

В.Г.Савченко, М.Е.Бабешко

**ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ
С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

Abstract. A technique of allowance for the damage in deformation processes of inelastic isotropic and elastic orthotropic materials is proposed for the study of thermoelastoplastic stress-strain state of the compound bodies of revolution subjected to the nonaxisymmetrical loading and heating. The numerical results are presented in the form of graphs und their analysis is given.

Key words: thermoelastoplasticity theory, damage, bodies of revolution, isotropic and ortotropic materials, nonaxisymmetrical loading.

Введение.

Многие элементы конструкций имеют вид тел вращения, изготовленных из первоначально изотропных и анизотропных материалов. При работе в условиях переменного нагружения и нагрева в них могут возникать неупругие деформации, существенно влияющие на их прочность. Прочность конструкций зависит от многих факторов, сопровождающих неизотермические процессы нагружения, таких как история деформирования, зависимость свойств материалов от температуры и вида напряженного состояния, а для анизотропных материалов – разномодульности при растяжении, сжатии или кручении, возникновение и развитие деформаций ползучести, повреждение материала в процессе нагружения и др. Поэтому при определении оптимальных режимов эксплуатации и оценке прочности конструкций необходимо уметь определять их напряженно-деформированное состояние (НДС) с учетом факторов, возникающих при реальных условиях их работы [20, 21]. Если разрушение тела, вызванное упругими и пластическими деформациями, происходит мгновенно и зависит только от уровня внешней нагрузки, то обусловленное деформациями ползучести повреждение материала даже при постоянной нагрузке развивается во времени. В связи с этим необходимо разрабатывать методики численного исследования НДС тел вращения на основе уравнений состояния, адекватно описывающих процессы неупругого деформирования их материалов, с использованием различных подходов для оценки прочности рассматриваемых конструкций. В процессе поэтапного определения НДС конструкции определяем ее наиболее напряженный ответственный элемент, прочность которого и определит ресурс конструкции в целом. Одним из способов оценки прочности элемента конструкции является использование известных критериев прочности и вычисленных компонентов НДС. При таком подходе внутреннее повреждение материала в процессе деформирования не учитывается. Другой способ оценки прочности основан на использовании понятия повреждения материала и исследовании его изменения [2, 4, 8 – 11, 14, 17 и др.]. Появление повреждения материала соответствует начальной стадии разрушения, когда трещина зарождается и развивается в элементарном объеме в результате ряда необратимых физико-механических процессов, при-

водящих к образованию микродефектов. Наличие дефектов ослабляет поперечное сечение, уменьшая ту эффективную площадь, по которой распределяются напряжения, и тем самым способствует дальнейшему разрушению материала. В связи с этим разработка методов определения упругопластического НДС и повреждения материала в твердых телах при неизотермических процессах нагружения с использованием уравнений состояния, адекватно описывающих изложенные выше особенности деформирования материалов конструкций, является важной и актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Ниже изложена методика численного исследования НДС элементов конструкций в виде составных тел вращения, изготовленных из неупругих изотропных и упругих ортотропных материалов, с учетом повреждения материалов в процессах неосесимметричного неизотермического нагружения.

1. Основные соотношения и методика исследования пространственного термонапряженного состояния осесимметричных составных элементов конструкций с учетом повреждения материала.

В ортогональной системе координат $q_i(x_1, x_2, x_3)$ рассматривается составное тело вращения, изготовленное из неупруго деформирующихся изотропных и упругих ортотропных материалов, при неизотермическом нагружении объемными $\vec{K}(K_1, K_2, K_3)$ и поверхностными $\vec{t}_n(t_{n1}, t_{n2}, t_{n3})$ силами. В начальный момент времени t_0 тело находится при начальной температуре T_0 . Под составным телом подразумевается дискретно однородное тело вращения, все составные части которого также являются телами вращения с общей осью вращения. Предполагается, что составные части тела, выполненные из разных материалов, скреплены между собой при температуре T_0 без натяга и на их общей границе выполняются условия идеального силового и теплового контактов. В качестве ортотропных материалов рассматриваются цилиндрически ортотропные материалы и ортотропные в декартовой системе координат материалы, когда одна из главных осей анизотропии совпадает с осью вращения рассматриваемых тел. Предполагается, что в изотропных элементах тела возникают упругие и пластические деформации и происходит повреждение материала при ползучести, а ортотропные элементы деформируются упруго с возникновением зон повреждения материала. Изотропные материалы деформируются по траекториям малой кривизны.

Для решения задачи термовязкопластичности процесс нагружения и нагрева тела следует разбить на ряд этапов таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами перехода отдельных элементов тела от активного нагружения к разгрузке и наоборот. Для определения термовязкопластического НДС исследуемого тела вращения необходимо на каждом этапе нагружения решить задачу нестационарной теплопроводности по определению температуры T при заданных условиях теплообмена с окружающей средой и затем, используя полученное распределение температуры, решать задачу по определению перемещений u_i , деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) для фиксированных моментов времени при заданных условиях нагружения и закрепления. Для этого используем соответствующее уравнение теплопроводности и систему статических, геометрических и физических (определяющих) уравнений. При записи определяющих уравнений используем представление тензора деформаций в виде суммы тензоров упругой и пластической деформаций и деформаций ползучести. Коэффициенты этих уравнений определяются в зависимости от используемых уравнений состояния, способа линеаризации и др.

Для конкретизации функциональной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, температурой и временем в изотропных материалах предлагаются подходы, основанные на непосредственном использовании мгновенной тер-

момеханической поверхности и диаграмм ползучести, и диаграмм длительной прочности. Для анизотропных материалов используются диаграммы, заданные в виде экспериментальных данных, полученных при различных фиксированных значениях температуры на образцах, вырезанных в направлении главных осей анизотропии. Решение краевой задачи теплопроводности по определению распределения температуры в теле, которое рассматривается, как и решение задачи по определению НДС строятся численно с использованием соответствующих вариационных уравнений.

В общем случае для ортотропного материала, в котором главные оси анизотропии механических и теплофизических характеристик материала совпадают с направлениями осей ортогональной системы координат $q_i'(x_1, x_2, x_3)$, связь между компонентами деформаций и напряжений можно записать через технические характеристики материала следующим образом [3]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{11}^T \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^* - \varepsilon_{22}^T \\ \dots \\ \varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{11} \\ \dots \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

или в виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{11}^T \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^* - \varepsilon_{22}^T \\ \dots \\ \varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{11} \\ \dots \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где c_{ij} – соответствующие коэффициенты матрицы податливостей в выражении (1).

