

Н. В. Никитина

БИФУРКАЦИИ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. A qualitative bifurcation analysis of two cases of existence of attractors in multidimensional systems is given. The first case is based on the Neimark model. On one coordinate plane, a linear system exists with the special point in the form unstable focus. On the other two planes, the vibrational motions are formed. These movements restrict the growth of oscillations of this unstable linear system. The second case represents a bundle of two oscillators (Duffing and van der Pol). This system can generate both regular oscillations during synchronization, and chaotic ones.

Key words: nonlinear systems, bifurcation, synchronization, limit cycle, chaos.

Введение.

Методы качественной теории нелинейной механики двумерных систем получили полное завершение в середине прошлого века. В конце прошлого века повысился интерес к трехмерным системам в связи с изучением хаотических движений. Проблемы касаются разнообразия математических моделей, которые порождают хаотические аттракторы и построение принципов изучения возникновения регулярных аттракторов, а также механизмов возникновения хаоса в многомерных системах. Несмотря на определенный опыт исследования нелинейных систем [1, 2, 4 – 11, 13, 14] проблема существования регулярных и странных аттракторов в многомерных системах остается открытой и связана с изучением механизмов потери устойчивости орбиты. Проблема существования аттракторов выделяет определенные прикладные задачи. Представим несколько случаев.

1. Системы, в которых можно сформулировать принцип симметрии для трехмерных систем. Аттракторы, образование которых доказывается при помощи принципа симметрии, имеют определенную симметрию замкнутой траектории на координатных плоскостях [5].

2. Трехмерная система, которая образует плоские аттракторы.

3. Бифуркации колебаний двух (и более) связанных генераторов [10]. Причина появления новых движений при синхронизации.

4. Анализ механизмов потери устойчивости орбиты.

Ниже рассмотрена задача Ю.И. Неймарка, где приведен один тип бифуркаций предельных циклов как *возникновение инвариантного тора* [2] и бифуркации двух связанных нелинейных осцилляторов (Дуффинга и Ван-дер-Поля).

Приведем известные результаты из монографии [12], которые будут необходимы далее. Запишем двухмерную систему (на плоскости) в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x); \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x), \quad (1)$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ и $F_1 \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $F_2 \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, и $F_i(0, 0) = 0 (i = 1, 2)$. Приведем геометрический принцип симметрии, на основе которого можно установить условия замыкания фазовой траектории [12].

В системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_1(x)$ относительно x_1 и нечетности функции $F_2(x)$ относительно x_1 , т. е.

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2); F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \quad (2)$$

Это утверждение основано на том, что на плоскости Ox_1x_2 ось Ox_2 является осью симметрии, и всякая интегральная кривая слева от оси x_2 является зеркальным отображением кривой справа.

1. Задача Ю.И. Неймарка.

В монографии [2] приведен один тип бифуркаций предельных циклов как *возникновение инвариантного тора*. Ниже приведена модель

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - b + z + \mu) - \mu x z^2 - cy; \\ \frac{dy}{dt} &= y(a - b + z + \mu) - \mu y z^2 + cx; \\ \frac{dz}{dt} &= az - x^2 - y^2 - z^2, \end{aligned} \quad (3)$$

которая связана с именем Ю.И. Неймарка, однако указать первоисточник этой задачи и уравнений (3) не представляется возможным. В [2] на основе численного решения (без указания числовых значений параметров) приведен результат, который будет доказан ниже в следующем виде.

Утверждение 1. В системе (3) существует двухчастотный режим регулярного движения, который порождает инвариантный тор.

