

В. С. Ловейкин¹, Ю. А. Ромасевич¹,
А. С. Хорошун², А. Г. Шевчук¹

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИИ
ДВИЖЕНИЕМ ПОДВИЖНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МАЯТНИКА. ЧАСТЬ 1

¹Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины,
ул. Героев обороны, 12 в, Киев, Украина; e-mail: romasevichyuriy@ukr.net

²Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. The modification of control constraints in the displacement optimal control problems of a moveable mathematical pendulum is substantiated. A statement of the problem of optimal by operating speed displacement control of motion of moveable mathematical pendulum is realized for the classic and modified constraints. Using the analytical integration of the system motion equations, an optimization problem is reduced to the problem of nonlinear programming with constraints. This problem is solved numerically with the particle swarm method. The proposed technique of solving the optimal by operating speed control problems is generalized for the mathematical models that can be integrated analytically.

Keywords: optimal by operating speed control, oscillations, gantry crane, transition mode, dynamic load.

Введение.

Задаче устранения колебаний груза на гибком подвесе при разгоне или торможения математического маятника за минимальное время посвящено значительное количество работ. Актуальность рассматриваемой задачи объясняется желанием увеличить производительность работы устройств с подвешенным грузом, например, грузоподъемных кранов (особенно в морских портах). Для решения этой задачи использованы принцип максимума [1 – 5, 8, 9] и метод моментов [5]. Отметим, что характерной особенностью задач оптимального быстродействия является наличие ограничений на управление системой [7]. Принцип максимума позволяет учесть ограничения на управление и фазовые координаты системы (скорость, ускорение и т.д.), однако использование этого метода дает лишь «качественную» информацию об управлении, ничего не уточняя об моментах перехода от одной границы управления к другой. Для определения этих моментов необходимо анализировать движение системы в фазовом пространстве [1 – 3, 5, 8] или решать трансцендентные алгебраические уравнения [3, 4, 9].

В работах [3, 7, 8, 11, 12, 13] использованы симметричные ограничения на управление. Однако, практическая реализация результатов решения задачи оптимального управления, как и в других технических задачах [14], требует учитывать трение. Это приводит к необходимости в постановке задачи использовать несимметричные ограничения, что усложняет ее решение [2].

В данной работе, в отличие от указанных выше, в разных постановках исследована задача оптимального по быстродействию управления движением подвижного математического маятника. При этом особое внимание уделено влиянию ограничений на динамику движения системы. Для решения задачи использованы как аналитические, так и численные методы.

§1. Модель подвижного математического маятника.

Рассмотрим систему, которая описывает движение подвижного математического маятника (рис. 1).

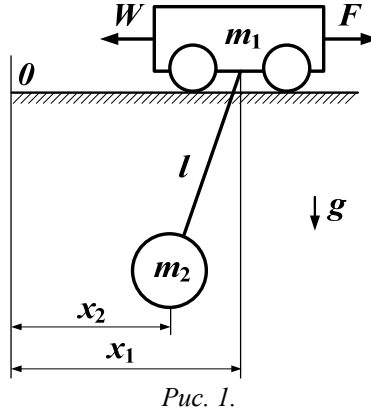


Рис. 1.

Линеаризованные дифференциальные уравнения движения приведенных масс m_1 и m_2 (рис. 1) имеют следующий вид:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F - W \cdot \text{sign} \left(\frac{dx_1}{dt} \right); \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{g}{l} (x_2 - x_1) = 0, \quad (1.1)$$

где m_1 – приведенная масса движимой точки подвеса маятника; m_2 – масса груза; x_2, x_1 – координаты центров масс, соответственно, груза и точки его подвеса; g – ускорение свободного падения; l – длина гибкого подвеса; F – движущее или тормозное усилие, действующее на точку подвеса груза; W – приведенная сила сопротивления перемещению точки подвеса груза. Принимаем, что при перемещении точки подвеса груза в течение разгона (торможения) она не меняет знак своей скорости, т.е. $\text{sign}(dx_1/dt) = 1$.

