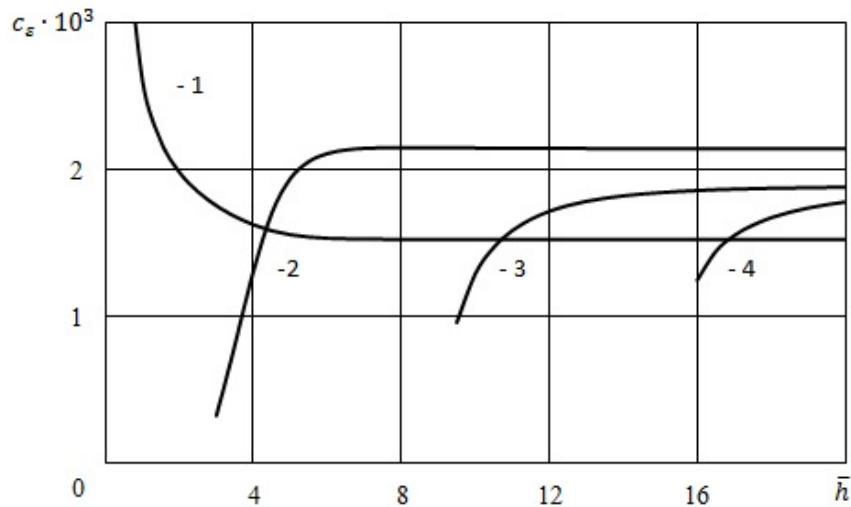


Рис. 9

Графический материал, полученный в результате численных вычислений для системы «сталь (более жесткий материал) – вода», представлен на рис. 10 – 14.

На рис. 10 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  при отсутствии начальных напряжений [3 – 8, 10]. На рисунке штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины (частоты).

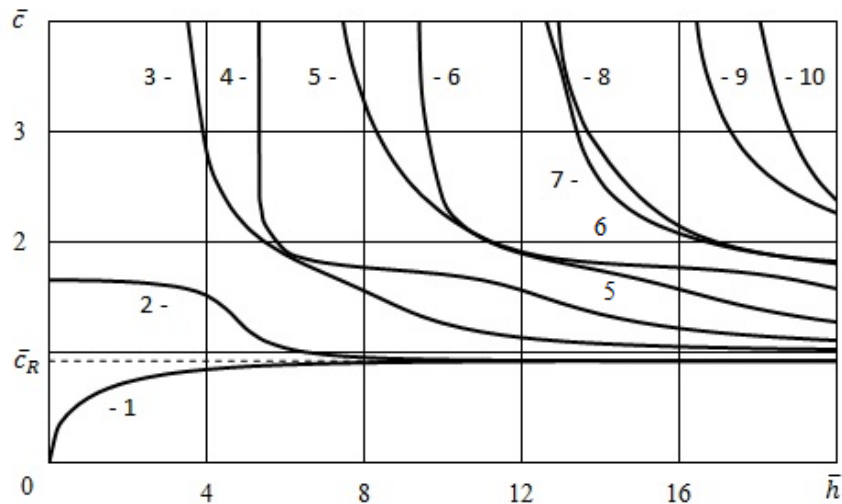


Рис. 10

На рис. 11 приведена дисперсионная кривая для гидроупругого волновода, отражающая зависимость безразмерной величины фазовой скорости единственной волны (мода 1)  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  при отсутствии начальных напряжений ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$ ). На этом рисунке штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость этой моды при возрастании толщины (частоты).