Доказательство. Представим систему (3) в виде трех подсистем, связанных с координатными плоскостями. Каждая подсистема ориентирована относительно плоскостей xu , xz , yz . В рассматриваемом случае одна подсистема теряет устойчивость и процесс переходит в две оставшиеся. Такое представление поможет лишь установить симметрию аттрактора на каждой координатной плоскости. Приведенные ниже подсистемы показывают тенденцию системы (3) к геометрическим симметричным образованиям на координатных плоскостях

$$\frac{dx}{dt} = (a - b + \mu)x - cy; \quad \frac{dy}{dt} = (a - b + \mu)y + cx; \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = (a - b + z + \mu)x + \mu x z^2; \quad \frac{dz}{dt} = az - x^2 - z^2; \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = (a - b + z + \mu)y + \mu y z^2; \quad \frac{dz}{dt} = az - y^2 - z^2. \quad (6)$$

Особая точка в нуле $(0, 0, 0)$ в системе (3) неустойчива ($\lambda_{1,2} = k \pm ic$, $\lambda_3 = a$). Обозначим сумму параметров $a - b + \mu = k$. Пусть система (3) имеет следующие значения параметров: $a = 0,5$; $b = 3,5$; $c = 100$; $\mu = 3,5$. Система (4) – линейная. Ей соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda k + k^2 + c^2 = 0$. Особая точка в нуле неустойчивая ($\lambda_{1,2} = k \pm ic$).

Рассмотрим плоскость xz системы (3) (уравнения (5) вида $(dx/dt = F_x(x, z), dz/dt = F_z(x, z))$). Аналогично условиям (2) имеет место следующие условия:

$$F_x(-x, z) = -F_x(x, z); F_z(-x, z) = F_z(x, z). \quad (7)$$

Согласно (7) и принципу симметрии ось z является осью симметрии и на плоскости xz имеет место замкнутая кривая.

Рассмотрим плоскость yz системы (3) (уравнения (6) вида $dy/dt = F_y(y, z)$, $dz/dt = F_z(y, z)$). Аналогично условиям (2) имеют место следующие условия:

$$F_y(-y, z) = -F_y(y, z); F_z(-y, z) = F_z(y, z). \quad (8)$$

Тогда z является осью симметрии на плоскости yz . Согласно (8) и принципу симметрии ось z является осью симметрии, и на плоскости yz имеет место замкнутая кривая.

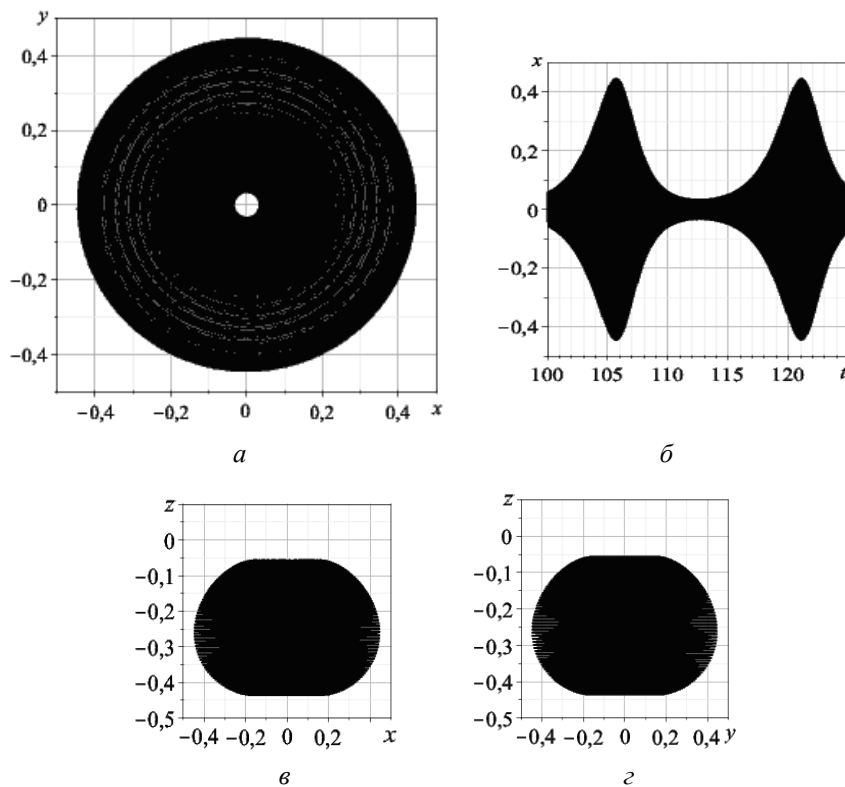


Рис. 1

Отсутствие седловых решений в нуле связано с существованием регулярного трехмерного движения. Отметим, что так как на плоскостях xz , yz траектория замкнута, то на плоскости xu она ограничена при возрастании по осям x, u . Утверждение доказано.