Вводя обозначения $x_2 = s_1$ и $u = [(F - W) / m_1] \cdot \Omega_0^{-2}$, систему дифференциальных уравнений (1.1) представим в следующем виде:

$$\frac{ds_j}{dt} = s_{j+1}; \quad j = \overline{(1, 4)}; \quad s_5 = u - \Omega^2 s_3, \quad (1.2)$$

где Ω – частота собственных колебаний груза относительно подвижной точки подвеса, определяемая зависимостью $\Omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{g}{l}}$; Ω_0 – частота собственных колебаний груза относительно неподвижной точки подвеса, которая определяется так:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

§2. Постановка задач оптимального быстродействия.

Краевые условия для фазовых координат системы определяем из следующих соотношений:

$$s_j(t_0) = s_{j,0}; \quad s_j(T) = s_{j,T}, \quad (2.1)$$

где $s_{j,0}$ и $s_{j,T}$ – начальное и конечное значение j -й фазовой координаты системы; t_0 и T – моменты начала и окончания оптимального управляемого режима движения системы. Момент начала управляемого режима движения известен априори, а момент его окончания определяется в результате решения задачи оптимального управления движением подвижного математического маятника.

Для режима разгона подвижного математического маятника можно записать:

$$\begin{aligned} t_0 = 0; T = T_{acceler}^{opt}; s_{1,0} = s_{2,0} = s_{3,0} = s_{4,0} = 0; \\ s_{1,T} = (T - t_0)v_{steady} \cdot 2^{-1}; s_{2,T} = v_{steady}; s_{3,T} = s_{4,T} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $T_{acceler}^{opt}$ – продолжительность разгона при оптимальном быстродействии системы; v_{steady} – установившаяся скорость движения точки подвеса груза.

Нулевые начальные условия движения системы означают движение точки подвеса груза из положения покоя, а колебания груза отсутствуют. Перемещение подвижного математического маятника состоит из трех режимов: разгона, установившегося движения и торможения. Для определения продолжительности режима установившегося движения предположим, что в течение режимов разгона и торможения точка подвеса груза перемещается на одинаковые расстояния, равные $T \cdot v_{steady} \cdot 2^{-1}$. Используя это приближение, можно записать выражение

$$t_{steady} = s \cdot v_{steady}^{-1} - T_{acceler}^{opt}, \quad (2.3)$$

где t_{steady} – продолжительность установившегося движения подвижного математического маятника; s – заданное расстояние его перемещения. В дальнейших расчетах расстояние перемещения крана в течение торможения необходимо уточнить. Это необходимо для того, чтобы учесть действие возможных стохастических возмущений, которые могут иметь место на протяжении установившегося движения системы. В этом случае перемещение подвижного математического маятника в течение торможения не будет равно величине $T \cdot v_{steady} \cdot 2^{-1}$. В общем случае для режима торможения справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} t_0 = T_{acceler}^{opt} + t_{steady}; T = T_{acceler}^{opt} + t_{steady} + T_{deceler}^{opt}; \\ s_{1,0} = s - x_1(t_0) + \Delta x; s_{2,0} = \frac{dx_1}{dt}(t_0) - \Delta v; s_{3,0} = \Delta x \cdot \Omega_0^2; \\ s_{4,0} = \Delta v \cdot \Omega_0^2; s_{1,T} = s; s_{2,T} = s_{3,T} = s_{4,T} = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $T_{deceler}^{opt}$ – продолжительность торможения при оптимальной производительности системы; Δx и Δv – отклонения положений и скоростей груза и точки его подвеса в момент начала торможения; $x_1(t_0)$ – положение точки подвеса груза в начале торможения. Начальные условия движения системы (2.4) означают, что в начале торможения присутствуют колебания груза на гибком подвесе, которые, например, могут быть результатом ветрового порыва. Таким образом, для решения задачи оптимального быстродействия системы в режиме торможения необходимо задать величины Δx , Δv , положение и скорость движения точки подвеса груза в момент времени $T_{acceler}^{opt} + t_{steady}$. Конечные условия (2.4) означают устранение колебаний груза и остановку системы в заданном положении s .

Критерий оптимального быстродействия движения системы записывается следующим образом:

$$\int_{t_0}^T dt = (T - t_0) \rightarrow \min. \quad (2.5)$$

Поскольку после разгона точка подвеса груза должна выполнять движение с установившейся скоростью v_{steady} , то обеспечение оптимального быстродействия ее перемещения выполняется путем минимизации длительностей разгона и торможения.