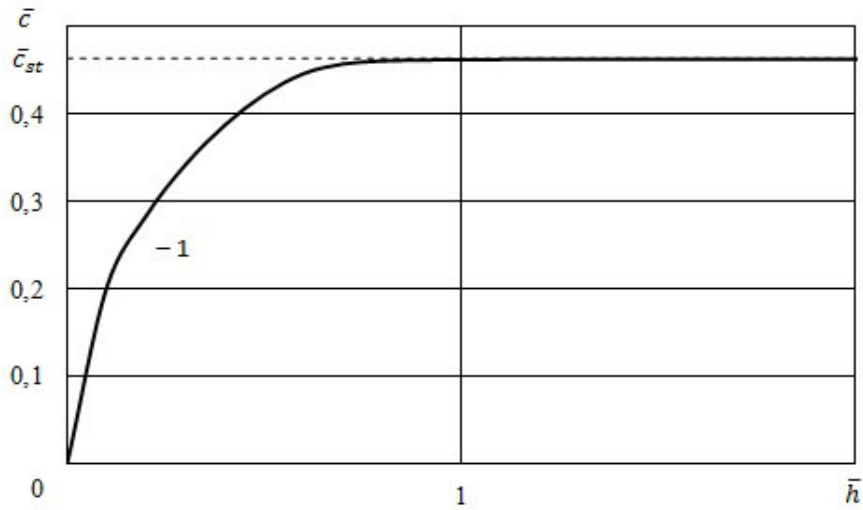


Рис. 11

На рис. 12, 13 приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 12) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 13) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для квазиповерхностной волны 1 (рис. 11). Графики, представленные на рис. 12, 13, отражают распределение смещений (скоростей) по толщине в приконтактных областях слоя из стали ( $-\bar{h} \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) и полупространства воды ( $0 \leq \bar{z}_2 < \infty$ ). Они получены при частоте (толщине) упругого слоя  $\bar{h} = 20$ . При этом значение фазовой скорости моды 1 равно  $\bar{c} = 0,462886$ .

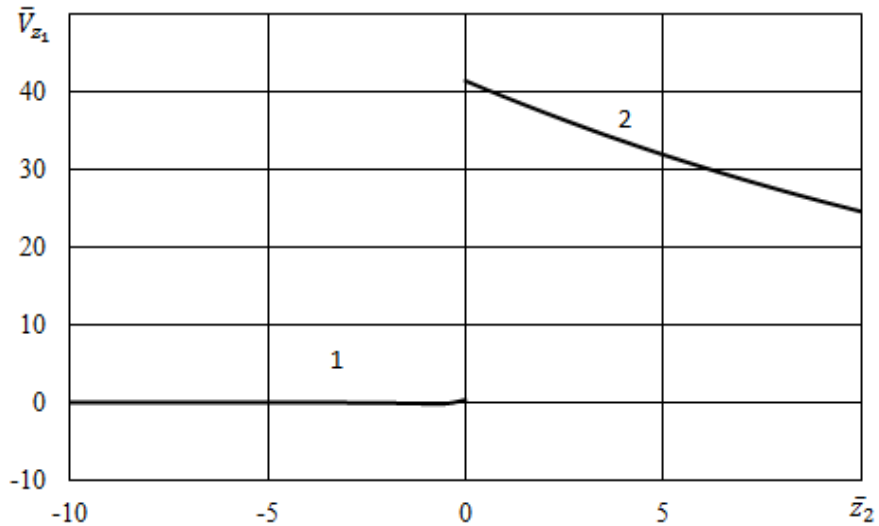


Рис. 12

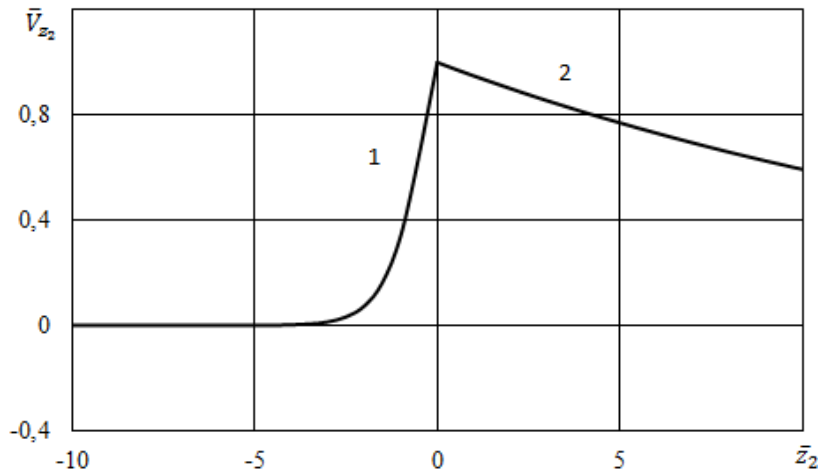


Рис. 13

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорость единственной нормальной волны в упруго-жидкостной системе иллюстрирует график на рис. 14, где представлена зависимость относительного изменения величины фазовой скорости  $c_\varepsilon$  [ $c_\varepsilon = (c_\sigma - c)/c$ ,  $c_\sigma$  – фазовая скорость моды в предварительно напряженном слое,  $c$  – фазовая скорость нормальной волны в упругом слое при отсутствии начальных деформаций] от толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$ .

