

А. В. Марчук, А. В. Нищота

**О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ
СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛИТ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ**

Национальный транспортный университет,

ул. Омеляновича-Павленко 1, 01010, Киев, Украина: e-mail: ksm_ntu@ukr.net

Abstract. Within the framework of spatial theory of elasticity, two variants of semi-analytical method of finite elements are built. In the first variant, a polynomial finite-element approximation is used to approximate the functions by the planar coordinate X . These functions are represented by the coordinate Y in the form of the Fourier series and by the thickness (Z coordinate) the known polynomials are used. In the second variant, the linear polynomials are used in representation by the coordinate X , the Fourier series – in representation by the coordinate Y , and distributing the functions by the thickness is found on the basis of analytical solving the proper system of differential equations. A necessity of construction of two variants is dictated by that they have the errors of approximation and arithmetic calculations. A computation by two variants gives some arguments in the proof of method validity. An analysis of the stress-strain state of layered composite plate is carried out under the normal and tangent loading, when the side of the square loading is equal to the plate thickness. A plate is considered: with a free lower surface, with the rigidly fastened lower surface, and lying on the half-space.

Key words: semi-analytical method of finite elements, normal and tangent local loading, sandwich composite panel.

Введение.

В современной технике актуальным является использование конструктивных систем композитной структуры, в частности слоистых, с высоким уровнем разномодульности составляющих материалов, а также ортотропии. Они находятся в сложных условиях деформирования, имеют различные условия закрепления, подвержены воздействию локальных нагрузений, которые могут нарушить ее целостность. Указанные особенности вызывают существенно трехмерное напряженно-деформированное состояние (НДС), зоны с высокими градиентами его изменения.

Использование прямых точных методов пространственной теории упругости для исследования указанных особенностей НДС в значительной мере осложнено, а классические направления – теории, построенные на упрощенных гипотезах Кирхгофа – Лява, Тимошенко, не обеспечивают в этих случаях даже ориентировочной точности. Поэтому продолжают развиваться приближенные к прямым точным методам теории упругости так называемые полуаналитические методы пространственной теории упругости, в частности, полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ).

Наиболее полный обзор публикаций по расчету конструкций с привлечением ПМКЭ представлен в [1]. Наибольшее количество работ в этом направлении посвящено расчету тел вращения. При этом по окружной координате применяется представление искомых функций в виде рядов (наиболее часто Фурье), а по образующей – традиционная конечно-элементная аппроксимация. В тоже время расчету плит посвящено сравнительно небольшое количество работ [3 – 7, 9]. При этом рассмотрены плиты и пологие оболочки в классической постановке. Различные варианты численно-аналитических решений, близких по сути к ПМКЭ, предложены в [2]. Работ по

расчету плоских слоистых композитных плит на основе ПМКЭ, подверженных локальным воздействиям, нормальным и тем более касательным, в трехмерной постановке авторами в публикациях не обнаружено.

§1. Постановка задачи. Построение варианта ПМКЭ на основе полиномиальной аппроксимации по толщине конструкции (В1).

Цель работы – разработка *двух вариантов* ПМКЭ, которые позволяют рассматривать НДС слоистых композитных массивов, подверженных локальным воздействиям, нормальным и касательным с зоной нагружения, соизмеримой с толщиной плиты. Необходимость в разработке двух вариантов ПМКЭ связана с тем, что им присущи погрешности аппроксимации и арифметических вычислений. Рассмотрение исследовательских задач двумя методами в задачах локального нагружения, которые приводят к возникновению зон с высоким градиентом изменения НДС, служит дополнительным обоснованием достоверности получаемых результатов расчетов. В этом плане они не конкурируют, а дополняют друг друга. В *первом варианте* ПМКЭ для аппроксимации искомым функций по планарной координате X привлекается конечно-элементная аппроксимация, искомые функции по координате Y представляются в виде рядов Фурье, по толщине (координата Z) привлекаются известные полиномы [8]. Во *втором варианте* для аппроксимации искомым функций в плане по координате X используются полиномы, по координате Y привлекается ряд Фурье, а распределение искомым функций по толщине конструкции определяется на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Привлечение для аппроксимации в плане по координате Y тригонометрических рядов Фурье в обоих вариантах предлагаемых подходов вводит известные ограничения на рассматриваемые граничные условия на соответствующем контуре. По координате X привлекается конечно-элементная аппроксимация, что существенно расширяет круг граничных условий, которые можно рассмотреть (шарнирный, свободный, жестко защемленный край). Возможны рассмотрения жесткого контакта слоев, проскальзывающего контакта слоев с трением и без трения по части поверхности, перпендикулярно координате X . Комбинирование условий на поверхности слоев и на контуре позволяет рассмотрение композитных конструкций со сложным строением по толщине (по нормали к координате X), в частности, ребристых с направлением ребер вдоль оси Y . В силу ограниченного объема статьи в данном сообщении ограничимся тестированием рассмотренных предлагаемых вариантов ПМКЭ при расчете слоистых ортотропных конструкций, подверженных локализованному воздействию (нормальному и касательному) при шарнирном опирании на контуре. Контакт слоев абсолютно жесткий. Рассмотрены варианты конструкции: со свободной нижней поверхностью; с запрещенными перемещениями на нижней поверхности; с бесконечным слоем.

Рассмотрим слоистую конструкцию (рис. 1) с композитными слоями с тремя плоскостями упругой симметрии (ортотропные слои).

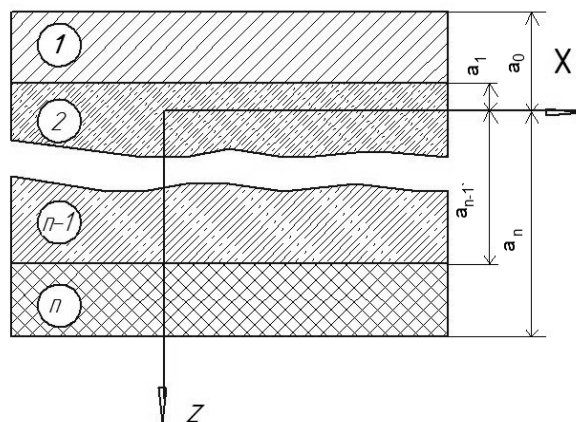


Рис. 1

Физико-механические характеристики ортотропных слоев связаны следующими соотношениями:

$$e_{11}^{(k)} = \frac{\sigma_{11}^{(k)}}{E_1^{(k)}} + \frac{\nu_{21}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)}}{E_2^{(k)}} + \frac{\nu_{31}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}}{E_3^{(k)}}; \quad e_{22}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)}}{E_1^{(k)}} + \frac{\sigma_{22}^{(k)}}{E_2^{(k)}} + \frac{\nu_{32}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}}{E_3^{(k)}};$$

$$e_{33}^{(k)} = \frac{\nu_{13}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)}}{E_1^{(k)}} + \frac{\nu_{23}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)}}{E_2^{(k)}} + \frac{\sigma_{33}^{(k)}}{E_3^{(k)}}; \quad 2e_{23}^{(k)} = \frac{\sigma_{23}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}; \quad 2e_{13}^{(k)} = \frac{\sigma_{13}^{(k)}}{G_{13}^{(k)}}; \quad 2e_{12}^{(k)} = \frac{\sigma_{12}^{(k)}}{G_{12}^{(k)}}.$$

Верхний индекс (k) обозначает номер слоя. Направления 1 – 3 соответствуют направлениям X, Y, Z .