Итак, верхняя и нижняя границы интегрирования в (2.5) – разные: для разгона они записаны в системе (2.2), а для торможения – в системе (2.4).

Ограничения на управление движением системы являются несимметричными, что связано с приведенной силой W :

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}; u_{\max} = \frac{F_{\max} - W}{m_1} \cdot \Omega_0^{-2}; u_{\min} = \frac{F_{\min} - W}{m_1} \cdot \Omega_0^{-2}, \quad (2.6)$$

где F_{\max} и F_{\min} – максимальное движущее и тормозное усилия, соответственно, определяемые перегрузочной способностью электропривода системы, причем $F_{\max} = -F_{\min}$, что следует из возможности электропривода создавать одинаковые по величине, но противоположно направленные электромагнитные моменты.

Отметим, что ограничения (2.6) являются одинаковыми как для режима разгона, так и для режима торможения подвижного математического маятника. В дальнейших расчетах также используем модифицированные ограничения на управление, которые следуют из соотношений (2.6) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\min}^{\text{acceler}} \leq u \leq \tilde{u}_{\max}^{\text{acceler}}, \quad t \in [t_0, T_{\text{acceler}}^{\text{opt}}]; \\ \tilde{u}_{\min}^{\text{deceler}} \leq u \leq \tilde{u}_{\max}^{\text{deceler}}, \quad t \in [T_{\text{acceler}}^{\text{opt}} + t_{\text{steady}}; T_{\text{acceler}}^{\text{opt}} + t_{\text{steady}} + T_{\text{deceler}}^{\text{opt}}]; \\ \tilde{u}_{\max}^{\text{acceler}} = \frac{F_{\max} - W}{m_1} \cdot \Omega_0^{-2}; \tilde{u}_{\min}^{\text{acceler}} = \tilde{u}_{\max}^{\text{deceler}} = \frac{-W}{m_1} \cdot \Omega_0^{-2}; \tilde{u}_{\min}^{\text{deceler}} = \frac{F_{\min} - W}{m_1} \cdot \Omega_0^{-2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\tilde{u}_{\min}^{\text{acceler}}$ и $\tilde{u}_{\max}^{\text{acceler}}$ – соответственно, минимальное и максимальное управления допустимые для режима разгона системы; $\tilde{u}_{\min}^{\text{deceler}}$ и $\tilde{u}_{\max}^{\text{deceler}}$ – соответственно, минимальное и максимальное управления, допустимые для режима торможения системы. Ограничения на управление (2.7) означают, что направление электромагнитного момента электропривода не меняется: этапы работы двигателя меняются этапами, при которых он не работает (отключен от источника питания). Преимущества и недостатки такого подхода будут представлены ниже.

Таким образом, поставлены две задачи оптимального управления передвижением подвижного математического маятника. Первая задача включает: математическую модель системы (1.2), краевые условия для режимов разгона (2.2) и торможения (2.4), оптимизационный критерий (2.5) и ограничения на управление (2.6). Для второй задачи меняются только ограничения на управление: они описываются выражениями (2.7). Отметим, что поставленные задачи можно отнести к классу задач стабилизации фазовых координат [10, 16, 17], а также к классу задач оптимального управления [18, 19].

§3. Решение задач оптимального быстрогодействия.

Известно [2, 6, 9], что оптимальное по быстродействию управление имеет релейный вид. Опираясь на эти данные, следует получить решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{ds_j^i}{dt} = s_{j+1}^i; \quad s_5^i = u^i - \Omega^2 s_3^i; \\ s_j^{i+1} \left(\sum_{\xi=0}^i t_\xi \right) = s_j^i \left(\sum_{\xi=0}^i t_\xi \right); \quad s_j^i \in \left[\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi; \sum_{\xi=0}^i t_\xi \right], \quad i = \overline{(1, n)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где n – количество этапов движения системы в течение разгона или торможения; u_i – управление на i -ом этапе движения системы, равное минимальному или максимальному допустимому управлению; t_i – продолжительность i -ого этапа движения системы; t_ξ – продолжительность ξ -ого этапа движения системы, которая введена в расчеты для обозначения временного промежутка от начала управляемого процесса к моменту начала i -ого этапа ее движения. Величины t_ξ и t_i связаны следующим соотношением:

$$t_i = \sum_{\xi=0}^i t_\xi - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi. \quad (3.2)$$