Здесь E_i – модули упругости в направлении главных осей анизотропии, совпадающих с выбранной системой координат $q_i'(x_1, x_2, x_3)$; G_{ij} – модуль сдвига в соответствующей координатной плоскости выбранной системы; ν_{ij} – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие элемента в направлении X_j при растяжении его в направлении X_i ; ε_{ij}^* – компоненты деформаций, вызванные неупругим деформированием и ползучестью материала, его повреждением и др.; $\varepsilon_{ii}^T = \alpha_{ii}^T(T - T_0)$ – тепловая деформация, α_{ii}^T – коэффициент линейного теплового расширения материала вдоль соответствующего главного направления анизотропии. При этом из условия существования положительно определенной функции потенциальной энергии следует, что $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$ и матрица податливостей в соотношениях (1) является симметричной.

Для изотропного материала, когда свойства материала не зависят от направления, уравнения связи между деформациями и напряжениями имеют вид, аналогичный выражению (2), в котором

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1/E; \quad c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = -\nu/E; \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = 1/2G. \quad (3)$$

Разрешив соотношения (2) относительно σ_{ij} , получим в ортогональной системе координат q_i' зависимости между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и компонентами тензора деформаций ε_{ij} в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{1111} \cdots A'_{1122} & A'_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A'_{2211} & A'_{2222} & A'_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ A'_{3311} & A'_{3322} & A'_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A'_{1212} + A'_{2121} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A'_{1313} + A'_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A'_{2323} + A'_{3232} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{11}^T \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^* - \varepsilon_{22}^T \\ \varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^* - \varepsilon_{33}^T \\ \varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^* \\ \varepsilon_{13} - \varepsilon_{13}^* \\ \varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^* \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Отличные от нуля коэффициенты A'_{ijmn} в (4), как и коэффициенты (3), выражаются через технические характеристики материала в главных осях анизотропии таким образом:

$$\begin{aligned}
A'_{1111} &= \Delta_{11} / \Delta; \quad A'_{2222} = \Delta_{22} / \Delta; \quad A'_{3333} = \Delta_{33} / \Delta; \quad A'_{1122} = A'_{2211} = \Delta_{12} / \Delta; \quad A'_{1133} = A'_{3311} = \Delta_{13} / \Delta; \\
A'_{2121} &= A'_{2121} = G_{12}; \quad A'_{1313} = A'_{3131} = G_{13}; \quad A'_{2323} = A'_{3232} = G_{23},
\end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \left(\frac{1}{E_3} - \frac{\nu_{23}^2}{E_2} \right) / E_2; \quad \Delta_{12} = \left(\nu_{13} \frac{\nu_{23}}{E_2} + \frac{\nu_{12}}{E_3} \right) / E_1; \quad \Delta_{13} = (\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{23}) / E_1 E_2; \\
\Delta_{22} &= \left(\frac{1}{E_3} - \frac{\nu_{13}^2}{E_1} \right) / E_1; \quad \Delta_{23} = \left(\nu_{12} \frac{\nu_{13}}{E_1} + \frac{\nu_{23}}{E_2} \right) / E_1; \quad \Delta_{33} = \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right) / E_1; \\
\Delta &= (\Delta_{11} - \nu_{12} \Delta_{12} - \nu_{13} \Delta_{13}) / E_3;
\end{aligned} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{11}^T = \alpha_{11}^T (T - T_0); \quad \varepsilon_{22}^T = \alpha_{22}^T (T - T_0); \quad \varepsilon_{33}^T = \alpha_{33}^T (T - T_0).$$

Если перейти по известным формулам преобразования от ортогональной системы координат q'_i к системе координат q_i , связь между компонентами напряжений и деформаций для таких материалов можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} [\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^* - \alpha_{mn} (T - T_0) \delta_{mn}] \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам в одночленных выражениях предполагается суммирование в пределах, указанных в круглых скобках.

В случае, когда положение системы координат q_i относительно главных осей анизотропии механических и термических свойств материала q'_i определяется на-

правляющими косинусами l_{ij} , коэффициенты A_{ijmn} и α_{mn} в соотношениях (7) выражаются через их значения A'_{ijmn} и α'_{ij} (5), (6) в главных осях анизотропии следующим образом:

$$A_{ijmn} = A'_{k\rho\alpha\beta} l_{ki} l_{\rho j} l_{km} l_{\beta n} \quad (k, \rho, \alpha, \beta = 1, 2, 3); \quad \alpha_{mn} = \alpha'^T_{ij} l_{im} l_{jn} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (8)$$

В качестве ортотропных материалов рассмотрим материалы, в которых главные оси анизотропии теплофизических и механических характеристик совпадают с осями цилиндрической системы координат или с направлениями осей декартовой системы координат, одна из осей которой совпадает с осью вращения тела. Таким образом, под системой координат $q_i(x_1, x_2, x_3)$ понимается как цилиндрическая система координат z, r, φ , так и декартовая система – z, x, y . При записи уравнений, связывающих компоненты напряжений и деформаций в общем случае предполагаем, что оси q_i ортогональной криволинейной системы координат не совпадают с главными осями q'_i анизотропии теплофизических и механических свойств.

Уравнения термовязкопластического деформирования изотропных материалов записываем вдоль траекторий малой кривизны в предположении соосности девятиаторов напряжений и дифференциалов неупругих составляющих деформаций. В этом случае связь между компонентами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в любом элементе тела из изотропного материала можна записать в виде закона Гука с дополнительными слагаемыми, учитывающими тепловую деформацию, отклонение материала от упругого, а также зависимость упругих характеристик от температуры [6, 20]. Эти соотношения, учитывающие зависимость свойств материала от температуры, предложены и экспериментально обоснованы в работах [5 и др.]. Они совпадают с широко используемыми соотношениями теории пластического течения [12, 13, 15, 16 и др.], ассоциированными с условием Мизеса.