На рис. 1, $a, б, в, z$ приведены портреты на координатных плоскостях системы (3) и временная реализация $x(t)$.

2. Бифуркации двух связанных осцилляторов.

Рассмотрим комбинацию осцилляторов Дуффинга и Ван-дер-Поля [2].

$$\ddot{x} + b\dot{x} + ax + cy = 0; \quad \ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} - fy = 0, \quad (9)$$

где a, b – параметры осциллятора Дуффинга, c, f – управляющие параметры.

Осциллятор Ван-дер-Поля подробно анализировался весьма многими авторами (с малой величиной параметра μ). Проблема замыкания интегральной кривой в общем случае (осциллятора Ван-дер-Поля), представлена так в классической монографии [3]:

«Как известно, уравнение Ван-дер-Поля при любом $\mu > 0$ имеет на фазовой плоскости $(y, dy/dt)$ единственный предельный цикл, который является устойчивым. Этот математический факт адекватен экспериментально наблюдаемому физическому феномену ... ».

Представим систему Дуффинга – Ван-дер-Поля на плоскостях x_1x_2, y_1y_2 :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -bx_2 - ax_1^3 + fx_1. \quad (10)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dt} = \mu(1 - y_1^2)y_2 - cy_1. \quad (11)$$

Замыкание траектории системы Ван-дер-Поля (11) происходит согласно принципу кососимметрии [4]. Предполагается, что нелинейный осциллятор имеет линейную и нелинейную составляющие диссипации. Линейная порождает в нуле неустойчивую особую точку (неустойчивый фокус) и линейную составляющую кососимметрии траектории. Нелинейная составляющая ограничивает область ухода траектории из нуля кососимметричной кривой. Эта кривая образует предельный цикл (замыкается в силу кососимметрии). Нелинейная двумерная система – осциллятор Ван-дер-Поля (11) в виде $dy_1/dt = F_{y_1}(y_1, y_2), dy_2/dt = F_{y_2}(y_1, y_2)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$F_{y_1}(-y_1, y_2) = -F_{y_1}(y_1, -y_2); \quad F_{y_2}(-y_1, y_2) = -F_{y_2}(y_1, -y_2); \quad (12)$$

$$F_{y_1}(y_1, -y_2) = -F_{y_1}(-y_1, y_2); \quad F_{y_2}(y_1, -y_2) = -F_{y_2}(-y_1, y_2). \quad (13)$$

Условия (12), (13) создают кососимметрию и замыкание траектории на координатной плоскости.

Заметим, что при большом значении параметра μ на траектории появляются участки с апериодическими точками, которые замедляют движение изображающей точки и вызывают увеличение периода [4]. Параметр c связан с частотой колебаний осциллятора. Увеличение c – уменьшает период. (Известно, что в трехмерных колебательных системах, вследствие седловых решений, вначале наблюдается кратное увеличение периода, затем периодические колебания теряют регулярность и переходят к хаотическим колебаниям.)

Правые части уравнений Дуффинга (10) ($-dx_1/dt = F_{x_1}(x_1, x_2); dx_2/dt = F_{x_2}(x_1, x_2)$)

также удовлетворяют условию кососимметрии

$$F_{x_1}(-x_1, x_2) = -F_{x_1}(x_1, -x_2); \quad F_{x_2}(-x_1, x_2) = -F_{x_2}(x_1, -x_2); \quad (14)$$

$$F_{x_1}(x_1, -x_2) = -F_{x_1}(-x_1, x_2); \quad F_{x_2}(x_1, -x_2) = -F_{x_2}(-x_1, x_2). \quad (15)$$

Замкнутые траектории существуют в случае особой точки: неустойчивый фокус, в случае устойчивого фокуса траектория притягивается в особую точку [12]. При диссипации и сложении двух периодических движений (одно и другое имеют кососимметрию) возможна синхронизация колебаний. В этом случае при начальных возмущениях системы (9) существование в режиме синхронизации замкнутой траектории обеспечивается условиями (12) – (15). Таким образом, затухающий осциллятор Дуффинга синхронизируется осциллятором Ван-дер-Поля. Уменьшение периода синхронизированной системы возникает в соответствии с параметром c .