Верхний индекс символа в (3.2) обозначает этап, в течение которого фазовая координата меняется. Для i -го этапа движения системы, при условии, что $u_i = \text{const}$, решение задачи Коши (3.1) имеет вид:

$$\begin{aligned}
s_1^i &= B_0^i + tB_1^i + t^2B_2^i + B_3^i \cos\left(\Omega\left(t - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\right) + B_4^i \sin\left(\Omega\left(t - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\right); \\
s_2^i &= B_1^i + 2tB_2^i + \Omega\left(B_4^i \cos\left(\Omega\left(t - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\right) - B_3^i \sin\left(\Omega\left(t - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\right)\right); \\
s_3^i &= 2B_2^i - \Omega^2\left(B_3^i \cos\left(\Omega\left(t - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\right) + B_4^i \sin\left(\Omega\left(t - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\right)\right); \\
s_4^i &= \Omega^3\left(B_3^i \sin\left(\Omega\left(t - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\right) - B_4^i \cos\left(\Omega\left(t - \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где B_0^i, \dots, B_4^i – постоянные коэффициенты, которые определяются согласно следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}
B_0^i &= s_1^i\left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right) + s_3^i\left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right) \cdot \Omega^{-2} - \left(s_2^i\left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right) - s_4^i\left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)\Omega^{-2}\right) \cdot \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi - u^i \cdot \Omega^{-4} + \\
&+ u^i \cdot \left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right)^2 \cdot \Omega^{-2} \cdot 2^{-1}; \quad B_1^i = s_2^i\left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right) + \left(s_4^i\left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right) - u^i \cdot \sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right) \cdot \Omega^{-2}; \\
B_2^i &= (u^i) \cdot \Omega^{-2} \cdot 2^{-1}; \quad B_3^i = (u^i) \cdot \Omega^{-4} - \left(s_3^i\left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right) \cdot u^i\right) \cdot \Omega^{-2}; \quad B_4^i = -s_4^i\left(\sum_{\xi=0}^{i-1} t_\xi\right) \cdot \Omega^{-3}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Исходя из того, что на этапе разгона точки подвеса груза ей необходимо увеличить скорость, управление для первого этапа разгона u_1 системы примем максимально возможным: $u_1 = u_{\max}$ – для задачи (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.6) и $u^1 = \tilde{u}_{\max}^{\text{acceler}}$ – для задачи (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.7). Для режима торможения примем: $u_1 = u_{\min}$ – для задачи (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.6), $u^1 = \tilde{u}_{\min}^{\text{deceler}}$ – для задачи (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.7). При переходе к следующим этапам движения системы как для режима разгона, так и для режима торможения, управление мгновенно переходит из одной границы области допустимых управлений на другую, т.е. величины u_{\max} и u_{\min} для задачи – (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.6) и величины $\tilde{u}_{\max}^{\text{acceler}}$ и $\tilde{u}_{\min}^{\text{deceler}}$ – для задачи (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.7) последовательно чередуются. В случае, если определить априори величину управления u_1 не удастся, можно принять ее любой: максимально или минимально допустимой. Если величина u_1 задана неверно, например $u_1 = u_{\min}$, то в ходе решения задачи окажется, что продолжительность первого этапа будет равной нулю или близкой к нему. В этом случае необходимо изменить величину u_1 , т.е. принять $u_1 = u_{\max}$.

Подставляя в выражения (3.3) и (3.4) начальные значения фазовых координат (2.2) и (2.4), получим функции, описывающие движение динамической системы в течение первого этапа. Подставляя в полученные выражения вместо символа t символ t_1 , получим формулы для фазовых координат в конце первого этапа движения системы (для режимов разгона и торможения, соответственно). Полученные выражения, в качестве начальных фазовых координат, подставим в формулы (3.3) для второго этапа движения системы. Продолжая выполнять такие расчеты, получим выражения $s_j^n(T) = f_j(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n, B_0^i, \dots, B_4^i, s_{j,0}, u_{\max}, u_{\min})$ – для задачи (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.6) и $s_j^n(T) = f_j(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n, B_0^i, \dots, B_4^i, s_{j,0}, \tilde{u}_{\max}^{\text{acceler}}, \tilde{u}_{\min}^{\text{deceler}}, \tilde{u}_{\min}^{\text{deceler}})$ – для задачи (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.7).

