

А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ
ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ИЗ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: sp4soft@gmail.com*

Abstract. A statement is given and technique of solving is proposed for a series of problems of static analysis of the complex shape orthotropic plates under a linearly varying surface load. The calculations are carried out using the previously proposed by authors discrete-analytical approach involving the use of a refined Timoshenko type model. The results of calculations of the stress-strain state are shown for the plates in the form of a square, a rhombus and a trapezium close to a triangle in conditions of rigid fastening of edges. A small effect of the nonuniform distribution of surface load on values of strains and stress distribution is fixed. It is shown that the main factors is the plate shape and parameters of anisotropy of material.

Key words: stress-strain state, complex shaped plate, coordinate transformation, boundary-value problem, CFRP, variable load.

Введение.

Задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин, за исключением случая шарнирного закрепления краев, допускающего получение решения в форме рядов [5, 10], связаны со многими трудностями вычислительного характера. Дополнительные сложности возникают при описании четырехугольных пластин, отличных по форме от прямоугольника [8, 9, 11, 12], в связи с чем в [2], к примеру, для решения подобных задач предлагается использование R -функций. Трудности могут быть вызваны как значительным усложнением записи граничных условий, так и дискретизацией области в случае применения метода конечных элементов. Рассмотрение пластин из неоднородных материалов в условиях переменной поверхностной нагрузки еще больше уменьшает число доступных методов решения подобных задач.

В данной работе на основе ранее разработанного авторами подхода [7] представлено решение ряда задач статического анализа ортотропных пластин сложной формы под действием линейно изменяющейся поверхностной нагрузки. В рамках уточненной модели с использованием гипотез Тимошенко рассмотрены различные четырехугольные пластины с жестким закреплением краев. Проведен анализ комплексного влияния геометрических параметров, условий нагружения и упругих свойств материала на распределение полей напряжений и деформаций.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим задачу о НДС пластины толщиной h в декартовой системе координат x_1, x_2 . Уравнения равновесия в рамках уточненной теории пластин имеют вид:

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + q = 0; \quad M_{1,1} + M_{12,2} - Q_1 = 0; \quad M_{2,2} + M_{12,1} - Q_2 = 0, \quad (1.1)$$

где Q_1, Q_2 – усилия среза; M_1, M_2, M_{12} – моменты изгиба и кручения; q – поверхностная нагрузка. Производные по координатам x_1, x_2 показаны при помощи соответствующих индексов после запятой.

Соотношения упругости для моментов и сдвигающих усилий в случае ортотропной пластины, оси ортотропии которой совпадают с координатными осями и имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2; & M_2 &= D_{22}\kappa_2 + D_{12}\kappa_1; \\ M_{12} &= 2D_{66}\kappa_{12}; & Q_1 &= K_1\gamma_1; & Q_2 &= K_2\gamma_2. \end{aligned}$$

Здесь $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ – деформации изгиба и кручения срединной поверхности пластины, которые с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \psi_{1,1}; & \kappa_2 &= \psi_{2,2}; & 2\kappa_{12} &= \psi_{1,2} + \psi_{2,1}; \\ \gamma_1 &= \psi_1 - \theta_1; & \gamma_2 &= \psi_2 - \theta_2; & -\theta_1 &= w_{,1}; & -\theta_2 &= w_{,2} \end{aligned}$$

можно выразить через углы поворота элемента поверхности ψ_1, ψ_2 , углы поворота нормали без учета сдвига θ_1, θ_2 и γ_1, γ_2 – углы поворота нормали, обусловленные сдвигом. Коэффициенты жесткости K_i, D_{ij} определяются соотношениями

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; & D_{12} &= \nu_2 D_{11}; & D_{22} &= \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \\ D_{66} &= \frac{G_{12} h^3}{12}; & K_1 &= \frac{5}{6} h G_{13}; & K_2 &= \frac{5}{6} h G_{23}, \end{aligned}$$

где E_i, G_{ij}, ν_i – модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона, соответственно.