Следующий этап исследования связан с установлением существования странного аттрактора. При исследовании динамики систем важной характеристикой являются характеристические показатели Ляпунова (ХПЛ) (см. [1, 14] и библиографию там). Система в вариациях $dx/dt = A(t)x$ рассматривается в виде $d\delta x/dt = A(\bar{x})\delta x$, где

$A(\bar{x})$ – матрица, коэффициенты которой зависят от частного решения \bar{x} . При помощи системы в вариациях можно получить представление о поле, в котором движется изображающая точка системы (9), и установить качество решений на траектории. Поскольку речь идет о базовых математических моделях, то сигнатуры спектра ХПЛ для осциллятора Дуффинга и осциллятора Ван-дер-Поля известны – $(0, -)$; $(0, -)$. При синхронизации уравнений (9) имеет место сигнатура спектра $(0, 0, -, -)$.

Запишем уравнения (9) в виде системы первого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -bx_2 - ax_1^3 - cy_1; \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dt} = \mu(1 - y_1^2)y_2 + fx_1. \quad (16)$$

Уравнениям (16) соответствует система в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x_1}{dt} &= \delta x_2; \quad \frac{d\delta x_2}{dt} = -3a\bar{x}_1^2\delta x_1 - b\delta x_2 - c\delta y_1; \\ \frac{d\delta y_1}{dt} &= \delta y_2; \quad \frac{d\delta y_2}{dt} = -2\mu\bar{y}_1\bar{y}_2\delta y_1 - \mu(1 - \bar{y}_1)\delta y_2 + f\delta x_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Характеристическое уравнение системы (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^3(b - \mu(1 - \bar{y}_1)) + \lambda^2(-b\mu(1 - \bar{y}_1) + 3a\bar{x}_1^2) + \\ + \lambda(2b\mu\bar{y}_1\bar{y}_2 - 3a\mu\bar{x}_1^2(1 - \bar{y}_1)) + cf + 6a\mu\bar{x}_1^2\bar{y}_1\bar{y}_2 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

По уравнению (18) можно установить ХПЛ синхронизированного режима системы (9). Особая точка $(0, 0, 0, 0)$ системы (16) имеет ХП (характеристические показатели) согласно уравнения

$$\lambda^4 + \lambda^3(b - \mu) - \lambda^2b\mu + cf = 0.$$

При значениях параметров $(a; b; \mu; c; f) = (1, 1, 1, 2, 1)$ происходит синхронизация осцилляторов. При синхронизации и выполнении условий (12) – (15) сигнатура спектра ХПЛ имеет вид $(0, 0, -, -)$. Таким образом, синхронизированные связанные осцилляторы порождают регулярные движения. Осциллятор Дуффинга образует предельный цикл (заметим, что синхронизация может осуществляться и при других значениях параметров). При указанных значениях параметров особая точка связанной системы имеет сумму ХП, равную нулю. В окрестности нуля четырехмерной системы поведение подсистем (16) (Дуффинга и Ван-дер-Поля) будет близким. Это способствует синхронизации.

Утверждение 2. Если связанные осцилляторы (9) находятся в состоянии синхронизации, то перемена знаков в слагаемых $+cy$; $-fx$ на $-cy$; $+fx$ не изменяет координатных портретов системы (9) на плоскостях x_1x_2 , y_1y_2 .

Доказательство. В уравнение (18), которое определяет поле четырехмерной системы (9), входит лишь одно слагаемое, которое содержит два параметра c, f ; поэтому изменение знаков не влияет на произведение параметров cf и не изменяет поле четырехмерной системы (9), в котором движется изображающая точка. Утверждение 2 доказано.