Тогда, в общем случае, соотношения для изотропных и анизотропных материалов, связывающие компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} , записываем в единой форме (для изотропного и анизотропного материалов) в виде обобщенного закона Гука для анизотропного тела:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn} - \sigma_{ij}^* \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (9)$$

при условии

$$A_{ijmn} = A_{jimm} = A_{ijnm} = A_{mnij}. \quad (10)$$

Здесь упругие характеристики материала A_{ijmn} (8) с учетом (10) имеют различный вид в зависимости от материала:

– для изотропного материала

$$A_{ijmn} = G(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \frac{1}{3}(K - 2G)\delta_{ij}\delta_{mn}; \quad (11)$$

– для цилиндрически ортотропного материала [20]

$$A_{zzzz} = \Delta_{11}/\Delta; \quad A_{zzrr} = A_{rrzz} = \Delta_{12}/\Delta; \quad A_{zz\varphi\varphi} = A_{\varphi\varphi zz} = \Delta_{13}/\Delta;$$

$$A_{rrrr} = \Delta_{22}/\Delta; \quad A_{rr\varphi\varphi} = A_{\varphi\varphi rr} = \Delta_{23}/\Delta; \quad A_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = \Delta_{33}/\Delta;$$

$$A_{zrrr} = G_{zr}; \quad A_{z\varphi z\varphi} = G_{z\varphi}; \quad A_{r\varphi r\varphi} = G_{r\varphi};$$

$$\begin{aligned}
A_{zzzr} &= A_{zzz\varphi} = A_{zzr\varphi} = A_{rzzr} = A_{rzz\varphi} = A_{rrr\varphi} = A_{\varphi\varphi zr} = \\
&= A_{\varphi\varphi zr} = A_{\varphi\varphi z\varphi} = A_{\varphi\varphi r\varphi} = A_{zrzz} = A_{zrrr} = A_{zr\varphi\varphi} = \\
&= A_{zr\varphi\varphi} = A_{zrr\varphi} = A_{z\varphi z\varphi} = A_{z\varphi r\varphi} = A_{z\varphi\varphi\varphi} = A_{z\varphi zr} = \\
&= A_{z\varphi r\varphi} = A_{r\varphi zz} = A_{r\varphi rr} = A_{r\varphi\varphi\varphi} = A_{r\varphi zr} = A_{r\varphi z\varphi} = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \left(\frac{1}{E_\varphi} - \frac{v_{r\varphi}^2}{E_r} \right) / E_r; \quad \Delta_{12} = \left(v_{z\varphi} \frac{v_{r\varphi}}{E_r} + \frac{v_{zr}}{E_\varphi} \right) / E_z; \quad \Delta_{13} = (v_{zr} v_{r\varphi} + v_{z\varphi}) / E_z E_r; \\
\Delta_{22} &= \left(\frac{1}{E_\varphi} - \frac{v_{z\varphi}^2}{E_z} \right) / E_z; \quad \Delta_{23} = \left(v_{zr} \frac{v_{z\varphi}}{E_z} + \frac{v_{r\varphi}}{E_r} \right) / E_z; \quad \Delta_{33} = \left(\frac{1}{E_r} - \frac{v_{zr}^2}{E_z} \right) / E_z; \\
\Delta &= (\Delta_{11} - v_{zr} \Delta_{12} - v_{z\varphi} \Delta_{13}) / E_z;
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\varepsilon_{zz}^T = \alpha_{zz} (T - T_0); \quad \varepsilon_{rr}^T = \alpha_{rr} (T - T_0); \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^T = \alpha_{\varphi\varphi} (T - T_0), \quad \varepsilon_{zr}^T = \varepsilon_{z\varphi}^T = \varepsilon_{r\varphi}^T = 0;$$

– для прямолинейно ортотропного материала [19, 20]

$$\begin{aligned}
A_{zzzz} = \Delta_{11}^*; \quad A_{zzr\varphi} = (\Delta_{13}^* - \Delta_{12}^*) \sin 2\varphi / 2; \quad \left. \begin{aligned} A_{zzrr} \\ A_{zz\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} &= [\Delta_{12}^* + \Delta_{13}^* \pm (\Delta_{12}^* - \Delta_{13}^*) \cos 2\varphi] / 2; \\
\left. \begin{aligned} A_{rrrr} \\ A_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} &= [(2\Delta_{22}^* + 3\Delta_{33}^* + 2\Delta_{23}^* + 4G_{xy}) \pm 4(\Delta_{22}^* - \Delta_{33}^* \cos 2\varphi + \\
&+ (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \cos 4\varphi] / 8;
\end{aligned} \tag{14}$$

$$A_{rr\varphi\varphi} = [(\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* + 6\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) - (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \cos 4\varphi] / 8;$$

$$\left. \begin{aligned} A_{rrr\varphi} \\ A_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} = [2(\Delta_{33}^* - \Delta_{22}^*) \sin 2\varphi \pm (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \sin 4\varphi] / 8;$$

$$\left. \begin{aligned} A_{zr zr} \\ A_{z\varphi z\varphi} \end{aligned} \right\} = [(G_{zx} + G_{zy}) \pm (G_{zx} - G_{zy}) \cos 2\varphi] / 2;$$

$$A_{r\varphi r\varphi} = [(\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* + 4G_{xy}) - (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \cos 4\varphi] / 8;$$

$$A_{zzzr} = A_{zzz\varphi} = \dots = A_{zrzz} = A_{zrrr} = A_{zr\varphi\varphi} = A_{zrr\varphi} = \dots = A_{r\varphi z\varphi} = 0,$$

где

$$\Delta_{ij}^* = \Delta_{ij} / \Delta; \quad \Delta_{11} = \left(\frac{1}{E_y} - \frac{v_{xy}^2}{E_x} \right) / E_x; \quad \Delta_{12} = \left(v_{zy}^2 \frac{v_{xy}}{E_x} + \frac{v_{zx}}{E_y} \right) / E_z;$$

$$\Delta_{13} = (v_{zx} v_{xy} + v_{zy}) / (E_z E_x); \quad \Delta_{22} = \left(\frac{1}{E_y} - \frac{v_{zy}^2}{E_z} \right) / E_z;$$

$$\Delta_{23} = \left(v_{zx} \frac{v_{zy}}{E_z} + \frac{v_{xy}}{E_x} \right) / E_z; \quad \Delta_{33} = \left(\frac{1}{E_x} - \frac{v_{zx}^2}{E_z} \right) / E_z; \quad (15)$$

$$\Delta = (\Delta_{11} - v_{zx}\Delta_{12} - v_{zy}\Delta_{13}) / E_z; \quad \varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij} (T - T_0) \quad (i, j = z, r, \varphi);$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{rr} \\ \alpha_{\varphi\varphi} \end{matrix} \right\} = (\alpha_{xx} + \alpha_{yy}) / 2 \pm (\alpha_{xx} - \alpha_{yy}) \cos 2\varphi / 2; \quad \alpha_{r\varphi} = (\alpha_{yy} - \alpha_{xx}) \sin 2\varphi / 2; \quad \alpha_{zr} = \alpha_{z\varphi} = 0.$$

В соотношениях (9) дополнительные слагаемые σ_{ij}^* учитывают тепловую деформацию, отклонение материала от упругого, повреждение материала, зависимость диаграмм деформирования материала от температуры, а также от способа линеаризации определяющих уравнений и др.