Для построения варианта ПМКЭ на основе полиномиальной аппроксимации по толщине конструкции используем известную аппроксимацию искомых перемещений по толщине конструкции [8]:

$$U_{1l}^{(k)}(x, y, z) = U_{1l}^{(k)}(x, y) f_{1l}^{(k)}(z) + \frac{\partial W_p^{(k)}(x, y)}{\partial x} \varphi_{1p}^{(k)}(z);$$

$$U_{2l}^{(k)}(x, y, z) = U_{2l}^{(k)}(x, y) f_{2l}^{(k)}(z) + \frac{\partial W_p^{(k)}(x, y)}{\partial x} \varphi_{2p}^{(k)}(z);$$

$$U_3^{(k)}(x, y, z) = W_p^{(k)}(x, y) \beta_p^{(k)}(z) \quad (l=1, 2; \quad p=1, \dots, 4). \quad (1.1)$$

Здесь $U_{1l}^{(k)}(x, y)$, $U_{2l}^{(k)}(x, y)$ – тангенциальные перемещения на лицевых поверхностях k -го слоя конструкции; $W_1^{(k)}(x, y)$, $W_2^{(k)}(x, y)$ – нормальные перемещения на лицевых поверхностях k -го слоя конструкции; $W_3^{(k)}(x, y)$, $W_4^{(k)}(x, y)$ – функции сдвига в направлении осей X, Y ; $f_{1l}^{(k)}(z)$, $f_{2l}^{(k)}(z)$, $\beta_1^{(k)}(z)$, $\beta_2^{(k)}(z)$ – заданные полиномы первой степени; $\varphi_{1l}^{(k)}(z)$, $\varphi_{2l}^{(k)}(z)$, $\beta_3^{(k)}(z)$, $\beta_4^{(k)}(z)$ – полиномы второй степени; $\varphi_{i3}^{(k)}(z)$, $\varphi_{i4}^{(k)}(z)$ – полиномы третьей степени.

Компоненты тензора деформаций слоя конструкции с использованием введенной аппроксимации (1.1) определяются на основе следующих соотношений:

$$e_{11}^{(k)} = \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{1p}^{(k)}; \quad e_{22}^{(k)} = \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial y^2} \varphi_{2p}^{(k)};$$

$$e_{33}^{(k)} = W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z}; \quad 2e_{12}^{(k)} = \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial y} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x \partial y} (\varphi_{1p}^{(k)} + \varphi_{2p}^{(k)});$$

$$2e_{23}^{(k)} = U_{2l}^{(k)} \frac{\partial f_{1l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_{2p}^{(k)}}{\partial z} + \beta_p^{(k)} \right). \quad (1.2)$$

Напряжения с учетом выражений для деформаций (1.2) записаны на основе закона Гука:

$$\sigma_{11}^{(k)} = C_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{1p}^{(k)} \right) + C_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial y^2} \varphi_{2p}^{(k)} \right) + C_{13}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z};$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = C_{21}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{1p}^{(k)} \right) + C_{22}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial y^2} \varphi_{2p}^{(k)} \right) + C_{23}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z};$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = C_{31}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{1p}^{(k)} \right) + C_{32}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial y^2} \varphi_{2p}^{(k)} \right) + C_{33}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z};$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^{(k)} &= G_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial y} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x \partial y} (\varphi_{1p}^{(k)} + \varphi_{2p}^{(k)}) \right); \\
\sigma_{13}^{(k)} &= G_{13}^{(k)} \left(U_{1l}^{(k)} \frac{\partial f_{1l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_{1p}^{(k)}}{\partial z} + \beta_p^{(k)} \right) \right); \\
\sigma_{23}^{(k)} &= G_{23}^{(k)} \left(U_{2l}^{(k)} \frac{\partial f_{2l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_{2p}^{(k)}}{\partial z} + \beta_p^{(k)} \right) \right).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Вариация потенциальной энергии деформации с использованием выражений для деформаций (1.2) и напряжений (1.3) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = & \iint_s \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left\{ C_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{1p}^{(k)} \right) + C_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial y^2} \varphi_{2p}^{(k)} \right) + \right. \\
& \left. + C_{13}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z} \right] \delta \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{1p}^{(k)} \right) + \\
& \left[C_{21}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{1p}^{(k)} \right) + C_{22}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial y^2} \varphi_{2p}^{(k)} \right) + \right. \\
& \left. + C_{23}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z} \right] \delta \left(\frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{2p}^{(k)} \right) + \\
& \left[C_{31}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x^2} \varphi_{1p}^{(k)} \right) + C_{32}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial y^2} \varphi_{2p}^{(k)} \right) + \right. \\
& \left. + C_{33}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z} \right] \delta \left(W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z} \right) + \left[G_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial y} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x \partial y} (\varphi_{1p}^{(k)} + \varphi_{2p}^{(k)}) \right) \delta \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial y} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} + \frac{\partial^2 W_p^{(k)}}{\partial x \partial y} (\varphi_{1p}^{(k)} + \varphi_{2p}^{(k)}) \right) + \right. \\
& \left. + \left[G_{13}^{(k)} \left(U_{1l}^{(k)} \frac{\partial f_{1l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_{1p}^{(k)}}{\partial z} + \beta_p^{(k)} \right) \right) \right] \delta \left(U_{1l}^{(k)} \frac{\partial f_{1l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_{1p}^{(k)}}{\partial z} + \beta_p^{(k)} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \left[G_{23}^{(k)} \left(U_{2l}^{(k)} \frac{\partial f_{2l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_{2p}^{(k)}}{\partial z} + \beta_p^{(k)} \right) \right) \right] \delta \left(U_{2l}^{(k)} \frac{\partial f_{2l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_{2p}^{(k)}}{\partial z} + \beta_p^{(k)} \right) \right) \right\} dz dS.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Вариацию работы внешней нагрузки на лицевых поверхностях слоя представим следующим образом:

$$\delta A = \iint_s (q_{1l}^{(k)} \delta U_{1l}^{(k)} + q_{2l}^{(k)} \delta U_{2l}^{(k)} + q_{3l}^{(k)} \delta U_{3l}^{(k)}) ds. \tag{1.5}$$

Искомые функции в плане конструкции по оси X представляются линейными и кубическими полиномами, по оси Y – тригонометрическими функциями.