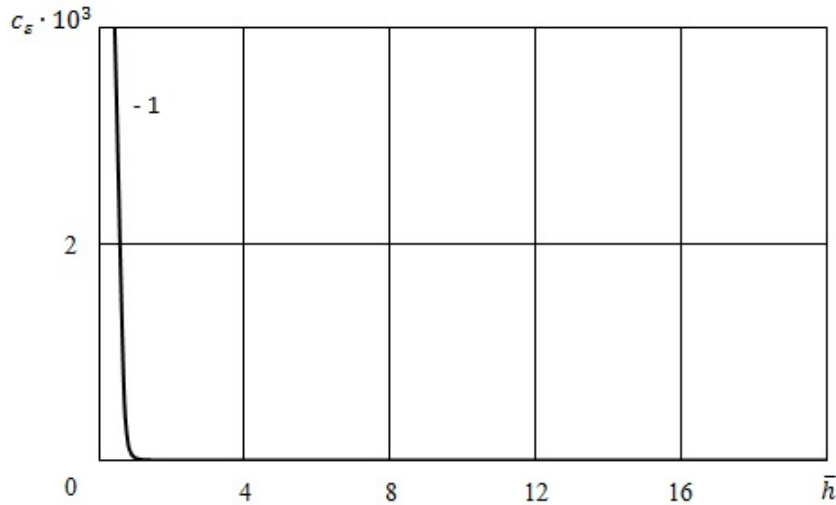


Рис. 14

#### §4. Анализ числовых результатов.

Из графиков, представленных на рис. 1, следует, что для чисто упругого волновода (штриховые линии) скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод Лэмба, распространяющихся вдоль нижней и верхней свободных поверхностей слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  стремятся к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$ . При этом первая мода стремится к скорости поверхностной волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9553303$ ) снизу, а скорость второй моды – соответственно, к  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) сверху.

В гидроупругом волноводе (сплошные линии) при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$ ) снизу, а скорость второй моды – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$ ) сверху. Моды более высокого порядка как в гидроупругой системе, так и в чисто упругом слое распространяются в упругом слое в его толще [1] с фазовыми скоростями, стремящимися с увеличением толщины (частоты) к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 2, 3, следует, что движения моды 1 при  $\bar{h} = 20$  происходят как в упругом теле, так и жидкости. При этом глубина проникновения ее в упругий слой превышает глубину проникновения в жидкость. Заметим, что разрыв продольных смещений в упругом теле (кривая 1) и в жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ( $\bar{z}_2 = 0$ ) (рис. 2) обусловлен невязкостью (идеальностью) жидкости.

Как видно из графиков для гидроупругого волновода, представленных на рис. 4, скорости первых мод (волны типа Стоунли) стремятся к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,859257$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_{st} = 0,650184$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) снизу, а скорости вторых мод (волны типа Рэлея) – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709558$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) сверху. Из графиков, приведенных на рис. 2, следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения мод Лэмба и смещение их дисперсионных кривых. Нетрудно видеть, что начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых (сплошные линии) в коротковолновую часть спектра. При этом происходит уменьшение количества распространяющихся мод Лэмба.

Из графиков, полученных для чисто упругого слоя из оргстекла [3 – 8, 10] и представленных на рис. 5, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9335596$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9335596$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя или частоты стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$  [1, 3 – 8, 10].

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 6, показывают, что при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,7717101$ ) снизу, а скорость второй моды – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933558$ ) сверху. Моды более высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом частоты (толщины упругого слоя) к скорости волны сдвига в материале упругого тела.

Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 7, 8, следует, что движения моды 1 при  $\bar{h} = 20$  в случае упругого слоя из оргстекла также происходят как в упругом теле, так и жидкости. При этом глубина проникновения ее в упругий слой превышает глубину проникновения в жидкость.

Приведенные на рис. 9 графики, позволяют заключить, что для рассматриваемого диапазона частотного спектра начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого слоя из менее жесткого материала приводит к повышению фазовых скоростей всех мод.