Установить величину n достаточно трудно. Если управляемая динамическая система является нормальной и корни характеристического уравнения, которые ей соответствуют, действительны, то можно использовать теорему об n -интервалах. В этом случае количество этапов движения системы не больше, чем ее порядок [8] и тогда необходимо принимать величину n , равную порядку динамической системы. Для решаемых в данной статье задач оптимального управления не выполняются условия теоремы об n -интервалах, поскольку характеристическое уравнение динамической системы имеет комплексные корни.

Примем, что $n = 5$. Таким образом, можем свести задачи оптимального управления (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.6) и (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.7) к задачам нелинейного программирования:

$$\sum_{i=0}^5 t_i \rightarrow \min; t_i \geq 0; s_j^5 \left(\sum_{i=0}^5 t_i \right) = s_{j,T}^5, \quad (3.5)$$

которые необходимо решить относительно неизвестных t_1, t_2, t_3, t_4 и t_5 . Для обеих задач оптимального управления (1.2), (2.2), (2.4) – (2.6) и (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (2.7) выражения $s_j^5 \left(\sum_{i=1}^5 t_i \right)$ будут разными. В соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа для учета ограничений в виде равенств перейдем к следующей задаче поиска минимума сложной функции:

$$\sum_{i=0}^5 t_i + \sum_{j=1}^4 \lambda_j \left(s_j^5 \left(\sum_{i=0}^5 t_i \right) - s_{j,T}^5 \right) \rightarrow \min \quad (t_i \geq 0), \quad (3.6)$$

где λ_j – неопределенный множитель Лагранжа, соответствующий j -ому ограничению.

Отметим, что выражения $s_j^5 \left(\sum_{i=0}^5 t_i \right) - s_{j,T}^5$ включают трансцендентные функции, что затрудняет получение решений задачи (3.6). Поэтому для определения неизвестных t_1, t_2, t_3, t_4 и t_5 необходимо использовать численные методы, например, метод роя частиц [15], который позволяет определить глобальный минимум функции (3.6). Для иллюстрации предложенной методики ниже представим решение задачи (3.6) с использованием параметров грузоподъемного портового грейферного перегружателя, которые приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Параметр	Значение
Приведенная масса крана m_1 , кг	$5,34 \cdot 10^4$
Приведенная масса груза m_2 , кг	$3,51 \cdot 10^4$
Длина гибкого подвеса l , м	$1,00 \cdot 10^1$
Скорость установившегося движения крана v_{steady} , м/с	$2,76 \cdot 10^0$
Заданное расстояние перемещения крана с грузом s , м	$3,26 \cdot 10^1$
Приведенная сила сопротивления перемещению крана W , Н	$1,73 \cdot 10^4$
Максимальное движущее усилие привода крана F_{max} , Н	$1,30 \cdot 10^5$

Для решения задачи (3.6) использован метод роя частиц. Параметры роя занесены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Параметр	Значение
Количество итераций	100
Число частиц в рое	50
Коэффициент инерции w	0,72
Постоянные ускорения $c_1=c_2$	1,19
Область поиска значений t_1, t_2, t_3, t_4, t_5	0...4

Задача (3.6) решена четыре раза – для режима разгона и торможения крана при классических (2.6) и модифицированных (2.7) ограничениях. Для каждого режима определение неизвестных значений t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 имеет итерационный характер: первоначальное задание $n = 5$ привело к тому, что два корня были близки к нулю. В дальнейших расчетах было принято $n = 5 - 2 = 3$, т.е. этапы движения системы, соответствующие корням близким к нулю, были отвергнуты. В дальнейшем выполнен повторный расчет конечных значений фазовых координат $s_j^3\left(\sum_{i=0}^3 t_i\right)$ и сформирована задача нелинейного программирования:

$$\sum_{i=0}^3 t_i + \sum_{j=1}^4 \lambda_j \left(s_j^3\left(\sum_{i=0}^3 t_i\right) - s_{j,T}^3 \right) \rightarrow \min \quad (t_i \geq 0). \quad (3.7)$$

Результаты решения задачи (3.7) приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Обозначение этапов	Продолжительность разгона		Продолжительность торможения	
	Ограничения на управление (2.6)	Ограничения на управление (2.7)	ограничения на управление (2.6)	ограничения на управление (2.7)
t_1, c	1,45	1,17	1,14	0,71
t_2, c	0,56	1,18	0,85	1,95
t_3, c	1,45	1,17	1,18	0,71

Как следует из табл. 3.3, продолжительности отдельных этапов движения системы различны для разных задач, что связано с различными ограничениями на управление (2.6) и (2.7).