В дальнейшем для построения единого алгоритма решения краевой задачи для изотропных и ортотропных материалов связь между компонентами напряжений и деформаций (9) в ортотропном и изотропном материалах запишем в единой форме – в виде закона Гука для изотропного однородного материала с некоторыми дополнительными членами. Для линеаризации определяющих уравнений используются методы последовательных линейных приближений, когда в каждом приближении решение исходной нелинейной задачи сводится к решению линейной задачи теории упругости с дополнительными слагаемыми σ_{ij}^* .

Для ортотропного материала это достигается следующим образом. Представим в (9) коэффициенты A_{ijmn} в виде $A_{ijmn} = A_{ijmn}^0 (1 - \omega_{ijmn})$, где A_{ijmn}^0 – некоторые независимые от окружной координаты осредненные значения соответствующих коэффициентов (12 – 15), а $A_{ijmn}^0 \omega_{ijmn}$ – функции, характеризующие изменение A_{ijmn} в окружном направлении и учитывающие как зависимость их от температуры, так и анизотропию. Тогда связь между напряжениями и деформациями будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{z\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} A_{zzzz}^0 & A_{zzrr}^0 & A_{zz\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{zzrr}^0 & A_{rrrr}^0 & A_{rr\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{zz\varphi\varphi}^0 & A_{r\varphi\varphi}^0 & A_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{zrzr}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{z\varphi z\varphi}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{r\varphi r\varphi}^0 \end{bmatrix} * \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zr} \\ \varepsilon_{z\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma_{zz}^* \\ \sigma_{rr}^* \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* \\ \sigma_{zr}^* \\ \sigma_{z\varphi}^* \\ \sigma_{r\varphi}^* \end{matrix} \right\}, \quad (16)$$

где для цилиндрически ортотропного материала –

$$\sigma_{zz}^* = A_{zzzz}^0 \varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr}^0 \varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi}^0 \varepsilon_{\varphi\varphi}^T + A_{zzzz}^0 \omega_{zzzz} \varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0 \omega_{zzrr} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \omega_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi};$$

.....

$$\sigma_{r\varphi}^* = 2A_{r\varphi r\varphi}^0 \omega_{r\varphi r\varphi} \varepsilon_{r\varphi};$$

$$\varepsilon_{zz}^T = \alpha_{zz}^T (T - T_0); \quad \varepsilon_{rr}^T = \alpha_{rr}^T (T - T_0); \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^T = \alpha_{\varphi\varphi}^T (T - T_0); \quad \varepsilon_{zr}^T = \varepsilon_{z\varphi}^T = \varepsilon_{r\varphi}^T = 0; \quad (18)$$

для прямолинейно ортотропного материала –

$$\sigma_{zz}^* = A_{zzzz}^0 \omega_{zzzz} \varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0 \omega_{zzrr} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \omega_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} -$$

$$-2A_{zzr\varphi}(\varepsilon_{r\varphi} - \varepsilon_{r\varphi}^T) + A_{zzzz}\varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr}\varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi}^T, \quad (19)$$

$$\sigma_{r\varphi}^* = 2A_{r\varphi r\varphi}^0 \omega_{r\varphi r\varphi} \varepsilon_{r\varphi} + 2A_{r\varphi r\varphi} \varepsilon_{r\varphi}^T - A_{zzr\varphi}(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T) - A_{rrr\varphi}(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^T) - A_{\varphi\varphi r\varphi}(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^T); \quad \varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}^T (T - T_0) \quad (i, j = z, r, \varphi), \quad (20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{rr}^T \\ \alpha_{\varphi\varphi}^T \end{array} \right\} = (\alpha_{xx}^T + \alpha_{yy}^T) / 2 \pm (\alpha_{xx}^T - \alpha_{yy}^T) \cos 2\varphi / 2; \quad \alpha_{r\varphi}^T = (\alpha_{yy}^T - \alpha_{xx}^T) \sin 2\varphi / 2; \quad \alpha_{zr}^T = \alpha_{z\varphi}^T = 0.$$

В изотропном материале это достигается при линеаризации методом дополнительных напряжений [6] уравнений состояния (9), описывающих деформирование с учетом истории нагружения элементов тела по траекториям малой кривизны. Для этого, входящие в (11) значения модулей G и K , представляются в таком виде:

$$G = G_0(1 - \omega); \quad K = K_0(1 - \omega_1). \quad (21)$$

В результате связь между компонентами напряжений и деформациями можно записать в виде (16), где G_0 и K_0 – значения модулей сдвига и объемного расширения материала (21) при начальной температуре T_0 , а функции ω , ω_1 определяют их изменение в зависимости от температуры. В этих соотношениях коэффициенты A_{ijmn}^0 и дополнительные напряжения σ_{ij}^* принимают вид

$$A_{ijmn}^0 = G_0 (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \frac{1}{3} (K_0 - 2G_0) \delta_{ij} \delta_{mn}; \quad (22)$$

$$\sigma_{ij}^* = 2G_0 \omega e_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}^n + [K_0 \omega_1 \varepsilon_0 + K(\varepsilon_0 + \varepsilon_T)] \delta_{ij}. \quad (23)$$

Здесь $\omega = 1 - G/G_0$, $\omega_1 = 1 - K/K_0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$ – средняя деформация; $\varepsilon_T = \alpha_T (T - T_0)$ – тепловая деформация; α_T – коэффициент линейного теплового расширения материала; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$ – компоненты девиатора деформации; ε_{ij}^n – накопленные к концу m -го этапа нагружения пластические составляющие компонентов деформации, равны (в силу пластической несжимаемости материала) пластическим составляющим компонентов девиатора деформаций e_{ij}^n .

На каждом этапе нагружения влияние повреждения изотропного материала в результате ползучести на процессы деформирования тела будет моделироваться с помощью параметра повреждения ω^p , который характеризует уменьшение эффективного объема, где действуют соответствующие компоненты напряжений, и использоваться вместо условных напряжений их истинные напряжения

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - \omega^p}, \quad (24)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора условных напряжений, т.е. напряжений, отнесенных к первоначальному не поврежденным площадкам элемента тела.