$$U_{1l}^{(k)}(x, y) = (U_{1l1}^{(k)} f_{u1}^{(k)}(x) + U_{1l2}^{(k)} f_{u2}^{(k)}(x)) \sin \frac{\pi ny}{b};$$

$$U_{2l}^{(k)}(x, y) = (U_{2l1}^{(k)} f_{u1}^{(k)}(x) + U_{2l2}^{(k)} f_{u2}^{(k)}(x)) \cos \frac{\pi ny}{b}; \quad (1.6)$$

$$W_p^{(k)}(x, y) = W_{p1}^{(k)} f_{w1}(x) + \alpha_{p1}^{(k)} f_{w2}(x) + W_{p2}^{(k)} f_{w3}(x) + \alpha_{p2}^{(k)} f_{w4}(x) \sin \frac{\pi ny}{b},$$

где

$$f_{u1}(x) = 1 - x/l; \quad f_{u2}(x) = x/l; \quad f_{w1}(x) = (2x^3 - 2lx^2 + l^3)/l^3;$$

$$f_{w2}(x) = (x^3 - 2lx^2 + l^2x)/l^2; \quad f_{w3}(x) = (-2x^3 + 3lx^2)/l^3; \quad f_{w4}(x) = (x^3 - lx^2)/l^2,$$

l – длина конечного элемента вдоль оси x .

Уравнения равновесия конечного элемента получены на основе следующего вариационного уравнения:

$$\delta \Pi - \delta A = 0. \quad (1.7)$$

С учетом выражений для потенциальной энергии (1.4) и работы внешней нагрузки (1.5), а также введенной аппроксимации (1.6), после соответствующих преобразований уравнения (1.7) получаем алгебраические уравнения равновесия конечного элемента:

$$\int_0^l \left[\left(B11_{\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} + TU1_{\bar{l}}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) + B611_{\bar{l}}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^2 \right) U_{1ls}^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \left(B612_{\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} f_{us}(x) - B12_{\bar{l}}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \right) \left(\frac{\pi ny}{b} \right) U_{2ls}^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \left(\left(BD11_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - BD12_{\bar{l}p}^{(k)} \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^2 + SD1_{\bar{l}p}^{(k)} \right) f_{w\bar{c}}(x) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + (TUW1_{\bar{l}p}^{(k)} + CUW1_{\bar{l}p}^{(k)} + BD611_{\bar{l}p}^{(k)} + BD622_{\bar{l}p}^{(k)}) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} f_{us}(x) \right) \bar{W}_{ps}^{(k)} + q_{1\bar{l}}^{(k)} f_{us}(x) \Big] dx = 0;$$

$$\int_0^l \left[\left(B612_{\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} f_{us}(x) - B12_{\bar{l}}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \right) \left(\frac{\pi ny}{b} \right) U_{1ls}^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \left(B22_{\bar{l}}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^2 + TU2_{\bar{l}}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) + B622_{\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \right) U_{2ls}^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \left(\left(BD22_{\bar{l}p}^{(k)} \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^3 + (TUW2_{\bar{l}p}^{(k)} + CUW2_{\bar{l}p}^{(k)} - SD2_{\bar{l}p}^{(k)}) \left(\frac{\pi ny}{b} \right) \right) f_{w\bar{c}}(x) f_{us}(x) + \right.$$

$$\left. + \left(\left(BD611_{\bar{l}p}^{(k)} + BD622_{\bar{l}p}^{(k)} \right) f_{w\bar{c}}(x) - BD21_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} \right) f_{us}(x) \right) \bar{W}_{ps}^{(k)} + q_{2\bar{l}}^{(k)} f_{us}(x) \Big] dx = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left[\left(BD11_{\bar{lp}}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - BD12_{\bar{lp}}^{(k)} \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^2 + SD1_{\bar{lp}}^{(k)} \right) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} f_{w\bar{s}}(x) + \right. \\
& + (TUW1_{\bar{lp}}^{(k)} + CUW1_{\bar{lp}}^{(k)} + BD611_{\bar{lp}}^{(k)} + BD622_{\bar{lp}}^{(k)}) f_{us}(x) \frac{\partial f_{w\bar{s}}(x)}{\partial x} \left. \right] U_{1ls}^{(k)} + \\
& + \left(\left(BD22_{\bar{lp}}^{(k)} \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^3 + (TUW2_{\bar{lp}}^{(k)} + CUW2_{\bar{lp}}^{(k)} - SD2_{\bar{lp}}^{(k)}) \left(\frac{\pi ny}{b} \right) \right) f_{ws}(x) f_{u\bar{s}}(x) + \right. \\
& + \left. \left((BD611_{\bar{lp}}^{(k)} + BD622_{\bar{lp}}^{(k)}) f_{us}(x) f_{w\bar{s}}(x) - BD21_{\bar{lp}}^{(k)} f_{us}(x) \frac{\partial^2 f_{w\bar{s}}(x)}{\partial x^2} \right) \right) U_{2ls}^{(k)} + \\
& + \left(\left(DD11_{\bar{pp}}^{(k)} \frac{\partial^2 f_{w\bar{s}}(x)}{\partial x^2} + \left(ZD1_{\bar{pp}}^{(k)} - DD12_{\bar{pp}}^{(k)} \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^2 \right) \right) \frac{\partial^2 f_{ws}(x)}{\partial x^2} + \right. \quad (1.8) \\
& + \left. \left(DD22_{\bar{pp}}^{(k)} \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^4 + (TW2_{\bar{pp}}^{(k)} + CC2_{\bar{pp}}^{(k)} + CW2_{\bar{pp}}^{(k)} - ZD2_{\bar{pp}}^{(k)}) \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^2 + ZZ_{\bar{pp}}^{(k)} \right) f_{w\bar{s}}(x) f_{ws}(x) + \right. \\
& + \left. \left((DD611_{\bar{pp}}^{(k)} + DD622_{\bar{pp}}^{(k)} + DD612_{\bar{pp}}^{(k)}) \left(\frac{\pi ny}{b} \right)^2 + \right. \\
& \left. + (TW1_{\bar{pp}}^{(k)} + CC1_{\bar{pp}}^{(k)} + CW1_{\bar{pp}}^{(k)}) \frac{df_{w\bar{s}}(x)}{dx} \frac{df_{ws}(x)}{dx} \right) \bar{W}_{pc}^{(k)} + q_{3\bar{p}}^{(k)} f_{ws}(x) \left. \right] dx = 0.
\end{aligned}$$

Здесь принято: $\bar{W}_{p1}^{(k)} = W_{p1}^{(k)}$; $\bar{W}_{p2}^{(k)} = \alpha_{p1}^{(k)}$; $\bar{W}_{p3}^{(k)} = W_{p2}^{(k)}$; $\bar{W}_{p4}^{(k)} = \alpha_{p2}^{(k)}$.