С учетом приведенных соотношений упругости и выражений для деформаций через углы ψ_1, ψ_2 и прогиб пластины w исходные уравнения равновесия приобретают вид

$$\begin{aligned} K_1\psi_{1,1} + K_1w_{,11} + K_2\psi_{2,2} + K_2w_{,22} &= -q; \\ D_{11}\psi_{1,11} + D_{12}\psi_{2,12} + D_{66}\psi_{1,22} + D_{66}\psi_{2,12} - K_1\psi_1 - K_1w_{,1} &= 0; \\ D_{22}\psi_{2,22} + D_{12}\psi_{1,12} + D_{66}\psi_{2,11} + D_{66}\psi_{1,12} - K_2\psi_2 - K_2w_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия для жесткого закрепления сторон пластины изначально записываем как $w=0$; $\psi_{\bar{n}}=0$; $\psi_{\parallel}=0$, где $\psi_{\bar{n}}$ – угол поворота элемента срединной поверхности относительно нормали к рассматриваемой стороне, ψ_{\parallel} – угол поворота относительно стороны пластины. Выраженные через углы ψ_1, ψ_2 граничные условия будут иметь такой вид:

$$w=0; \quad \psi_1=0; \quad \psi_2=0. \quad (1.3)$$

Система трех уравнений (1.2) в сочетании с граничными условиями на сторонах (1.3) образует двумерную краевую задачу в уточненной постановке относительно прогиба w и углов ψ_1, ψ_2 .

2. Методика решения краевых задач.

Сформулированная двумерная краевая задача (1.2) – (1.3) может быть решена при помощи сочетания методов сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации. Поскольку использование данных методов предполагает наличие прямоугольной исходной области, рассматриваемая задача требует некоторой модификации.

Как показано в [7], где детально описан подход к решению подобных задач, исследуемая область в виде произвольного выпуклого четырехугольника в координатах x_1, x_2 может быть преобразована в единичный квадрат $[0 \leq \xi_1 \leq 1], [0 \leq \xi_2 \leq 1]$ в новой системе координат ξ_1, ξ_2 . Это достигается за счет замены переменных в виде

$$\bar{x} = T \cdot \bar{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

где вектор \bar{x} имеет компоненты $\{x_1, x_2\}$, вектор $\bar{\varepsilon}$ компоненты $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \xi_2\}$, а компоненты t_{ij} матрицы перехода T однозначно определяются по координатам вершин четырехугольника.

Исходная система разрешающих уравнений (1.2) в матричном виде может быть представлена как

$$S \cdot \bar{f} = \bar{q}, \quad (2.2)$$

используя вектор \bar{f} с 18 компонентами $\{\psi_1, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,11}, \psi_{1,22}, \psi_{1,12}, \psi_2, \dots, w_{1,12}\}$, вектор правых частей $\bar{q} = \{-q, 0, 0\}$ и соответствующую матрицу коэффициентов S размером 3×18 . Наличие в (2.2) производных искомых функций при переходе к новой системе координат приводит к изменению коэффициентов матрицы S , а сама система приобретает вид $S^* \cdot \bar{f}^* = \bar{q}^*$, где \bar{f}^* и \bar{q}^* – аналоги векторов \bar{f} и \bar{q} в координатах ξ_1, ξ_2 ; $\bar{f}^* = \{\psi_1, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,11}, \psi_{1,22}, \psi_{1,12}, \psi_2, \dots, w_{1,12}\}^T$. Частные производные в новых координатах также показаны индексами после точки с запятой.

Поскольку в разрешающей системе уравнений (1.2) присутствуют частные производные искомых функций до второго порядка включительно, для сплайн-аппроксимации использованы B -сплайны третьей степени. Суть метода состоит в представлении решения задачи (на примере функции прогиба $w(x_1, x_2)$) в виде

$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^N w_i(x_1) \varphi_i(x_2), \quad (2.3)$$

где w_i – неизвестные функции; φ_i – линейные комбинации B -сплайнов третьей степени. Сплайн-функции B_3^i строятся на равномерной сетке узлов с шагом $x_2^{i+1} - x_2^i$, а граничные условия в направлении аппроксимации удовлетворяются автоматически за счет выбора соответствующих коэффициентов для составляющих φ_i :

$$\varphi_0(x_2) = -4B_3^{-1} + B_3^0; \quad \varphi_1(x_2) = B_3^{-1} - 0,5B_3^0 + B_3^1;$$

$$\varphi_i(x_2) = B_3^i; \quad i = 2, \dots, N-2;$$

$$\varphi_{N-1}(x_2) = B_3^{N+1} - 0,5B_3^N + B_3^{N-1}; \quad \varphi_N(x_2) = -4B_3^{N+1} + B_3^N.$$