Для иллюстрации решения задачи представим графики: фазового портрета колебаний груза на гибком подвесе (рис. 2) и график изменения скорости движения крана (рис. 3) (серый график отвечает оптимальному управлению, которое получено с учетом ограничений (2.6), а черный – с учетом ограничений (2.7)).

Из представленных на рис. 2 и 3 графиков следует, что колебания груза в момент остановки крана устраняются. Интенсивность изменения скорости движения крана, а также максимальное отклонение каната от вертикали при оптимальном управлении, которое получено с учетом модифицированных ограничений (2.7), значительно, меньше. Это приводит к уменьшению динамических нагрузок и увеличивает долговечность механизмов и металлоконструкции крана.

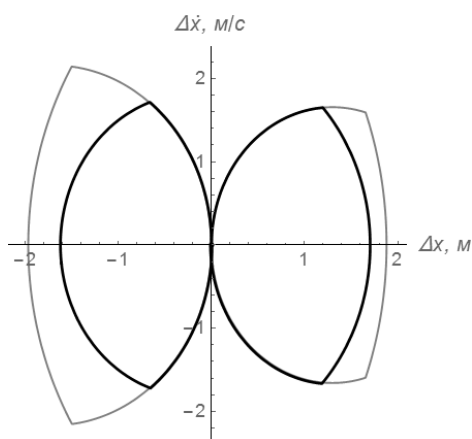


Рис. 2

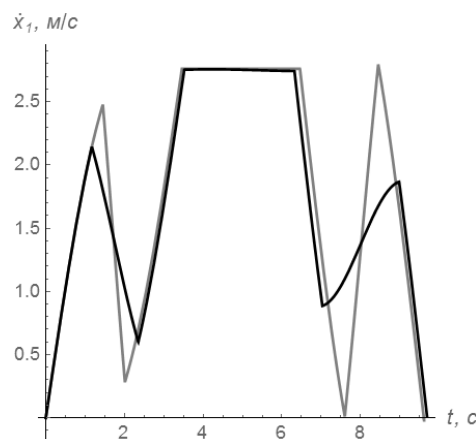


Рис. 3

§4. Обобщение методики решения задач оптимального быстродействия.

Обобщая процесс выполнения расчетов, приходим к такому выводу: определение величины n необходимо выполнять итерационным путем. Вначале на основе априорных данных задается определенное значение n , которое в процессе выполнения расчетов уменьшается. Эти расчеты состоят в том, что решается задача нелинейного программирования:

$$\sum_{i=0}^n t_{\xi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(s_j^n \left(\sum_{i=0}^n t_{\xi} \right) - s_{j,T}^n \right) \rightarrow \min \quad (t_i \geq 0), \quad (4.1)$$

где k – количество фазовых координат системы. При решении задачи (4.1) некоторые из решений будут нулевыми (или близкими к нулю, в зависимости от точности выбранного для численных расчетов метода). Необходимо уменьшить величину n на количество нулевых (или близких к нулю) решений задачи (4.1) и повторить расчеты. При этом те этапы движения системы, длительность которых равна нулю (или близка к нулю), не будут учтены в расчетах. Это позволит получить решения задачи (4.1), для которых $t_i > 0$.

Для установления эффективности полученных оптимальных управлений движением системы необходимо выполнить моделирование ее движения, а также экспериментально проверить качество реализации оптимального управления.

Заключение.

Подход к решению задачи оптимального быстродействия, который заключается в сведении ее к задаче нелинейного программирования может быть использован только для систем, уравнения движения которых можно решить аналитически (в общем случае линейных не выше четвертого порядка, некоторых линейных систем выше четвертого порядка и некоторых классов нелинейных систем).

Использование модифицированных ограничений на управление позволяет эксплуатировать крановый привод в менее напряженном режиме, поскольку знак движущего усилия в течение режима разгона (или торможения) не меняется. Можно надеяться, что использование модифицированных ограничений, подобных (2.7), для других задач позволит определить оптимальные управления, которые позволят повысить эффективность эксплуатации технических систем за счет незначительного увеличения продолжительности их движения.