Построенная система алгебраических уравнений равновесия конечного элемента записана относительно амплитудных значений тангенциальных перемещений вдоль оси X на внешних поверхностях слоя в узлах конечного элемента (в первом узле $-U_{111}^{(k)}, U_{121}^{(k)}$; во втором узле $-U_{112}^{(k)}, U_{122}^{(k)}$); амплитудных значений тангенциальных перемещений вдоль оси Y на внешних поверхностях слоя в узлах конечного элемента (в первом узле $-U_{211}^{(k)}, U_{221}^{(k)}$; во втором узле $-U_{212}^{(k)}, U_{222}^{(k)}$); амплитудных значений нормальных перемещений и углов поворота внешних поверхностей в узлах конечного элемента (в первом узле $-W_{11}^{(k)}, \alpha_{11}^{(k)}, W_{21}^{(k)}, \alpha_{21}^{(k)}$; во втором узле $-W_{12}^{(k)}, \alpha_{12}^{(k)}, W_{22}^{(k)}, \alpha_{22}^{(k)}$); амплитудных значений сдвиговых аналогов вертикальных перемещений (в первом узле $W_{31}^{(k)}, \alpha_{31}^{(k)}$; во втором узле $W_{32}^{(k)}, \alpha_{32}^{(k)}$). В общем случае для одного элемента имеем систему двадцати уравнений с двадцатью неизвестными; в узле на поверхности слоя имеем 8 неизвестных перемещений. Расположение искоемых узловых амплитуд на внешних поверхностях конечного элемента позволяет моделировать конструкцию не только в плане, но и по толщине.

При реализации используем такие приемы.

В матричном виде уравнение для слоя с учетом торцевых граничных условий имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}^{(k)}] & [k_{12}^{(k)}] & [k_{13}^{(k)}] \\ [k_{21}^{(k)}] & [k_{22}^{(k)}] & [k_{23}^{(k)}] \\ [k_{31}^{(k)}] & [k_{32}^{(k)}] & [k_{33}^{(k)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \\ \{v_3^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_1^{(k)}\} \\ \{p_2^{(k)}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (1.9)$$

где $\{v_1^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на верхней поверхности слоя; $\{v_2^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на нижней поверхности слоя; $\{v_3^{(k)}\}$ – амплитудные значения сдвиговых аналогов перемещений слоя; $\{p_1^{(k)}\}$ – амплитудные значения усилий на верхней поверхности слоя; $\{p_2^{(k)}\}$ – амплитудные значения усилий на нижней поверхности слоя.

Амплитудные значения сдвиговых аналогов перемещений слоя являются внутренними, они не совмещаются с другими слоями при расчете слоистой конструкции. От них можно избавиться по процедуре, аналогичной широко известной суперэлементной технологии. Запишем вектор амплитудных значений сдвиговых аналогов перемещений слоя с использованием уравнений (1.9) так:

$$\{v_3^{(k)}\} = -[k_{33}^{(k)}]^{-1} [k_{31}^{(k)}] \{v_1^{(k)}\} - [k_{33}^{(k)}]^{-1} [k_{32}^{(k)}] \{v_2^{(k)}\},$$

далее уравнения (1.9) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{bmatrix} [[k_{11}^{(k)}] - [k_{13}^{(k)}][k_{33}^{(k)}]^{-1}[k_{31}^{(k)}]] & [[k_{12}^{(k)}] - [k_{13}^{(k)}][k_{33}^{(k)}]^{-1}[k_{32}^{(k)}]] \\ [[k_{21}^{(k)}] - [k_{23}^{(k)}][k_{33}^{(k)}]^{-1}[k_{31}^{(k)}]] & [[k_{22}^{(k)}] - [k_{23}^{(k)}][k_{33}^{(k)}]^{-1}[k_{32}^{(k)}]] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_1^{(k)}\} \\ \{p_2^{(k)}\} \end{Bmatrix}. \quad (1.10)$$

Уравнения (1.10) запишем таким образом:

$$\begin{bmatrix} [\bar{k}_{11}^{(k)}] & [\bar{k}_{12}^{(k)}] \\ [\bar{k}_{21}^{(k)}] & [\bar{k}_{22}^{(k)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_1^{(k)}\} \\ \{p_2^{(k)}\} \end{Bmatrix}. \quad (1.11)$$

Вид матриц $[\bar{k}_{11}^{(k)}]$, $[\bar{k}_{12}^{(k)}]$, $[\bar{k}_{21}^{(k)}]$, $[\bar{k}_{22}^{(k)}]$ очевиден.

Далее, соединяем соседние слои по два. Разрешающая система уравнений равновесия для них имеет вид аналогичный (1.9), но теперь $\{v_3^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на поверхности сопряжения двух рассматриваемых слоев. Редуцируем перемещения $\{v_3^{(k)}\}$, аналогично изложенной выше процедуре. Так повторяем до тех пор, пока не придем к одной системе уравнений типа (1.11),

$$\begin{bmatrix} [\tilde{k}_{11}^{(k)}] & [\tilde{k}_{12}^{(k)}] \\ [\tilde{k}_{21}^{(k)}] & [\tilde{k}_{22}^{(k)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_{n+1}^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_1^{(k)}\} \\ \{p_{n+1}^{(k)}\} \end{Bmatrix},$$

где теперь $\{v_1^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на верхней поверхности пакета слоев; $\{v_{n+1}^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на нижней поверхности пакета слоев; $\{p_1^{(k)}\}$ – амплитудные значения усилий на верхней поверхности пакета слоев; $\{p_{n+1}^{(k)}\}$ – амплитудные значения усилий на нижней поверхности пакета слоев.

Такой подход значительно снижает количество операций при решении разрешающей системы уравнений (существенно исключаются операции с нулями). Пре-

имущество его становится особенно очевидным при разбиении слоя на подслои (2, 4, 8, 16, 32, 64 и т.д.), а также, если конструкция состоит из взаимно чередующихся одинаковых слоев с разным направлением ортотропии. Подходов к реализации данного метода может быть множество, вряд ли предлагаемый является самым совершенным, но он легко программируется. Исследовать аналитически устойчивость предлагаемого подхода сложно. Его возможности продемонстрированы ниже на иллюстрационных задачах, где рассмотрено достаточно густое разбиение конструкции на 100 конечных элементов; при разбиении трех слоев на 16 подслоев (49 поверхностей, на которых определяются амплитудные значения перемещений). С учетом граничных условий (слева шарнирное опирание $W = 0, U_2 = 0$, сдвиговой аналог $W_3 = 0$; справа подвижная заделка $W_{,1} = 0, U_1 = 0$, сдвиговой аналог $W_{3,1} = 0$) $(101 \times 8 - 4) \times 49 = 39396$ перемещений и $(101 \times 2 - 2) \times 48 = 4752$ сдвиговых аналогов перемещений, в общем – 44148 неизвестных при 150 членах ряда. Достоверность получаемых результатов подтверждается альтернативным расчетом по методике, излагаемой ниже.

§2 Построение варианта ПМКЭ с определением распределения искомых функций по толщине конструкции на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений (В2).