Из графиков, полученных для упругого слоя из стали [1, 3 – 8, 10] и представленных на рис. 10, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя  $\bar{h}$  стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стре-

мится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

Графический материал для гидроупругой системы, приведенный на рис. 11, показывает, что при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  скорость единственной существующей волны стремится снизу к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,462886$ ), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ).

Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 12, 13, видно, что продольные смещения  $\bar{V}_{z_1}$  в упругом слое ( $-10 \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) незначительные, а поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения быстро убывают с глубиной. Для жидкости характерна противоположная ситуация. Как следует из графиков, в жидкости ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq 10$ ), наоборот, сосредоточены волновые движения. При этом продольные  $\bar{V}_{z_1}$  и поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения по мере удаления от границы раздела сред медленно убывают с глубиной. Это свидетельствует о том, что движения моды 1 при  $\bar{h} = 20$  в случае более жесткого материала (сталь) происходят в отличие от податливого и менее жесткого упругого слоя, преимущественно, в жидкости.

Анализ графика, полученного для гидроупругой системы и представленного на рис. 14, позволяет заключить, что начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого слоя из стали (более жесткий материал) оказывает существенное влияние на величину фазовой скорости моды 1, в основном, в окрестности частоты ее зарождения. В дальнейшем с ростом частоты влияние предварительных деформаций на скорость квази-поверхностной волны (волны типа Стоунли) ослабевает.

#### §5. Локализация низших мод в гидроупругих волноводах.

Как показано в работе [2], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «резина (податливый материал) – вода» таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 46,153442$ ) больше скорости квази-рэлееской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$ ). Анализ кинематических характеристик поверхностных волн, представленных на рис. 2, 3, показывает, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1, являющейся волной типа Стоунли, в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, проникает в твердое тело и локализуется в приконтактных областях как жидкости, так и упругого слоя. Мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Скорость ее стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с ростом частоты (толщины) в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхностей внутрь слоя и локализируются в его толще [1].

В случае гидроупругой системы «оргстекло (менее жесткий материал) – вода» (рис. 6) механические параметры ее компонентов таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,152595$ ) немного больше скорости квази-

рэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933558$ ). Как следует из графиков рис. 7, 8, при таком соотношении механических параметров мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется также в приконтактных областях как жидкости, так и упругого слоя. Вторая мода распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Движения мод высокого порядка смещаются от поверхностей внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

Таким образом, анализ показывает, что в данных упруго-жидкостных системах при  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  низшие моды проникают в твердое тело и так же, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

В случае гидроупругой системы «сталь (более жесткий материал) – вода» (рис. 11) механические параметры таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ). Анализ кинематических характеристик (см. рис.12, 13) показывает, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактной области жидкого полупространства.

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе при  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  первая мода не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы раздела сред в приконтактной области жидкости. В этом случае волноводом для распространения квазиповерхностной волны (волны типа Стоунли) и переноса волновой энергии служит приповерхностная область жидкого полупространства.

#### **§6. Критерий существования квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах.**

Как показано в работе [2], критерием локализации волн Стоунли при взаимодействии упругих и жидких полупространств является соотношение между скоростями волны звука в жидкости и волны Рэлея в твердом теле. Проведенные отдельно расчеты и анализ полученных в настоящей работе числовых результатов показал, что этот критерий может быть обобщен и применен также для установления возможности существования нормальных квазилэмбовских волн в упругом слое, взаимодействующем с идеальным жидким полупространством.

Как указано ранее, графики, приведенные на рис. 1, 4, получены для гидроупругой системы, состоящей из полупространства идеальной сжимаемой жидкости и упругого слоя из податливого материала. В этом случае механические параметры ее компонентов таковы, что скорость волны звука в жидкости значительно больше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в упругом слое ( $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ ). Как видно из графиков рис. 1, 4, при таком соотношении идеальная жидкость не препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя. Вследствие этого, в упругом слое возникает полный набор незатухающих нормальных волн высокого порядка, дисперсионная картина и частотный спектр которых, несмотря на ряд различий, подобен волновому процессу в упругом слое, невзаимодействующем с жидкостью.