Для повышения точности аппроксимации точки коллокации выбраны внутри интервалов между узлами сетки x_2^{2i}, x_2^{2i+1} по схеме: $\varepsilon_{2i} = x_2^{2i} + t_1(x_2^{2i+1} - x_2^{2i})$, $\varepsilon_{2i+1} = x_2^{2i} + t_2(x_2^{2i+1} - x_2^{2i})$, где t_1, t_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0; 1], i = 0, 1, \dots, n$.

Используя представление искомых функций в форме (2.3), из исходной двумерной краевой задачи для системы уравнений в частных производных получаем одномерную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Последняя, в свою очередь, решается многократно описанным в литературе методом дискретной ортогонализации [6].

На основании полученного решения для искомых $w_i, \psi_{1i}, \psi_{2i}$ и соответствующих им φ_i , можно восстановить значения функций двух координат $w(\xi_1, \xi_2), \psi_1(\xi_1, \xi_2)$ и

$\psi_2(\xi_1, \xi_2)$. По ним, выполняя обратное преобразование (2.1), определяем значения функций $w(x_1, x_2), \psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)$ в исходной области.

Поскольку побочным результатом применения метода дискретной ортогонализации является расчет, в том числе, первых производных искомых функций по оси ξ_1 , а вычисление частных производных по ξ_2 не составляет труда на основании свойств B -сплайнов, решение задачи можно легко дополнить значениями входящих в (1.1) моментов и усилий. Принимая во внимание, что данные величины статически эквивалентны действующим в пластине напряжениям, можно выполнить обратный переход, используя известные соотношения [3]:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3}z; \quad \sigma_y = -\frac{12M_y}{h^3}z; \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3}z;$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{6Q_x}{h_3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right); \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{6Q_y}{h_3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Имея величины всех компонент тензора напряжений (σ_z пренебрегаем на основании свойств рассматриваемой модели), можно вычислить величину интенсивности напряжений (обобщенного напряжения) [1]:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}.$$

Данная величина используется в одной из теорий разрушения и удобна для интегральной оценки напряжений, действующих в каждой точке пластины.

3. Результаты расчетов.

Для анализа комплексного влияния геометрических параметров пластины, упругих свойств материала и переменной нагрузки на НДС был решен ряд задач для пластин в форме: трапеции, близкой к треугольнику, ромба и квадрата, геометрические особенности которых показаны на рис. 1 – 5.