Введем следующую аппроксимацию искомых функций перемещений и напряжений в плане конечного элемента:

$$\begin{aligned}
 U_1^{(k)}(x, y, z) &= (\varphi_1(x)v_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x)v_{12}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b}; \\
 U_2^{(k)}(x, y, z) &= (\varphi_1(x)v_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x)v_{22}^{(k)}(z)) \cos \frac{\pi ny}{b}; \\
 U_3^{(k)}(x, y, z) &= (\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)w_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b}; \\
 \sigma_{13}^{(k)}(x, y, z) &= (\varphi_1(x)\tau_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\tau_{12}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b}; \\
 \sigma_{23}^{(k)}(x, y, z) &= (\varphi_1(x)\tau_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\tau_{22}^{(k)}(z)) \cos \frac{\pi ny}{b}; \\
 \sigma_{33}^{(k)}(x, y, z) &= (\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\varphi_1(x) = 1 - x/l$; $\varphi_2(x) = x/l$; l – длина конечного элемента; $v_{ij}^{(k)}(z)$, $w_j^{(k)}(z)$, $\tau_{ij}^{(k)}(z)$, $\sigma_j^{(k)}(z)$ – искомые функции распределения перемещений и напряжений в i -м узле.

Используя выражения для перемещений (2.1), определим деформации на основе известных соотношений Коши:

$$\begin{aligned}
 e_{11}^{(k)}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi ny}{b}; \\
 e_{22}^{(k)}(x, y, z) &= -\frac{\pi n}{b} \left(\varphi_1(x)v_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x)v_{22}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi ny}{b}; \\
 e_{33}^{(k)}(x, y, z) &= \left(\varphi_1(x) \frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z} \right) \sin \frac{\pi ny}{b};
 \end{aligned}$$

$$2e_{23}^{(k)}(x, y, z) = \left(\varphi_1(x) \frac{\partial v_{21}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial v_{22}^{(k)}(z)}{\partial z} + \frac{\pi n}{b} \varphi_1(x) w_1^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x) w_2^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b};$$

$$2e_{13}^{(k)}(x, y, z) = \left(\varphi_1(x) \frac{\partial v_{11}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial v_{12}^{(k)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} w_1^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b};$$

$$2e_{12}^{(k)}(x, y, z) = \left(\frac{\pi n}{b} \varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b}.$$

Напряжения и деформации связаны следующими соотношениями:

$$\sigma_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)} e_{11}^{(k)} + B_{12}^{(k)} e_{22}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}; \quad \sigma_{22}^{(k)} = B_{21}^{(k)} e_{11}^{(k)} + B_{22}^{(k)} e_{22}^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)};$$

$$B_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} = B_{13}^{(k)} e_{11}^{(k)} + B_{23}^{(k)} e_{22}^{(k)} + e_{33}^{(k)};$$

$$\sigma_{23}^{(k)} = B_{44}^{(k)} 2e_{23}^{(k)}; \quad \sigma_{13}^{(k)} = B_{55}^{(k)} 2e_{13}^{(k)}; \quad \sigma_{12}^{(k)} = B_{66}^{(k)} 2e_{12}^{(k)}.$$

Разрешающую систему уравнений и соответствующие граничные условия получим на основе вариационного принципа Рейсснера $\delta R^{(k)} - \delta A^{(k)} = 0$, где принято:

$$\begin{aligned} \delta R^{(k)} = & \iint_S \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left\{ \left[B_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} - \right. \right. \\ & \left. \left. - B_{12}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi n y}{b} + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{13}^{(k)} (\varphi_1(x) \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x) \sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi n y}{b} \right] \delta \left(\left(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) + \right. \\ & \left. + \left[B_{21}^{(k)} \left(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} - \right. \right. \\ & \left. \left. - B_{22}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi n y}{b} + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{23}^{(k)} (\varphi_1(x) \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x) \sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi n y}{b} \right] \delta \left(-\frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) + \right. \\ & \left. + \left[B_{66}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{b} \varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(z) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b} \right] \delta \left(\left(\frac{\pi n}{b} \varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(z) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b} \right) + \\ & \left. + \left[(\varphi_1(x) \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x) \sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi n y}{b} \right] \delta \left(\left(\varphi_1(x) \frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z} \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[B_{13}^{(k)} \left(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi ny}{b} - \right. \\
& - B_{23}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b} + \\
& \left. + \left(\varphi_1(x) \frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z} \right) \sin \frac{\pi ny}{b} + \right. \\
& + B_{33}^{(k)} (\varphi_1(x) \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x) \sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b} \left. \right] \delta (\varphi_1(x) \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x) \sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b} + \\
& + \left[(\varphi_1(x) \tau_{21}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \tau_{22}^{(k)}(r)) \cos \frac{\pi ny}{b} \right] \delta \left(\varphi_1(x) \frac{\partial v_{21}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial v_{22}^{(k)}(z)}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \frac{\pi n}{b} \varphi_1(x) w_1^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x) w_2^{(k)}(z) \cos \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& + \left[(\varphi_1(x) \tau_{11}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \tau_{12}^{(k)}(r)) \sin \frac{\pi ny}{b} \right] \delta \left(\varphi_1(x) \frac{\partial v_{11}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial v_{12}^{(k)}(z)}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} w_1^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi ny}{b} \left. \right\} dz dS
\end{aligned}$$

– вариация функционала Рейсснера;

$$\begin{aligned}
\delta A_1^{(k)} = & \iint_S \left[q_{131}^{(k)} \delta \left((\varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(a_{k-1}) + \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(a_{k-1})) \sin \frac{\pi ny}{b} \right) + \right. \\
& + q_{132}^{(k)} \delta \left((\varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(a_k) + \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(a_k)) \sin \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& + q_{231}^{(k)} \delta \left((\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(a_{k-1}) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(a_{k-1})) \cos \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& + q_{232}^{(k)} \delta \left((\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(a_k) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(a_k)) \cos \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& + q_{331}^{(k)} \delta \left((\varphi_1(x) w_1^{(k)}(a_{k-1}) + \varphi_2(x) w_2^{(k)}(a_{k-1})) \sin \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& \left. + q_{332}^{(k)} \delta \left((\varphi_1(x) w_1^{(k)}(a_k) + \varphi_2(x) w_2^{(k)}(a_k)) \sin \frac{\pi ny}{b} \right) \right] dS
\end{aligned}$$