На рис. 2, *a, б, в, г* представлены портреты на координатных плоскостях и временная реализация системы (9). Согласно Утверждению 2 система (9) при изменении знаков $+cy$; $-fx$ на $-cy$; $+fx$ будет иметь следующий вид:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + ax - cy = 0; \quad \ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + fy = 0 \quad (19)$$

и будет представлена на координатных плоскостях (рис. 2, *a, б, в, г*). В работе [2, с. 75] приведена система (19). При качественном анализе в данной работе установлено тождественность систем (9), (19) при синхронизации.

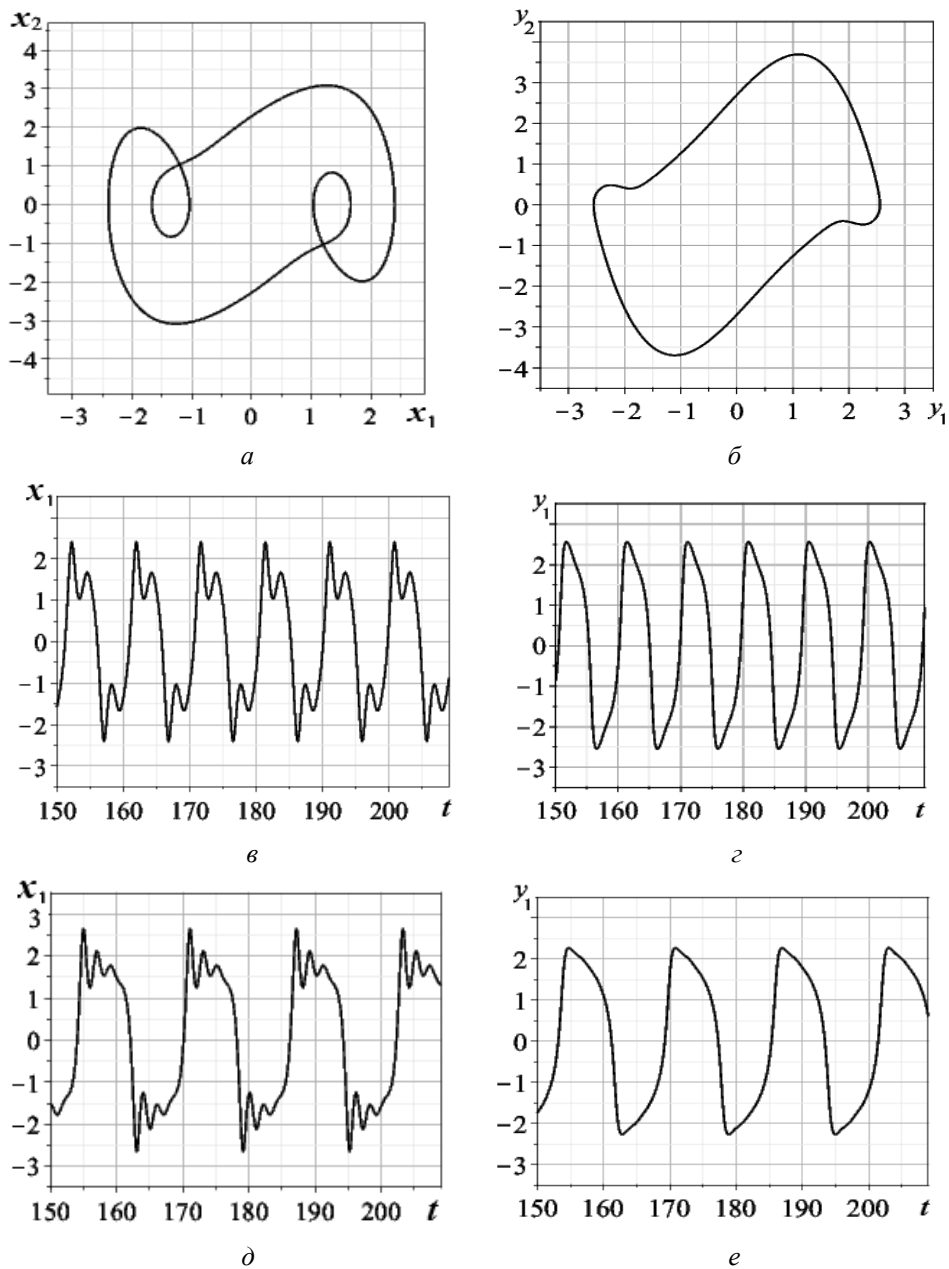


Рис. 2

В осциляторе Дуффинга системы (9) проявляется удвоение периода (рис. 2, а, в). При синхронизации скорость передвижения изображающей точки по траектории в системе осцилятора Дуффинга замедлена из-за топологической структуры поля, которая прослеживается по уравнению (18). Особенность топологической структуры осцилятора Дуффинга – это появление апериодических точек на траектории. Система саморегулируется тем, что делает «короткие» обороты, чтобы осуществлять