В гидроупругой системе с упругим слоем из оргстекла (менее жесткий материал) скорость волны звука в жидкости лишь немного превышает скорости волн Рэлея и сдвига ( $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ ). В этом случае, как видно из графиков рис. 6, в упругом слое также возникают квазилэмбовские моды высокого порядка. Количество этих мод, распространяющихся без радиационного демпфирования, значительно меньше числа мод Лэмба в чисто упругом слое.

При взаимодействии упругого слоя из стали (более жесткий материал) с жидким полупространством (рис. 11) скорость волны звука в жидкости меньше скорости ква-

зирэлевской волны в упругом слое ( $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ ). При таком соотношении между механическими параметрами компонентов системы идеальная жидкость препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя (взаимодействию объемной и сдвиговой волн на них). В этом случае, как видно из графика рис. 11, в упругом слое не формируются незатухающие нормальные волны высокого порядка. В гидроупругом волноводе возникает лишь одна низшая первая мода, которая, распространяясь без демпфирования вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактной области жидкости.

#### **§7. Особенности влияния начальных напряжений на дисперсию квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах.**

Как показано в работе [10], в упругом слое, невзаимодействующем с жидкостью, начальные растяжения вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Это приводит к тому, что в окрестности критических частот величины фазовых скоростей мод Лэмба в предварительно деформированном слое могут быть как меньше, так и больше величин фазовых скоростей соответствующих мод в теле без начальных напряжений. Этим обусловлено появление в спектре упругого волновода частот (толщин), при которых начальные напряжения не оказывают влияния на величины фазовых скоростей ряда нормальных волн Лэмба. Отметим, что эта, качественно новая закономерность, отсутствующая в случае распространения волн в неограниченных и полуограниченных телах, впервые была обнаружена и описана в работе [10] для сжимаемого упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью.

Из графиков, приведенных на рис. 4 для гидроупругой системы с несжимаемым упругим слоем (податливый материал), следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. Как видно из рис. 4, начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых (сплошные линии) в коротковолновую часть спектра. При этом происходит уменьшение количества распространяющихся квазилэмбовских мод. Из графиков этого рисунка также видно, что сплошные и штриховые линии, отвечающие дисперсионным кривым одноименных мод, пересекаются. Это свидетельствует о том, что для всех квазилэмбовских мод, кроме первой, существуют упругие слои определенных толщин (частот)  $\bar{h}$ , при которых фазовые скорости  $\bar{c}$  не зависят от начального сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ). По-видимому, эта закономерность, как уже отмечалось ранее, впервые выявленная для сжимаемых тел и описанная в работе [10], носит более общий характер и присуща частотным спектрам упругих волноводов не только из разных материалов (сжимаемые и несжимаемые), но и гидроупругим волноводам.

В гидроупругой системе «оргстекло (менее жесткий материал) – вода» начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к смещению дисперсионных кривых мод в коротковолновую часть спектра и вызывает изменение их конфигурации. Как видно из графиков рис. 9, для рассматриваемого интервала частотного спектра, начальное растяжение упругого слоя приводит к повышению величин фазовых скоростей всех мод.

Как ранее отмечено, в двух данных упруго-жидкостных системах низшие моды проникают в твердое тело и так же, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. Этим объясняется влияние начальных напряжений на величины фазовых скоростей всех мод.

График, представленный на рис. 14, позволяет заключить, что в случае взаимодействия упругого слоя из стали (более жесткий материал) с водой начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого слоя оказывает влияние на величину фазовой скорости моды 1, в основном, в окрестности частоты ее зарождения. В дальнейшем с ростом частоты влияние предварительных деформаций на скорость квазиповерхностной волны (волны типа Стоунли) ослабевает. Как уже отмечалось, в данной упруго-жидкостной системе единственная существующая низшая мода 1, возникающая в ре-

результате взаимодействия упругого слоя с идеальным жидким полупространством, не проникает в упругое тело и распространяется вдоль границы раздела сред, преимущественно, в приконтактной области жидкости. Этим объясняется незначительное влияние упругого слоя и начальных напряжений на фазовую скорость, а также дисперсию этой волны.

#### **Заключение.**

В рамках трехмерных уравнений линеаризованной теории упругости конечных деформаций для упругого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости даны постановка и решение задачи о распространении квазилэмбовских нормальных волн в системе "идеальное сжимаемое жидкое полупространство – предварительно напряженный упругий слой". С использованием представлений общих решений получены характеристические уравнения и построены дисперсионные кривые для мод в широком диапазоне частот.