– вариация работы внешних сил на лицевых поверхностях слоя; $q_{13l}^{(k)}$, $q_{23l}^{(k)}$, $(l = 1, 2)$ – нагрузки на лицевых поверхностях слоя.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -k_{01} & \frac{1}{B_{55}^{(k)}} k_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} k_{00} & 0 & \frac{1}{B_{44}^{(k)}} k_{00} & 0 \\ -B_{15}^{(k)} k_{00} & \frac{\pi n}{b} B_{25}^{(k)} k_{00} & 0 & 0 & 0 & B_{33}^{(k)} k_{00} \\ B_{11}^{(k)} k_{11} + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 B_{66}^{(k)} k_{00} & \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} k_{01} - B_{12}^{(k)} k_{10}) & 0 & 0 & 0 & B_{13}^{(k)} k_{10} \\ \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} k_{01} - B_{12}^{(k)} k_{10}) & B_{66}^{(k)} k_{11} + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 B_{22}^{(k)} k_{00} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} B_{23}^{(k)} k_{00} \\ 0 & 0 & 0 & k_{10} & \frac{\pi n}{b} k_{00} & 0 \end{array} \right] -$$

$$- \left[\begin{array}{cccccc} k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_1^{(k)}(z) \\ v_2^{(k)}(z) \\ w^{(k)}(z) \\ \tau_1^{(k)}(z) \\ \tau_2^{(k)}(z) \\ \sigma^{(k)}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

где принято: $k_{00} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$; $k_{10} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$; $k_{11} = \begin{bmatrix} 1/l & -1/l \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix}$;

$$k_{01} = k_{10}^T; \quad v_1^{(k)T} = \{v_{11}^{(k)}(z), v_{12}^{(k)}(z)\}; \quad v_2^{(k)T} = \{v_{21}^{(k)}(z), v_{22}^{(k)}(z)\};$$

$$w^{(k)T} = \{w_1^{(k)}(z), w_2^{(k)}(z)\}; \quad \tau_1^{(k)T} = \{\tau_{11}^{(k)}(z), \tau_{12}^{(k)}(z)\};$$

$$\tau_2^{(k)T} = \{\tau_{21}^{(k)}(z), \tau_{22}^{(k)}(z)\}; \quad \sigma^{(k)T} = \{\sigma_1^{(k)}(z), \sigma_2^{(k)}(z)\}.$$

Далее, с использованием уравнений (2.2), формируем разрешающую систему дифференциальных уравнений для слоя с учетом кинематических граничных условий на контуре конструкции:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -K_{01} & \frac{1}{B_{55}^{(k)}} K_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} K_{00} & 0 & \frac{1}{B_{44}^{(k)}} K_{00} & 0 \\ -B_{15}^{(k)} K_{00} & \frac{\pi n}{b} B_{25}^{(k)} K_{00} & 0 & 0 & 0 & B_{33}^{(k)} K_{00} \\ B_{11}^{(k)} K_{11} + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 B_{66}^{(k)} K_{00} & \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} K_{01} - B_{12}^{(k)} K_{10}) & 0 & 0 & 0 & B_{13}^{(k)} K_{10} \\ \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} K_{01} - B_{12}^{(k)} K_{10}) & B_{66}^{(k)} K_{11} + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 B_{22}^{(k)} K_{00} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} B_{23}^{(k)} K_{00} \\ 0 & 0 & 0 & K_{10} & \frac{\pi n}{b} K_{00} & 0 \end{array} \right] \quad (2.3)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_{1i}^{(k)}(z) \\ v_{2i}^{(k)}(z) \\ w_i^{(k)}(z) \\ \tau_{1i}^{(k)}(z) \\ \tau_{2i}^{(k)}(z) \\ \sigma_i^{(k)}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\{v_{1i}^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, v_{1i}^{(k)}(z), \dots\}; \quad \{v_{2i}^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, v_{2i}^{(k)}(z), \dots\};$$

$$\{w_i^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, w_i^{(k)}(z), \dots\}; \quad \{\tau_{1i}^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, \tau_{1i}^{(k)}(z), \dots\};$$

$$\{\tau_{1i}^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, \tau_{1i}^{(k)}(z), \dots\}; \quad \{\sigma_{2i}^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, \sigma_{2i}^{(k)}(z), \dots\}$$

(i – номер точки, в которой определяются искомые функции).

Вектор искомых функций может быть представлен таким образом:

$$\begin{bmatrix} \{v_{1i}^{(k)}\} \\ \{v_{2i}^{(k)}\} \\ \{w_i^{(k)}\} \\ \{\tau_{1i}^{(k)}\} \\ \{\tau_{2i}^{(k)}\} \\ \{\sigma_i^{(k)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(J) \\ \mu_{i5}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(J) \\ \mu_{i6}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(J) \end{bmatrix} [C^{(k)}],$$

где $[C^{(k)}]^T = [C_1^{(k)} e^{z\beta_1^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{z\beta_j^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{z\beta_j^{(k)}}]$; $\beta_j^{(k)}$ – корни характеристического уравнения разрешающей системы дифференциальных уравнений, которые могут быть комплексными; $\mu_{i1}^{(k)}(j)$, $\mu_{i2}^{(k)}(j)$, $\mu_{i3}^{(k)}(j)$, $\mu_{i4}^{(k)}(j)$, $\mu_{i5}^{(k)}(j)$, $\mu_{i6}^{(k)}(j)$ – её собственные вектора (множество библиотек стандартных программ по определению корней характеристических уравнений и их собственных векторов в сочетании с возможностями современных компьютеров позволяют успешно справляться с такой задачей; их разработка не является предметом данной работы); $C_j^{(k)}$ – постоянные интегрирования, определяемые из условий контакта слоев и условий на лицевых поверхностях в каждом узле сетки разбиения конструкции на конечные элементы; J – общее количество искоемых функций в слое.

§3 Числовые результаты и их анализ.

В качестве исследовательской задачи рассмотрим НДС трехслойной плиты с композитными слоями, со следующими физико-механическими характеристиками: $E_1^{(1)} / E_2^{(1)} = 25/1$; $E_2^{(1)} = E_3^{(1)}$; $G_{12}^{(1)} / E_3^{(1)} = 0,5/1$; $G_{23}^{(1)} / E_3^{(1)} = 0,2/1$; $G_{13}^{(1)} = G_{12}^{(1)}$; $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{13}^{(1)} = \nu_{23}^{(1)} = 0,25$. Второй слой повернут на 90° . Толщина второго слоя равна сумме одинаковых толщин внешних слоев. Плита – квадратная в плане ($a = b = L$ с соотношением $L/h = 10$), нагружена в центре равномерно распределенной по квадрату нормально направленной локальной нагрузкой (рис. 2).

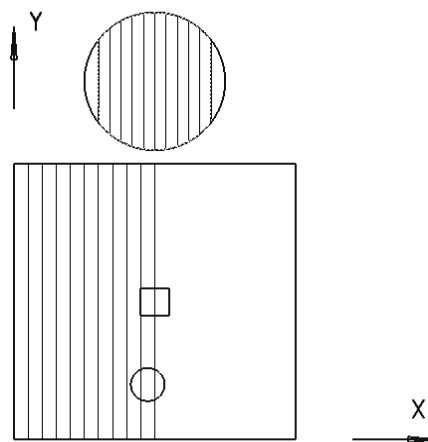


Рис. 2

Сторона квадрата нагружения равна высоте плиты. Опора на контуре шарнирно-подвижная. Расчеты проведены по аналитической модели (А) [8] с удержанием 150-ти членов ряда в каждом направлении, а также по предлагаемым полуаналитическим методикам с полиномиальной аппроксимацией по толщине плиты (В1) и с аналитическим их определением (В2). В полуаналитических методиках по стороне в направлении оси X рассматривалась половина плиты, которая разбивалась на 100 элементов, при этом под нагрузкой было 10 элементов. В направлении оси Y удерживалось 150 членов ряда. Результаты при удержании 100 членов ряда не отличались от приведенных при удержании 150 членов ряда. Наблюдалось незначительное отклонение результатов расчета напряжений непосредственно под локальной нагрузкой.