синхронизацию по периоду. При значениях параметров $(a; b; \mu; c; f) = (1; 1; 1; 3; 0,3)$ наблюдается, например, утроение периода (рис. 2, д, е). Кратное увеличение периода заканчивается переходом от регулярных колебаний к хаотическим. Если уменьшить параметр b и увеличить параметр c ($b < \mu; c > 1$), то система осциляторов теряет

возможность к полной синхронизации, возникает неустойчивость орбиты. Заметим, что в окрестности особой точки связанных систем поведение подсистем не будет близким. Осциллятор Ван-дер-Поля порождает совместно с осциллятором Дуффинга странные аттракторы. При значениях параметров $(a; b; \mu; c; f) = (1; 0,3; 1; 2; 1)$ ХП особой точки

$$(0,9992 \pm 0,8660 * I; -0,6496 \pm 0,8476 * I)$$

происходит хаотизация траекторий обоих осцилляторов. При хаотизации изменяется сигнатура спектра ХПЛ $(0, 0, +, +)$. Выполнение условий (12) – (15) и неустойчивость орбиты являются двумя противоречивыми факторами. Условия (12) – (15) вынуждают систему (9) в процессе саморегуляции организовывать поиск устойчивой орбиты, порождая хаотические отклонения (рис. 3, а, б, в, г).