Введение такого параметра повреждения характеризует изменение на протяжении деформирования начальной структуры материала, зарождение, развитие и слитие микродефектов, которые приводят к уменьшению эффективных площадей сечений,

по которым распределены компоненты напряжений. При этом запись соотношений между компонентами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} (9) при линеаризации последних с помощью метода дополнительных напряжений с учетом (24) удобно представить в виде

$$\sigma_{zz} = (2G_0 + \lambda_0)\varepsilon_{zz} + \lambda_0(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \sigma_{zz}^*, \quad \sigma_{zr} = 2G_0\varepsilon_{zr} - \sigma_{zr}^* \quad (z, r, \varphi), \quad (25)$$

где $\lambda_0 = (K_0 - 2G_0)/3$, а дополнительные члены σ_{ij}^* имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* &= (1 - \omega^p) [(2G\varepsilon_{zz}^n + 2G_0\omega\varepsilon_{zz} + K\varepsilon_r + 3\lambda_0\omega_1\varepsilon_0)] + \\ &+ \omega^p [(2G_0 + \lambda_0)\varepsilon_{zz} + \lambda_0(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi})], \dots\dots; \quad (26) \\ \sigma_{r\varphi}^* &= (1 - \omega^p) [2G_0\omega\varepsilon_{r\varphi} + 2G\varepsilon_{r\varphi}^n] + 2G_0\omega^p\varepsilon_{r\varphi}. \end{aligned}$$

В изотропном материале интенсивности касательных напряжений $S = (s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$, деформаций сдвига $\Gamma = (e_{ij}e_{ij}/2)^{1/2}$, температура T и время t связаны функциональной зависимостью [5, 6]. Для ее конкретизации используется зависимость $S = F(\Gamma, T, t)$, которая определяется с использованием диаграмм растяжения цилиндрических образцов, полученных при различных фиксированных значениях температуры и скоростях нагружения. На основе этих экспериментов строится мгновенная термомеханическая поверхность $S = F^*(\Gamma^*, T)$ и сопряженные к ней диаграммы ползучести $\varepsilon^c = \varepsilon^c(\sigma, T, t)$ при различных фиксированных температурах и уровнях напряжений. В случае отсутствия деформаций ползучести эта функциональная зависимость превращается в функцию – мгновенную термомеханическую поверхность $S = F^*(\Gamma^*, T)$

В процессе построения последовательных приближений при решении краевых задач с использованием зависимостей $S = F^*(\Gamma^*, T)$, $\varepsilon^c = \varepsilon^c(\sigma, T, t)$ вычисляется приращение пластических деформаций ε_{ij}^p и деформаций ползучести ε_{ij}^c , суммированием которых определяются значения неупругих деформаций, $\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^c$. Затем вычисляются дополнительные напряжения σ_{ij}^* , входящие в определяющие уравнения (16).

Вычисление этих величин осуществляется следующим образом. В конце m -го этапа нагружения нелинейные ε_{ij}^n (сума пластических ε_{ij}^p деформаций и деформаций ползучести ε_{ij}^c) составляющие компонентов деформации определяются соотношениями

$$\left(\varepsilon_{ij}^n \right)_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k \varepsilon_{ij}^n = \sum_{k=1}^m \left\langle \frac{S_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^n; \quad \Delta_k \Gamma^n = \Delta_k \Gamma^p + \Delta_k \Gamma^c. \quad (27)$$

При построении последовательных приближений в задачах термовязкопластичности, описывающей процессы деформирования по траекториям малой кривизны, предлагается подход, отличный от традиционного [5, 6]. Отличие в подходах состоит в методике определения координат точки на термомеханической поверхности $S = F^*(\Gamma^*, T)$. В традиционном способе деформирование образца при одноосном нагружении и деформирование элемента при сложном напряженном состоянии считается идентичным и сравнивается по величине накопленной интенсивности мгновенных пластических деформаций Γ^* . Ниже предложено в качестве параметра подобия

использовать потенциальную энергию деформирования $U = S \cdot \Gamma^* / 2$, затраченную на достижение полученного в рассматриваемом элементе тела напряженно-деформированного состояния.

В этом случае приращение необратимой деформации $\Delta_k \Gamma^p$ (27) вычисляется следующим образом (рис. 1). После решения задачи в k -ом приближении по известному напряженному состоянию определяется S_ϕ и значение накопленной интенсивности деформаций сдвига Γ^* , а по соответствующей мгновенной диаграмме при заданной температуре элемента тела определяется пара значений

$S_D^k, \Gamma_k^* = (\Gamma_D^*)_k$, для которых в каждом приближении выполнялось условие

$S_\phi \cdot (\Gamma_\phi^* - \Gamma_{m-1}^p) = S_D \cdot (\Gamma_D^* - \Gamma_{m-1}^p)$. Это условие определяется равенством площадей

треугольников ABC и ADE. Тогда приращение $\Delta_m \Gamma^p$ для организации следующего приближения будет определяться соотношением $\Delta_m \Gamma^p = \Gamma_D^* - \Gamma_{m-1}^p - (S_D / 2G)$. Использование такого подхода при решении конкретных задач показало существенное сокращение необходимого количества приближений: почти в два раза при исследовании изотермического осесимметричного процесса нагружения оболочек вращения [7] и более, чем на 25% – при решении неосесимметричной пространственной задачи термопластичности для трехслойного тела вращения в процессе его нагрева [18].

Скалярный параметр повреждения ω^p определяется из кинематического уравнения, где скорость изменения повреждения связывается с некоторым эквивалентным напряжением, с использованием диаграмм длительной прочности, которые также получаем в экспериментах на одноосное растяжение. Эквивалентное напряжение вычисляется с использованием одного из критериев прочности. При этом предполагается, что параметр повреждения является функционалом процесса нагружения. Методика его определения подробно описана в работах [4, 9 и др.]. При другом более упрощенном подходе за параметр повреждения предлагается принимать отношение текущего значения деформации ползучести к ее предельному значению. Оценку начала разрушения тела в данной точке элемента можно осуществлять как с использованием значения параметра повреждения, так и путем сравнения значений эквивалентных напряжений со значениями пределов прочности.

Методика учета в расчетах необратимых деформаций подробно изложена в работах [6, 20 и др.]. Для ортотропных материалов ограничимся случаем, когда необратимые деформации (деформации пластичности и ползучести) не возникают.

На каждом этапе нагружения учет влияния повреждения на процессы деформирования тела будет осуществляться путем введения шести параметров повреждения, характеризующих уменьшение эффективных площадей сечений, на которых действуют соответствующие компоненты напряжений, и использования вместо условных напряжений их истинные значения

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - \omega_{ij}^p}, \quad (28)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора условных напряжений, т.е. напряжений, отнесенных к первоначальному, неповрежденным площадкам элемента тела из цилиндрически орто-

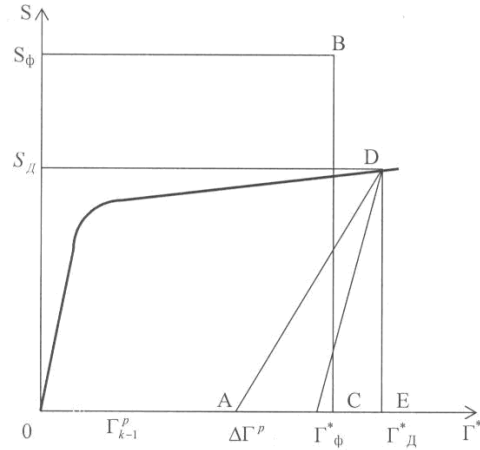


Рис. 1

тропного материала; ω_{ij}^p – параметры, характеризующие повреждения соответствующих площадок тела. Такое введение параметров повреждения характеризует изменение в процессе деформирования первоначальной структуры материала, зарождение, развитие и слияние пор, образование микродефектов, что приводит к уменьшению эффективной площади сечений, по которым распределены компоненты напряжений. С помощью этих параметров повреждения (28) можно объяснить нелинейность диаграмм растяжения, кручения или сдвига.