В табл. 1 представлены результаты расчета, представленные в безразмерном виде ($\bar{U}_3 = U_3(L/2, L/2, z)E_3/(q_3h)$; $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(L/2, L/2, z)/q_3$; $\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}(L/2, L/2, z)/q_3$) для принятого вида нагрузки. Расчетные величины НДС приведены на границах слоев.

Таблица 1

Номер слоя	\bar{U}_3			$\bar{\sigma}_{11}$			$\bar{\sigma}_{22}$		
	В1_4	В2	А	В1_4	В2	А	В1_4	В2	А
1	4,3398	4,3626	4,3637	-7,1456	-7,3334	-7,3405	-0,8910	-0,9036	-0,9042
	4,1575	4,1759	4,1767	1,6001	1,6764	1,6810	-0,3499	-0,3604	-0,3606
2	4,1575	4,1759	4,1767	-0,1661	-0,1669	-0,1670	-4,4661	-4,7064	-4,7081
	3,9323	3,9461	3,9466	-0,0052	-0,0044	-0,0046	4,3057	4,5329	4,5341
3	3,9323	3,9461	3,9466	-0,2247	-0,2299	-0,2328	0,1321	0,1399	0,1398
	3,8906	3,9033	3,9038	5,2464	5,3351	5,3434	0,5446	0,5540	0,5543

Расчет, проведенный по трем рассматриваемым методикам, свидетельствует об их соответствии. Для получения достоверных результатов при расчете по модели В1 для случая локального нагружения слой необходимо дробить на четыре подслоя; расчет в рамках одного подслоя, несмотря на достаточно высокий порядок аппроксимации искомых величин по толщине, может быть лишь грубо ориентировочным (не приводится).

В табл. 2 представлены результаты расчета такой же конструкции, но с запрещенными перемещениями на нижней поверхности (расчетная модель дорожной одежды на мостах).

Таблица 2

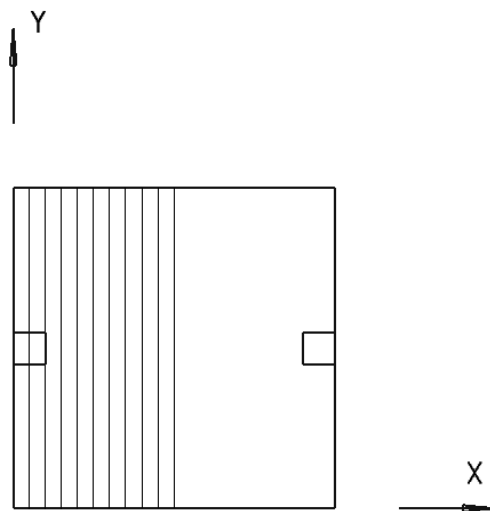
Номер слоя	\bar{U}_3			$\bar{\sigma}_{11}$			$\bar{\sigma}_{22}$		
	B1_4	B2	A	B1_4	B2	A	B1_4	B2	A
1	0,6877	0,6980	0,6988	-2,9738	-3,1161	-3,1195	-0,4835	-0,4907	-0,4912
	0,4762	0,4821	0,4826	1,7391	1,8185	1,8219	-0,2296	0,2351	0,2354
2	0,4762	0,4821	0,4826	-0,1465	-0,1460	-0,1461	-1,0022	-1,1220	-1,1232
	0,1336	0,1335	0,1336	-0,1276	-0,1271	-0,1271	0,5786	0,6817	0,6821
3	0,1336	0,1335	0,1336	0,1301	0,1500	0,1512	-0,1140	-0,1109	-0,1111
	0,0000	0	0	-0,1689	-0,1685	-0,1686	-0,1365	-0,1361	-0,1362

И в этом случае результаты расчета, полученные по рассматриваемым методикам практически совпадают. Точность модели В1 для этого случая несколько ниже, но вполне приемлемая.

В табл. 3 представлены результаты расчета такой же конструкции, но с бесконечным третьим слоем (плита дорожной одежды на упругом основании). Бесконечный слой в модели (В1) моделирован слоем конечной толщины $h^{(3)} = h^{(2)} \cdot 21$, который разделен на 64 подслоя. Толщины слоев $h^{(1)}, h^{(2)}$ такие же, как и в предыдущем случае, делили на четыре подслоя.

Таблица 3

Номер слоя	\bar{U}_3			$\bar{\sigma}_{11}$			$\bar{\sigma}_{22}$		
	B1_4	B2	A	B1_4	B2	A	B1_4	B2	A
1	1,0163	1,0258	1,0266	-3,6731	-3,8230	-3,8276	-0,5681	-0,5762	-0,5767
	0,8114	0,8162	0,8168	1,8159	1,8927	1,8965	-0,2474	-0,2549	-0,2551
2	0,8114	0,8162	0,8168	-0,1432	-0,1434	-0,1435	-1,6235	-1,7876	-1,7889
	0,5077	0,5069	0,5071	-0,1097	-0,1105	-0,1106	1,1074	1,2458	1,2464



Расчеты такой конструкции по моделям В2 и А практически совпадают. Моделирование бесконечного слоя слоем конечной толщины при расчете по модели В1 обеспечивает вполне приемлемую точность для расчета строительных конструкций.

В табл. 4 представлены результаты расчета $(\bar{U}_1 = U_1(0, L/2, z)E_3 / (q_1 h); \bar{U}_3 = U_3(L/2, L/2, z)E_3 / (q_1 h); \bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}(L/2, L/2, z) / q_1)$ плиты со свободной нижней поверхностью, нагруженной локальной касательной нагрузкой (сторона квадрата нагрузки равна высоте плиты) на краях симметрично в направлении оси X (рис. 3).

Рис. 3

Таблица 4

Номер слоя	\bar{U}_1		\bar{U}_3		$\bar{\sigma}_{11}$		$\bar{\sigma}_{22}$	
	B1_4	B2	B1_4	B2	B1_4	B2	B1_4	B2
1	0,6059	0,6086	0,5356	0,5371	-1,8559	-1,8565	-0,0393	-0,0394
	0,2935	0,2955	0,5418	0,5433	-1,5364	-1,5372	-0,0265	-0,0266
2	0,2935	0,2955	0,5418	0,5433	-0,0643	-0,0644	-0,2907	-0,2919
	0,0559	0,0564	0,5458	0,5473	-0,0088	-0,0088	0,4158	0,4216
3	0,0559	0,0564	0,5458	0,5473	-0,3267	-0,3282	0,0137	0,0139
	-0,0138	-0,0140	0,5448	0,5463	-0,0982	-0,0996	0,0374	0,0377

В табл. 5 представлены напряжения $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(20L/2/100, L/2, z)/q_1$ в точке границы нагружения локальной касательной нагрузкой при различном делении слоев на подслои (4, 8, 16).