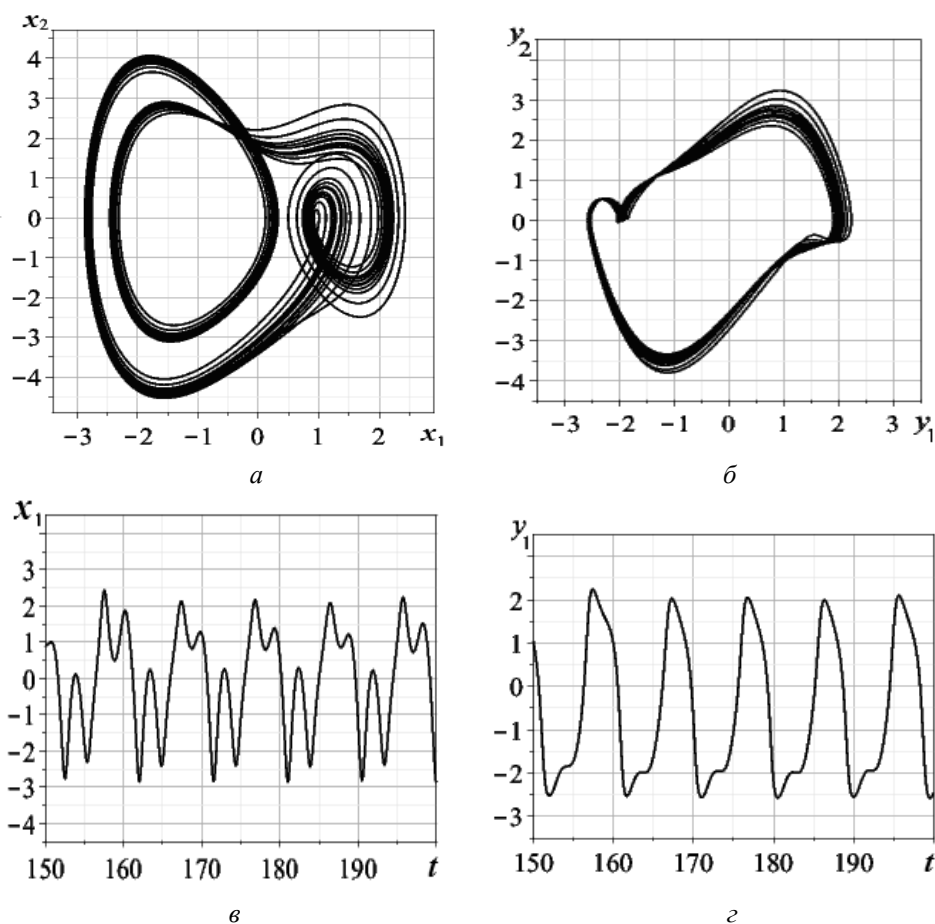


Рис. 3

Заключение.

В работе рассмотрены две модели базовых систем – трехмерная и четырехмерная, которые могут порождать регулярные и хаотические движения.

Поиск аттракторов в задаче Неймарка приводит к такому результату: на одной плоскости подсистема (4) линейная и неустойчивая. На двух других плоскостях подсистемы (5), (6) образуют регулярные колебательные движения. Переключение изображающей точки происходит через неустойчивую линейную систему (4). Образуется цикличность бесконечного процесса с устойчивой орбитой для подсистем (5), (6), в результате которого ограничивается решение неустойчивой системы (4). Важное качество системы (3) – отсутствие седловых решений в нуле.

Седлофокусные решения в системе двух связанных осцилляторов (9) проявляются в особой точке $(0, 0, 0, 0)$. Система может порождать как регулярные колебания при синхронизации, так и хаотические. Условия (12) – (15) гарантируют существование аттрактора. При определенных ХПЛ – это странный аттрактор.

РЕЗЮМЕ. Наведено якісний біфуркаційний аналіз двох випадків існування аттракторів в багатовимірних системах. Перший випадок відповідає моделі Неймарка. На одній координатній площині існує лінійна система з особливою точкою у вигляді нестійкого фокуса. На двох інших площинах утворюються коливальні рухи. Ці рухи обмежують зростання коливальних нестійкої лінійної системи. Другий випадок – зв'язка двох осциляторів (Дюффінга і Ван-дер-Поля). Система може породжувати як регулярні коливання при синхронізації, так і хаотичні.

1. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
2. *Вербичий В., Новак А., Даниленко Э., Ситаж М.* Введение в теорию устойчивости колесных экипажей и рельсового пути. – Донецк: Вебер, 2007. – 255с.
3. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов Ф.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – М.: Физматгиз, 1995. – 336 с.
4. *Никитина Н.В.* Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – К.: Феникс, 2012. – 235 с.
5. *Никитина Н.В.* Принцип симметрии в трехмерных системах // Доп. НАН України. – 2017. – № 7. – С. 21 – 28.
6. *Leonov G.A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Peterburg : St. Peterburg University Press, 2008. – 160 p.
7. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Stability and Bifurcation in a Model of the Magnetic Field of the Earth // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6.– P. 721 – 731.
8. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Bifurcations and Multistability of the Oscillations of a Three-Dimensional System // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2.– P. 223 – 232.
9. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* On Periodic Motions in Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4.– P. 369 – 379.
10. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Bifurcation and Synchronization of Two Coupled Generators // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 369 – 379.
11. *Neimark, Yu.I., Landa, P.S.* Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
12. *Nemytskii V.V., Stepanov V.V.* Qualitative Theory of Differential Equation. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
13. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 с.
14. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 с.

Поступила 05.09.2017

Утверждена в печать 30.01.2018