Для таких материалов при учете повреждения связь между напряжениями и деформациями можно записать в виде (16), в которых дополнительные члены σ_{ij}^* (17) – (20) для цилиндрически ортотропного материала имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* &= A_{zzzz}\varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr}\varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi}^T + A_{zzzz}^0\omega_{zzzz}\varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0\omega_{zzrr}\varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0\omega_{zz\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \\ &+ \omega_{zz}^p [A_{zzzz}(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T) + A_{zzrr}(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^T) + A_{zz\varphi\varphi}(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^T)]; \quad (29) \\ \sigma_{r\varphi}^* &= (A_{r\varphi r\varphi}^0\omega_{r\varphi r\varphi} + A_{r\varphi r\varphi}^p)\varepsilon_{r\varphi}, \end{aligned}$$

а для прямолинейно ортотропного материала –

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* &= (1 - \omega_{zz}^p) [A_{zzzz}^0\omega_{zzzz}\varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0\omega_{zzrr}\varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0\omega_{zz\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \\ &- 2A_{zzr\varphi}(\varepsilon_{r\varphi} - \varepsilon_{r\varphi}^T) + A_{zzzz}\varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr}\varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi}^T] + \omega_{zz}^p (A_{zzzz}^0\varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0\varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0\varepsilon_{\varphi\varphi}); \quad (30) \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_{r\varphi}^* &= (1 - \omega_{r\varphi}^p) [A_{r\varphi r\varphi}^0\omega_{r\varphi r\varphi}\varepsilon_{r\varphi} + A_{r\varphi r\varphi}\varepsilon_{r\varphi}^T - A_{zzr\varphi}(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T) - \\ &- A_{rrr\varphi}(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^T) - A_{\varphi\varphi r\varphi}(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^T)] - A_{r\varphi}^0\omega_{r\varphi}^p\varepsilon_{r\varphi}. \end{aligned}$$

Как соотношения (25) с учетом (26) для изотропного материала, так и соотношения (16) с учетом (29) или (30) для ортотропного материала являются нелинейными. Эта нелинейность обусловлена тем, что компоненты неупругой деформации ε_{ij}^n и параметры повреждения ω^p, ω_{ij}^p , от которых зависят напряжения, в свою очередь зависят от напряженного состояния элементов тела. Линеаризация этих соотношений будет осуществляться с помощью метода последовательных приближений, вычисляя величину неупругой деформации ε_{ij}^n (27) и параметры повреждения ω^p, ω_{ij}^p (24), (28) из предыдущего приближения. При этом для изотропного материала будет использована мгновенная термомеханическая поверхность $S = F^*(\Gamma^*, T)$, полученная при различных фиксированных температурах, а для ортотропного материала – шесть мгновенных термомеханических поверхностей $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{ij}^*, T)$, полученных из опытов на растяжение – сжатие или кручение – сдвиг соответствующих образцов. В качестве параметра, ставящего в соответствие однородное напряженное состояние образца напряженно-деформированному состоянию рассматриваемого элемента конструкции, используется величина $U = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) / 2$ для каждой полученной в расчете компоненты напряжения. В результате методика вычисления параметров повреждения в ортотропном материале состоит в следующем.

В каждом приближении сначала определяются упругие механические характеристики ортотропного материала $E, 2G, \nu_{ij}$, соответствующие температуре рассматрива-

емого этапа. Затем определяются коэффициенты A_{ijkl} и, следовательно, функции $A_{ijkl}^0 \omega_{ijkl}$. В первом приближении первого этапа нагружения и нагрева эти параметры принимаются равными нулю, а на последующих этапах принимаются равными их значениям в последнем приближении предыдущего этапа. В каждом приближении параметры повреждения принимаем из предыдущего приближения, но при этом они не могут быть меньше значений в последнем приближении предыдущего этапа, т.е. предполагаем, что повреждения в материале не «залечиваются». В результате решения упругой краевой задачи с дополнительными напряжениями в первом приближении k -го этапа нагружения получаем распределение напряжений σ_{ij} и ε_{ij} в каждом элементе тела, а также можем вычислить величину деформаций $\varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij} / E_{ij} (1 - \omega_{ij}^{p(k-1)})$, которая соответствует напряжениям σ_{ij} при одноосном нагружении. Здесь $E_{ij} = E_i$ при $i = j$ и $E_{ij} = 2G_{ij}$ при $i \neq j$, а $\omega_{ij}^{p(k-1)}$ – значения параметров повреждения на предыдущем этапе нагружения или в конце предыдущего приближения. Затем по диаграммам $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{ij})$ для температуры T_k m -го этапа нагружения элемента тела, построенных путем линейной интерполяции по температуре мгновенных термомеханических поверхностей $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{ij}, T)$, определим такие пары значений $\sigma_{ij}^D, \varepsilon_{ij}^D$, чтобы для каждой диаграммы $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ выполнялось условие $(\sigma_{ij}^D \cdot \varepsilon_{ij}^D) = (\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^*)$. По полученным парам значений $\sigma_{ij}^D, \varepsilon_{ij}^D$ параметры повреждения ω_{ij}^p определяем по формулам: $(\omega_{ij}^p)_k = 1 - (\sigma_{ij}^D / E_{ij} \varepsilon_{ij}^D)$. Зная значения параметров повреждения, снова решаем краевую задачу по определению компонентов напряжений и деформаций и вычисляем новые значения параметров ω_{ij}^p . Процесс последовательных приближений продолжаем до тех пор, пока для каждого элемента тела потенциальная энергия деформирования $U = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) / 2$ будет мало отличаться от приближения к приближению.