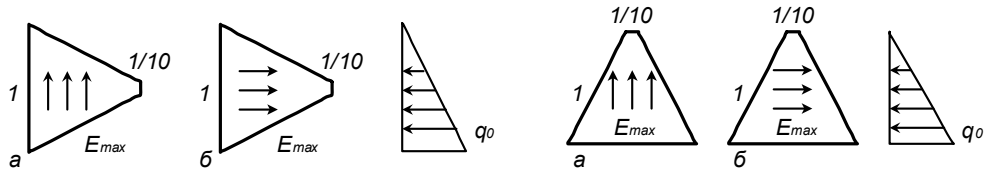


Рис. 1

Рис. 2

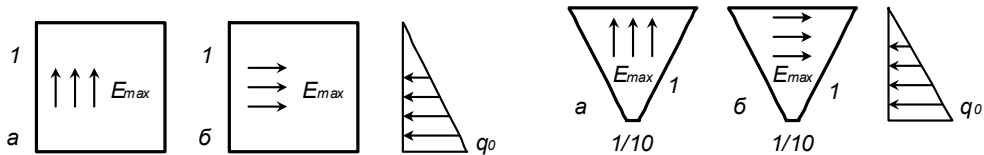


Рис. 3

Рис. 4

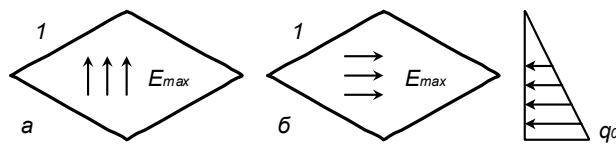


Рис. 5

Поверхностная нагрузка $q(x_1, x_2)$ во всех случаях принята линейно изменяющейся от 0 в точках с максимальным значением координаты x_2 до q_0 в точках с минимальной координатой x_2 . Для каждого варианта геометрии рассмотрено три набора упругих констант материала. Рис. 1, $a - 5$, a соответствуют случаю ортотропного углепластика CFRP [4] (Carbon fiber reinforced polymer, $E_1 = 2,11E_0$, $E_2 = 0,053E_0$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = G_{31} = 0,026E_0$, $G_{23} = 0,013E_0$), когда ось с наибольшим модулем E_{max} расположена параллельно оси x_2 ; рис. 1, $\bar{b} - 5$, \bar{b} – для $E_{max} \parallel x_1$. Третий материал принят условно-изотропным со средними значениями упругих постоянных, принятых для CFRP: $E = (E_1 + E_2)/2$ и т.п.

Результаты расчетов представлены в таблице в виде величин максимального прогиба $w^* = wE/q_0$ и максимального значения интенсивности напряжений σ_{imax} на поверхности пластины $z = h/2$ для 5 вариантов формы и трех наборов упругих постоянных материала.

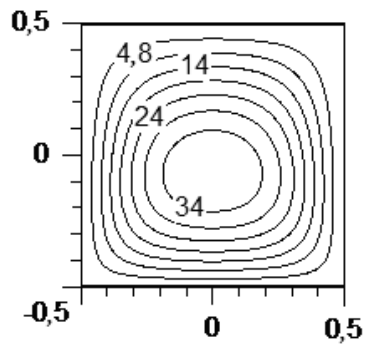
Форма	материал	w^*_{max}	σ_{imax}
треугольник ¹ , рис. 1	a	– ²	–
	\bar{b}	16,55	12,1
	изотр.	1,645	6,86
треугольник, рис. 2	a	19,4	13,95
	\bar{b}	21,2	14,7
	изотр.	2,14	8,56
квадрат, рис. 3	a	38,6	27,2
	\bar{b}	44,0	29,8
	изотр.	8,12	17,55
треугольник, рис. 4	a	14,05	9,7
	\bar{b}	9,4	6,78
	изотр.	1,195	5,28
ромб, рис. 5	a	26,6	23,6
	\bar{b}	48,8	21,5
	изотр.	5,06	12,95

¹ пластина в форме трапеции с соотношением оснований 1:10, близкая к треугольнику;

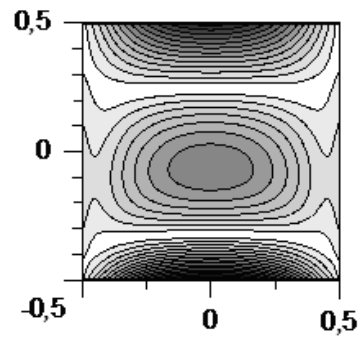
² в результате расчета получен некорректный результат.

Как видно из представленных данных (таблица), наименьшие значения прогиба w^*_{max} и интенсивности напряжений σ_{imax} имеют место для пластины в форме треугольника с вариантом ориентации рис. 1 и рис. 4. По сравнению с ними пластина в форме ромба (рис. 5) при практически вдвое большей площади, воспринимающей нагрузку q , имеет в 2-3 раза большие значения w^*_{max} и σ_{imax} . Квадратная пластина из-за особенности своей формы (рис. 3) оказывается наиболее восприимчивой к деформации, одновременно показывая максимальные значения σ_{imax} , в 3 – 5 раз, в зависимости от материала, превышающие таковые для треугольников.

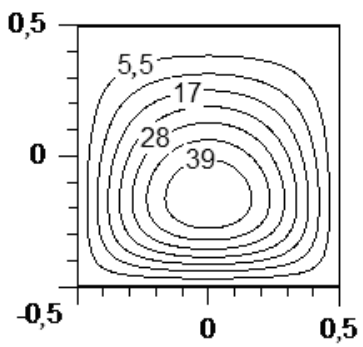
Принимая во внимание условия закрепления на краях, которые для всех рассмотренных вариантов задач соответствуют жесткому закреплению, максимальные значения прогиба ожидаемо приходятся на центры пластин, с небольшими смещениями к «нижней» части, что соответствует направлению возрастания поверхностной нагрузки. Смещение это незначительно, но хорошо заметно даже при визуальном анализе поверхностей функции прогиба $w^*(x_1, x_2)$, которые приведены в виде изолиний на рис. 6, 8 и 10 для квадратных пластин, а на рис. 12, 14 и 16 – для треугольных (в положении рис. 4).