Анализ полученных результатов показал, что основным критерием существования незатухающих нормальных волн высокого порядка в гидроупругой системе "идеальное сжимаемое жидкое полупространство – упругий слой" является соотношение между величинами скоростей волны звука в жидкости, а также волн Рэлея и сдвига в упругом теле. Установлено, что воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра.

Показано, что локализация низших квазилэмбовских мод в упруго-жидкостной системе зависит от механических параметров ее компонентов и определяется соотношением между величинами скоростей волны звука в жидкости и квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

Установлено, что в гидроупругой системе с упругим слоем из податливого материала начальное сжатие вызывает изменение конфигурации дисперсионных кривых квазилэмбовских мод и смещение их в коротковолновую часть спектра.

Для гидроупругой системы с упругим слоем из податливого материала обнаружено существование частот (упругих слоев определенной толщины), при которых начальное сжатие не влияет на фазовые скорости определенных мод.

Предложенный подход и полученные результаты, позволяют для волновых процессов установить пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций.

**РЕЗЮМЕ.** Дано постановку задачі та вивчено поширення квазілэмбовських хвиль у попередньо деформованому пружному шарі, що взаємодіє з півпростором ідеальної стисливої рідини. Результати отримано на основі тривимірних рівнянь линеаризованої теорії пружності скінченних деформацій для пружного шару та тривимірних линеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини. Постановка задачі та підхід базуються на використанні представлень загальних розв'язків линеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійні рівняння, які описують поширення квазілэмбовських хвиль у гідропружних системах у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив початкових напружень, а також півпростору ідеальної стисливої рідини та товщини пружного шару на фазові швидкості квазілэмбовських мод. Розвинутий підхід та отримані результати для хвильових процесів дозволяють встановити границі застосування моделей, основаних на різних варіантах теорії малих початкових деформацій. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журнал. – 1988. – 34, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.1. Общие вопросы – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.



7. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
8. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
9. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
10. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
11. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – 16, № 1. – С. 113 – 116.
12. Babich S. Yu., Guz A. N., Zhuk A. P. Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1979. – 15, N 4. – P. 277 – 291.
13. Bagno A.M. Wave Propagation in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 2. – P. 133 – 139.
14. Bagno A.M. Effect of Prestresses on the Dispersion of Quasi-Lamb Waves in the System Consisting of an Ideal Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 139 – 148.
15. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – 33, N 6. – P. 435 – 463.
16. Drinkwater B.W., Wilcox P.D. Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // NDT & E Int. – 2006. – 39, N 7. – P. 525 – 541.
17. Gibson A., Popovics J. Lamb wave basis for impact-echo method analysis // J. Engineering Mechanics. – 2005. – 131, N 4. – P. 438 – 443.
18. Guz A.N. Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – 16, N 3. – P. 175 – 190.
19. Guz A.N. Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 1. – P. 23 – 59.
20. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
21. Guz A.N. On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // J. Phys. Science and Application. – 2011. – 1, N 1, June. – P. 1 – 15.
22. Guz A.N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 3. – P. 231 – 252.
23. Guz A. N., Zhuk A. P., Bagno A. M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 5. – P. 449 – 507.
24. Jhang K.Y. Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing. – 2009. – 10, N 1. – P. 123 – 135.
25. Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C. Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // Smart Materials and Structures. – 2002. – 11, N 2. – P. 269 – 279.
26. Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H. Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // Int. J. of Plasticity. – 2003. – 19, N 6. – P. 771 – 804.
27. Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K. Ultrasonic Lamb wave tomography // Inverse Problems. – 2002. – 18, N 6. – P. 1795 – 1808.
28. Liu L., Ju Y. A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // NDT & E Int. – 2011. – 44, N 1. – P. 106 – 110.
29. Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Linear Mech. – 2007. – 42, N 2. – P. 310 – 320.
30. Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C. V. Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (Ao) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // Smart Materials and Structures. – 2009. – 18, N 8. – P. 1 – 7.
31. Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G. Methods of measuring residual stresses in components // Materials & Design. – 2012. – 35. – P. 572 – 588.
32. Spies M. Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // Ultrasonics. – 2004. – 42, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Поступила 26.05.2016

Утверждена в печать 22.05.2018