Остается неисследованной проблема влияния ограничений на быстродействие движения системы, которая должна быть строго сформулирована и решена формальными математическими методами. Пока лишь можно сформулировать чисто теоретические соображения: при бесконечно больших величинах ограничений на управление (при отсутствии ограничений) длительность движения системы будет бесконечно малой; при бесконечно малых величинах ограничений на управление (в пределе нулевых) длительность движения системы будет бесконечно большой.

РЕЗЮМЕ. Обґрунтовано модифікацію обмежень на керування у задачах оптимального керування переміщенням рухомого математичного маятника. Виконано постановку задачі оптимального за швидкістю керування переміщенням рухомого математичного маятника для класичних та модифікованих обмежень. За допомогою аналітичного інтегрування рівнянь руху системи оптимізаційна задача зведена до задачі нелінійного програмування із обмеженнями. Вказана задача розв'язана чисельно із використанням методу рою частинок. Запропонована методика розв'язування задач оптимального за швидкістю керування узагальнена для математичних моделей, які можуть бути проінтегровані аналітично.

1. Герасимьяк Р.П., Леицёв. В.А. Анализ и синтез крановых электромеханических систем. – О.: СМИЛ, 2008. – 192 с.
2. Григоров О.В. Совершенствование рабочих характеристик крановых механизмов: дисс. на соиск. степ. докт. техн. наук: 05.05.05. – Харьков, 1995. – 386 с.

3. *Зайцев Ю.И.* Исследование нестационарных колебаний и оптимальные режимы работы грузоподъемных машин с поступательными движениями: дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: 01.02.06. – Харьков, 1981. – 259 с.
4. *Мельникова Л.В.* Автоматизация технологического процесса перемещения механизма с подвешенным грузом средствами микропроцессорного управления: дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: 05.09.03. – Одесса, 2000. – 116 с.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 392 с.
6. *Смехов А.А., Ерофеев Н.И.* Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.
7. *Стрельцов П.М.* Оптимизация работы портовых автоматизированных кранов и перегружателей: дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: 05.05.05. – Одесса, 1994. – 167 с.
8. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
9. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
10. *Babenko E.A., Martynuk A.A.* Stabilization of the Motion of a Nonlinear System with Interval Initial Conditions // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 2. – P. 182 – 191.
11. *Chen H., Fang Y., Sun N.* Optimal trajectory planning and tracking control method for overhead cranes // *IET Control Theory & Applications.* – 2016. – **10**, N 6. – P. 692 – 699.
12. *Da Cruz J.J., Leonardi F.* Minimum-time anti-swing motion planning of cranes using linear programming // *Optimal control applications and methods.* – 2014. – **34**, N 2. – P. 191 – 201.
13. *Ermidoro M., Formentin S., Cologni A., Previdi F., Savaresi M.S.* On time-optimal anti-sway controller design for bridge cranes // *American Control Conference (ACC).* – 2014. – P. 2809 – 2814.
14. *Golub G.A., Szalay K., Kukharets S.M., Marus O.A.* Energy efficiency of rotary digesters // *Progress in Agricultural Engineering Sciences.* – 2017. – **13**, N 1. – P. 35 – 49.
15. *Kennedy J., Eberhart R.C.* Particle swarm optimization // *IEEE International Conf. on Neural Networks.* – Perth, Australia, 1995. – P. 1942 – 1948.
16. *Khoroshun A.S.* Stability and Speed Control of a Series-Wound DC Motor // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 4. – P. 432 – 436.
17. *Khoroshun A.S.* Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 5. – P. 547 – 556.
18. *Loveikin V.S., Liashko A.P., Chovnyuk Y.V.* The Crane's vibrating systems controlled by mechatronic devices with magnetorheological fluid: the nonlinear mathematical model of behavior and optimization of work regimes // *Наук. Вісник Нац. Гірничого Університету.* – 2014. – N 6. – P. 97– 102.
19. *Loveikin V.S., Romaseych Yu.O.* Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode // *Наук. Вісник Нац. Гірничого Університету.* – 2014. – 2017. – N 6. – P. 97 – 102.

Поступила 29.05.2017

Утверждена в печать 30.01.2018