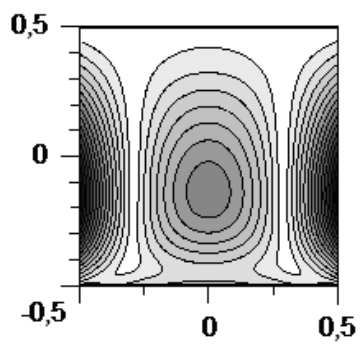
Puc. 6



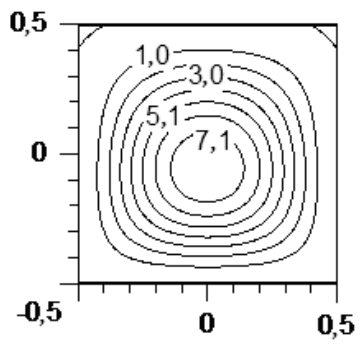
Puc. 7



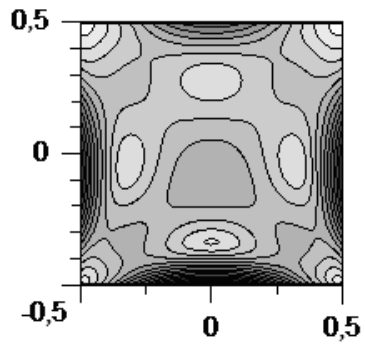
Puc. 8



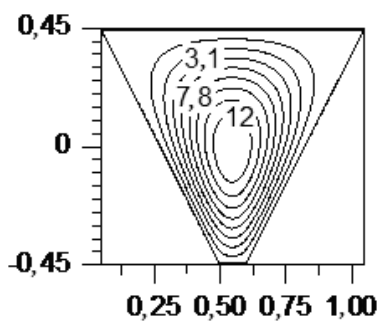
Puc. 9



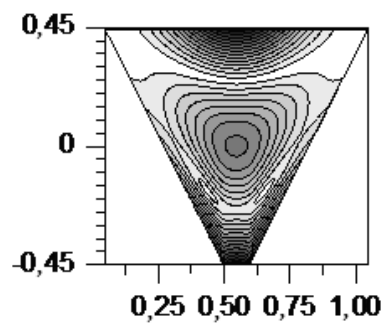
Puc. 10



Puc. 11



Puc. 12



Puc. 13

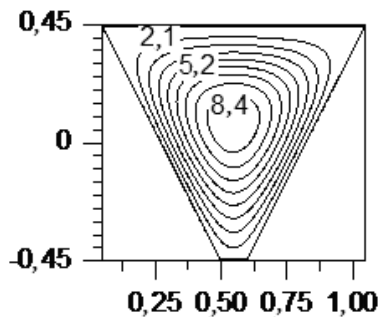


Рис. 14

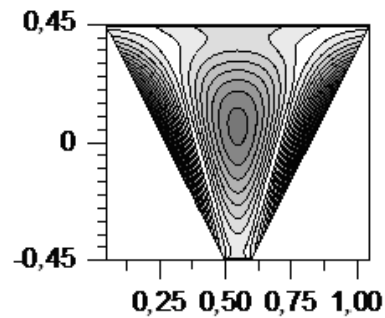


Рис. 15

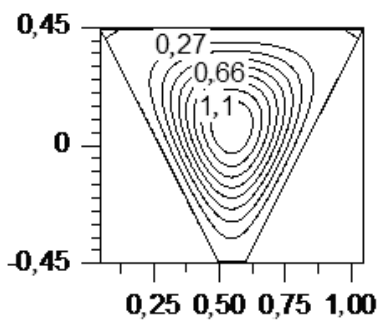


Рис. 16

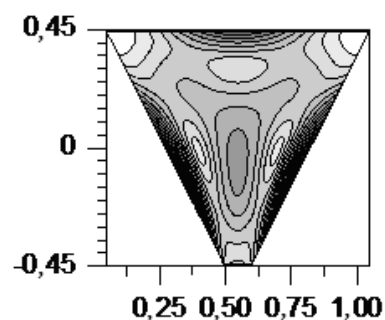


Рис. 17

Отметим, что рис. 6 и 12 соответствуют варианту ориентации материала «а»; рис. 8 и 14 – «б», рис. 10 и 16 – изотропным пластинам.