Исследование температурного и НДС рассматриваемого составного тела вращения осуществляется на основе вариационного уравнения теплопроводности –

$$\int_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \delta T - q_z \delta \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) - q_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) - q_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right] dV + \int_\Sigma \alpha (T - \theta) \delta T d\Sigma = 0 \quad (31)$$

и вариационного уравнения Лагранжа –

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - K_i \delta u_i) dV - \int_{\Sigma_i} t_{ni} \delta u_i d\Sigma = 0 \quad (i, j = z, r, \varphi). \quad (32)$$

Здесь V – объем рассматриваемого тела вращения, ограниченного поверхностью Σ ; Σ_i – часть поверхности Σ , на которой заданы компоненты поверхностной нагрузки \bar{t}_n ; c, ρ – коэффициент удельной массовой теплоемкости и плотность материала тела; α – коэффициент теплоотдачи при конвективном теплообмене тела со средой температуры θ ; t – текущее время нагрева и нагружения тела; q_z, q_r, q_φ – приведенные тепловые потоки в соответствующих направлениях:

$$q_z = - \left(\lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{z\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right); \quad (33)$$

$$q_r = - \left(\lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{r\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right); \quad q_\varphi = - \left(\lambda_{z\varphi} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{r\varphi} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right),$$

λ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности: для изотропного материала $\lambda_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij}$, а в случае прямолинейно ортотропного материала их значения определяются через главные значения $\lambda_{zz}, \lambda_{xx}, \lambda_{yy}$ тензора теплопроводности по формулам преобразования при переходе от системы координат z, x, y к системе z, r, φ .

Решение краевой задачи термопластичности при дискретизация вариационных уравнений (31), (32) непосредственно с использованием трехмерных конечных элементов является достаточно длительной процедурой, что особенно проявляется при исследовании протяженных по времени процессов нагружения. Учитывая форму рассматриваемых тел, существенно повысить эффективность метода конечных элементов при решении трехмерных задач для тел вращения позволяет полуаналитический метод конечных элементов [6, 20 и др.], сводящий исходную трехмерную задачу к ряду двумерных в меридиональном сечении тела. Для этого будем искать решение в виде рядов

$$T(z, r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{T}_m(z, r, t) \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\bar{T}}_m(z, r, t) \sin m\varphi ; \quad (34)$$

$$u_z(z, r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_z^{-(m)}(z, r, t) \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} u_z^{=(m)}(z, r, t) \sin m\varphi (z, r) ;$$

$$u_\varphi(z, r, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_\varphi^{-(m)}(z, r, t) \sin m\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} u_\varphi^{=(m)}(z, r, t) \cos m\varphi , \quad (35)$$

коэффициенты которых определяются на основе соответствующих вариационных уравнений с привлечением конечных элементов в меридиональном сечении тела.

При таком подходе трехмерная задача для тел вращения может быть сведена к решению ряда двумерных вариационных задач относительно неизвестных значений коэффициентов в рядах (34), (35).

Для этого в случае решения задачи теплопроводности необходимо представить входящие в вариационное уравнение (31) коэффициенты теплопроводности λ_{ij} в виде $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^0 (1 - \omega_{ij}^T)$ и предположить, что в некоторый фиксированный момент времени коэффициент теплоотдачи α , температура окружающей среды θ , приведенные тепловые потоки q_z, q_r, q_φ (33) в соответствующих направлениях, а также произведение $c\rho$ являются известными функциями координат и не варьируются. Используя в качестве конечных элементов в меридиональном сечении тела треугольные конечные элементы с линейным законом изменения коэффициентов $\bar{T}_m, \bar{\bar{T}}_m$ в них, для определения коэффициентов \bar{T}_m в вершинах (i, j, k) элементов, в которых сторона ij совпадает с поверхностью тела, получим (в случае явной разностной схемы решения задачи теплопроводности) рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \bar{T}_{mi}(t + \Delta t) = & \bar{T}_{mi}(t) + \frac{\Delta t}{\sum_{q=1}^M \langle c\rho \rangle_q H_i^{(q)}} \sum_{q=1}^M \left[A_{ij} \bar{\theta}_{mi}(t + \Delta t) + B_{ij} \bar{\theta}_{mj}(t + \Delta t) - \right. \\ & -(D_{ii} + m^2 N_{ii} + A_{ij}) \bar{T}_{mi}(t) - (D_{ij} + m^2 N_{ij} + B_{ij}) \bar{T}_{mj}(t) - (D_{ik} + m^2 N_{ik}) \bar{T}_{mk}(t) + \\ & \left. + L_i (\bar{q}_z^{*(m)}(t) - \bar{q}_{z\varphi}^{*(m)}(t))_i + P_i (\bar{q}_r^{*(m)}(t) - \bar{q}_{r\varphi}^{*(m)}(t))_i - m R_i \bar{q}_\varphi^{*(m)}(t) \right]_q \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (36)$$

позволяющие вычислить соответствующие значения коэффициентов \bar{T}_m в момент времени $t + \Delta t$ через их значения в момент t , а в случае решения задачи по неявной разностной схеме – систему уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^M \left[(D_{ii} + m^2 N_{ii} + \frac{1}{\Delta t} \langle c\rho \rangle H_i + A_{ij}) \bar{T}_{mi}(t + \Delta t) + (D_{ij} + m^2 N_{ij} + B_{ij}) \bar{T}_{mj}(t + \Delta t) + \right. \\ & \left. + (D_{ik} + m^2 N_{ik}) \bar{T}_{mk}(t + \Delta t) \right] = \sum_{q=1}^M \left[\frac{1}{\Delta t} \langle c\rho \rangle H_i \bar{T}_{mi}(t) + A_{ij} \bar{\theta}_{mi}(t + \Delta t) + B_{ij} \bar{\theta}_{mj}(t + \Delta t) + \right. \\ & \left. + L_i (\bar{q}_z^{*(m)}(t) - \bar{q}_{z\varphi}^{*(m)}(t)) + P_i (\bar{q}_r^{*(m)}(t) - \bar{q}_{r\varphi}^{*(m)}(t)) - m R_i \bar{q}_\varphi^{*(m)}(t) \right] (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь m – номер гармоники; N – количество узловых точек; M – количество треугольных элементов в меридиональном сечении тела; q – номер треугольного элемента; $\bar{\theta}_{mi}, \bar{\theta}_{mj}, \bar{q}_i^{*(m)}, \bar{q}_{ij}^{*(m)}$ – значения коэффициентов разложения температуры окружающей среды и приведенных тепловых потоков в аналогичные (34) тригонометрические ряды, соответствующие точке рассматриваемого треугольника;