Таблица 5

Номер слоя	4	8	16	B2
1	-9,9723	-10,8682	-11,5241	-11,4411
	-1,2020	-1,1672	-1,1571	-1,1562
2	-0,0692	-0,0684	-0,0684	-0,0685
	-0,0120	-0,0118	-0,0118	-0,0118
3	-0,2910	-0,2918	-0,2925	-0,2930
	0,3693	0,3796	0,3828	0,3838

Для достижения достаточной точности напряженного состояния в точке выхода из локальной касательной нагрузки ($x = 20L/2/100$; $y = L/2$) необходимо более существенное сгущение сети разбиения слоя на подслои.

В табл. 6 представлены результаты расчета ($\bar{U}_1 = U_1(0, L/2, z)E_3/(q_1h)$; $\bar{U}_3 = U_3(L/2, L/2, z)E_3/(q_1h)$; $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(L/2, L/2, z)/q_1$; $\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}(L/2, L/2, z)/q_1$) такой же конструкции (рис. 3), но с запрещенными перемещениями на нижней поверхности.

Таблица 6

Номер слоя	\bar{U}_1		\bar{U}_3		$\bar{\sigma}_{11}$		$\bar{\sigma}_{22}$	
	B1_4	B2	B1_4	B2	B1_4	B2	B1_4	B2
1	0,5285	0,5306	-0,0024	-0,0024	-1,4455	-1,4451	-0,0023	-0,0022
	0,2670	0,2689	0,0013	0,0013	-1,2823	-1,2821	-0,0100	-0,0099
2	0,2670	0,2689	0,0013	0,0013	-0,0509	-0,0509	0,0658	0,0692
	0,0268	0,0271	0,0021	0,0021	-0,0088	-0,0088	0,0188	0,0191
3	0,0268	0,0271	0,0021	0,0021	-0,1763	-0,1765	-0,0029	-0,0029
	0	0	0	0	-0,0036	-0,0036	-0,0029	-0,0029

В табл. 7 представлены напряжения $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(20L/2/100, L/2, z)/q_1$ в точке границы нагружения локальной касательной нагрузкой при различном делении слоев на подслои (4, 8, 16) с запрещенными перемещениями на нижней поверхности.

Таблица 7

Номер слоя	4	8	16	B2
1	-9,5412	-10,4301	-11,0841	-11,0007
	-1,2101	-1,1761	-1,1663	-1,1654
2	-0,0690	-0,0683	-0,0683	-0,0684
	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177
3	-0,0917	-0,0879	-0,0872	-0,0874
	-0,0180	-0,0185	-0,0186	-0,0186

И в этом случае для достижения приемлемой точности в точке выхода из локальной нагрузки ($x = 20L/2/100$; $y = L/2$) необходимо более существенное деление слоя на подслои.

Заклучение.

Разработано два варианта полуаналитического метода конечных элементов для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых композитных плит под воздействием локальных нагрузок. Нижняя поверхность плиты может быть свободной, жестко закрепленной, опираться на бесконечный слой. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки. Они весьма точны. Недостатки (в варианте с полиномиальной аппроксимацией по толщине – значительное количество жесткостных характеристик и высокий порядок разрешающих уравнений; в варианте с аналитическим определением искомым функций по толщине плиты – необходимость определения корней характеристической системы уравнений и её собственных векторов) в свете современных возможностей вычислительной техники в рассматриваемом классе задач незначительны. Эти подходы дополняют друг друга. Проведенные исследования показывают, что при нагружении нормальной локальной нагрузкой для достижения приемлемой точности при расчете по первому варианту полуаналитического метода конечных элементов достаточно дробить слои конструкции на четыре подслоя, в то же время при нагружении касательной нагрузкой в месте границы касательной нагрузки возникают высокие градиенты напряженного состояния; для его адекватного отражения при расчете по первому варианту полуаналитического метода конечных элементов необходимо слои разбивать на шестнадцать подслоев.

РЕЗЮМЕ. В рамках просторової теорії пружності побудовано два варіанти напіваналітичного методу скінченних елементів. В першому варіанті для апроксимації функцій по планарній координаті X використана поліноміальна скінченно-елементна апроксимація, шукані функції по координаті Y представляються у вигляді ряду Фур'є, по товщині (координата Z) використовуються відомі поліноми. В другому варіанті для апроксимації шуканих функцій в плані по координаті X використовуються лінійні поліноми, по координаті Y використано ряд Фур'є, а розподіл шуканих функцій по товщині конструкції визначається на основі аналітичного розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь. Необхідність побудови двох варіантів напіваналітичного методу скінченних елементів обумовлена тим, що їм властиві похибки апроксимації і арифметичних обчислень. Проаналізовано напружено-деформований стан шаруватої композитної плити при дії нормального і дотичного навантаження, коли розмір сторони квадратного навантаження дорівнює товщині плити. Розглянуто плиту з вільною нижньою поверхнею та жорстко закріпленою нижньою поверхнею.

1. Баженов В.А., Гуляев О.И., Сахаров О.С., Солодей И.И. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл. – Київ: КНУБА, 2012. – 248 с.
2. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
3. Cheung Y.K. The finite strip method in the analysis elastic plates with two opposite simply supported ends // Proc. Inst. Civ. Eng. – 1968. – N 40. – P. 1 – 7.
4. Cheung Y.K. Finite strip method in the analysis elastic slabs // Proc. Am. Soc. Civ. Eng. – 1968. – N 94. – P. 1365 – 1378.
5. Cheung Y.K. Folded plate structures by the finite strip method // Proc. Am. Soc. Civ. Eng. – 1969. – N 95. – P. 2963 – 2979.
6. Cheung Y.K. Analysis of elastic rectangular slabs by finite strip method // J. Eng. Mech. Div. ASCE. Des. – 1968. – P. 17 – 29.
7. Cheung Y.K., Jham L.G., Cheng K.P. Buckling of sandwich plate by finite layer method // Comput. and Struct. – 1982. – 15, N 2. – P. 131 – 134.
8. Marchuk A.V., Piskunov V.G. Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // Mechanics of Composite Materials. – 1999. – 35, N 4. – P. 285 – 292.
9. Marchuk A.V., Piskunov V.G. Calculation of layered structures by semianalytic method of finite elements // Mechanics of Composite Materials. – 1997. – 33, N 6. – P. 553 – 556.
10. Petyt M. Finite strip analysis of flat skinstringer structures // J. Sound and Vibr. – 1977. – 54, N 4. – P. 537 – 547.

Поступила 11.07.2017

Утверждена в печать 30.01.2018