Сравнивая результаты расчетов для различных материалов, можно отметить, что поверхности прогиба $w^*(x_1, x_2)$ имеют подобный вид как для квадратных, так и для треугольных пластин. На их фоне совершенно по-иному выглядят функции интенсивности напряжений $\sigma_i(x_1, x_2)$, которые показаны на рис. 7, 9, 11 – для квадратных пластин и рис. 13, 15, 17 – для треугольных. Более темным областям соответствуют большие значения σ_i . Легко заметить, что для ортотропных материалов максимальные значения σ_i приходятся на стороны, перпендикулярные направлению с максимальным модулем упругости E , независимо от формы пластин. При этом для изотропного материала максимальные значения интенсивности напряжений наблюдаются вдоль средней части всех краев пластин (рис. 11, рис. 17) и незначительны – непосредственно в углах.

В целом, в рассмотренных задачах с жестким закреплением на краях наибольшее влияние на величину деформации, кроме свойств материала, оказывает форма пластины, а неравномерность нагрузки имеет второстепенное значение. Различная ориентация осей ортотропии слабо отражается на форме поверхности прогиба (рис. 6, 8 и рис. 12, 14), но приводит к полному перераспределению напряжений (рис. 7, 9 и рис. 13, 15).

Выводы.

1. В работе получено решение ряда задач статического анализа ортотропных пластин сложной формы в условиях переменной поверхностной нагрузки на основе ранее предложенного авторами численно-аналитического подхода.

2. Представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния для пластин в форме квадрата, ромба и близкой к треугольнику трапеции в условиях жесткого закрепления сторон.

3. Показано незначительное влияние неравномерности поверхностной нагрузки на величину деформации и распределение напряжений, где определяющими факторами являются форма пластины и параметры анизотропии материала.

Р Е З Ю М Е . Дано постановку та запропоновано методику розв'язання ряду задач із статичного аналізу пластин складної форми в умовах змінного поверхневого навантаження з використанням запропонованого авторами чисельно-аналітичного підходу. Наведено результати розрахунків напружено-деформованого стану для пластин у формі квадрата, ромба та близької до трикутника трапеції в умовах жорсткого закріплення сторін. Показано незначний вплив нерівномірності поверхневого навантаження на величини деформації та розподіл напружень, де основними факторами є форма пластин та параметри анизотропії матеріалу.

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. *Курна Л.В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПП». – 2009. – С. 408.
3. *Лехницкий С.Г.*, Анизотропные пластинки. – Л.: ОГИЗ Гостехиздат. – 1947. – 355 с.
4. *Alam N., Asnani N.T.* Vibration and Damping Analysis of Fibre Reinforced Composite Material Plates // *J. of Composite Materials.* – 1986. – **20**, issue 1. – P. 2 – 18.
5. *Birman V.* Plates structures. – New York: Springer, 2011. – 298p.
6. *Godunov S.K.* Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations [in Russian] // *Usp. Mat. Nauk.* – 1961. – **16**, N 3. – P. 171 – 174.
7. *Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N.* Solving of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in a Refined Formulation // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 326 – 333.
8. *Kryukov N.N.* Design of Oblique and Trapezoidal Plates with Use of Spline Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 5. – P. 414 – 417.
9. *Li W.Y., Cheung Y.K., Asce F., Tham L.G.* Spline Finite Strip Analysis of General Plates // *J. Eng. Mech.* – 1986. – **112**. – P. 43 – 54.
10. *Mohajerani P.* The Thick Orthotropic Plates Analysis Methods, Part I: A Review IOSR // *J. of Mech. and Civil Engineering.* – 2015. – **12**, № 2. – P. 69 – 77.
11. *Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M.* A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates // *Int. J. of Mech. Sciences.* – 2010. – **52**. – P. 1588 – 1596.
12. *Shahidi A.R. et al.* Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2007. – **12**. – P. 832 – 848.

Поступила 10.07.2017

Утверждена в печать 30.01.2018