$$\begin{aligned} H_i &= b_{1i} \int_{\Delta} r dz dr + b_{2i} \int_{\Delta} z r dz dr + b_{3i} \int_{\Delta} r^2 dz dr; \quad D_{ij} = \lambda_{zz}^0 b_{2i} b_{2j} \int_{\Delta} r dz dr + \lambda_{rr}^0 b_{3i} b_{3j} \int_{\Delta} r dz dr; \\ N_{ij} &= \lambda_{\varphi\varphi}^0 \left[b_{1i} (b_{1j} \int_{\Delta} \frac{1}{r} dz dr + b_{2j} \int_{\Delta} \frac{z}{r} dz dr + b_{3j} \int_{\Delta} dz dr) + \right. \\ & \left. + b_{2i} (b_{1j} \int_{\Delta} \frac{z}{r} dz dr + b_{2j} \int_{\Delta} \frac{z^2}{r} dz dr + b_{3j} \int_{\Delta} z dz dr) + b_{3i} (b_{1j} \int_{\Delta} dz dr + b_{2j} \int_{\Delta} z dz dr + b_{3j} \int_{\Delta} r dz dr) \right]; \\ A_{ij} &= \text{sign} F_{\Delta} \frac{l_{ij}}{10} \left[\alpha_i \left(2r_i + \frac{r_j}{2} \right) + \alpha_j \left(\frac{r_i}{2} + \frac{r_j}{3} \right) \right]; \\ B_{ij} &= \text{sign} F_{\Delta} \frac{l_{ij}}{10} \left[\alpha_i \left(\frac{r_i}{2} + \frac{r_j}{3} \right) + \alpha_j \left(\frac{r_i}{3} + \frac{r_j}{2} \right) \right]; \\ L_i &= b_{2i} \int_{\Delta} r dz dr; \quad P_i = b_{3i} \int_{\Delta} r dz dr; \quad R_i = b_{1i} \int_{\Delta} dz dr + b_{2i} \int_{\Delta} z dz dr + b_{3i} \int_{\Delta} r dz dr; \\ b_{1j} &= \frac{z_k r_i - z_i r_k}{2F_{\Delta}}; \quad b_{2j} = \frac{r_k - r_i}{2F_{\Delta}}; \quad b_{3j} = \frac{z_i - z_k}{2F_{\Delta}}; \\ F_{\Delta} &= \frac{1}{2} [z_i (r_j - r_k) + z_j (r_k - r_i) + z_k (r_i - r_j)]; \quad l_{ij} = \sqrt{(z_i - z_j)^2 + (r_i - r_j)^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Эти коэффициенты (38), (39) вычисляются через координаты вершин треугольных элементов в меридиональной плоскости.

При определении неосесимметричного напряженного состояния, как и при решении задачи теплопроводности, в качестве конечного элемента в плоскости меридионального сечения тела выберем треугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией коэффициентов рядов (34), (35). Используя подход, подробно описанный в [6, 20], для определения коэффициентов $\bar{u}_{\alpha}^{(m)}, \bar{\bar{u}}_{\alpha}^{(m)}$ ($\alpha = z, r, \varphi$) в вершинах (i, j, k) треугольных элементов q меридионального сечения тела в тригонометрических ря-

дах (35) в каждом приближении получим систему $3N$ линейных алгебраических уравнений для каждой гармоники в отдельности:

$$\sum_{q=1}^M (B_{zp}^{zi(q)} \bar{u}_{zp} + B_{rp}^{zi(q)} \bar{u}_{rp} + B_{\varphi p}^{zi(q)} \bar{u}_{\varphi p}) = D_{zi}; \quad \sum_{q=1}^M (B_{zp}^{ri(q)} \bar{u}_{zp} + B_{rp}^{ri(q)} \bar{u}_{rp} + B_{\varphi p}^{ri(q)} \bar{u}_{\varphi p}) = D_{ri}; \quad (40)$$

$$\sum_{q=1}^M (B_{zp}^{\phi i(q)} \bar{u}_{zp} + B_{rp}^{\phi i(q)} \bar{u}_{rp} + B_{\varphi p}^{\phi i(q)} \bar{u}_{\varphi p}) = D_{\phi i} \quad (p = i, j, k), < i = 1, 2, \dots, N >.$$

Таких систем будет столько, сколько членов сохраняется в решении. Элементы матрицы систем (40) вычисляются через значения коэффициентов физических уравнений и координаты вершин элементов в меридиональной плоскости, а правая часть системы – через амплитудные значения дополнительных напряжений σ_{ij}^* , а также объемных и поверхностных нагрузок в соответствующих точках меридионального сечения.

Для отдельного треугольного элемента с вершинами i, j, k они будут иметь следующий вид:

$$B_{zj}^{zi} = \int_{F_{\Delta}} (A_{11}^0 b_{2i} b_{2j} + A_{44}^0 b_{3i} b_{3j} + m^2 A_{55}^0 \Delta_{1i} \Delta_{1j}) rdzdr;$$

$$B_{ij}^{zi} = \int_{F_{\Delta}} (A_{44}^0 b_{3i} b_{2j} + A_{12}^0 b_{2i} b_{3j} + A_{13}^0 b_{2i} \Delta_{1j}) rdzdr;$$

$$B_{\varphi j}^{zi} = m \int_{F_{\Delta}} (-A_{55}^0 b_{2j} \Delta_{1i} + A_{13}^0 b_{2i} \Delta_{1j}) rdzdr;$$

$$B_{zj}^{ri} = \int_{F_{\Delta}} (A_{44}^0 b_{2i} b_{3j} + A_{12}^0 b_{3i} b_{2j} + A_{13}^0 b_{2j} \Delta_{1i}) rdzdr;$$

$$B_{rj}^{ri} = \int_{F_{\Delta}} \left\{ (A_{22}^0 b_{3i} + A_{23}^0 \Delta_{1i}) b_{3j} + A_{44}^0 b_{2i} b_{2j} + [A_{23}^0 b_{3i} + (A_{33}^0 + m^2 A_{66}^0) \Delta_{1j}] \Delta_{1j} \right\} rdzdr, \quad (41)$$

$$B_{\varphi j}^{ri} = m \int_{F_{\Delta}} [(A_{33}^0 \Delta_{1i} + A_{23}^0 b_{3i}) \Delta_{1j} + A_{66}^0 \Delta_{1i} \Delta_{2j}] rdzdr;$$

$$B_{zj}^{\phi i} = m \int_{F_{\Delta}} (-A_{55}^0 b_{2i} \Delta_{1j} + A_{13}^0 b_{2j} \Delta_{1i}) rdzdr; \quad B_{rj}^{\phi i} = m \int_{F_{\Delta}} [(A_{33}^0 \Delta_{1i} + A_{66}^0 \Delta_{2i}) \Delta_{1j} + A_{23}^0 b_{3j} \Delta_{1i}] rdzdr;$$

$$B_{\varphi j}^{\phi i} = \int_{F_{\Delta}} (A_{55}^0 b_{2i} b_{2j} + A_{66}^0 \Delta_{2i} \Delta_{2j} + m^2 A_{33}^0 \Delta_{1i} \Delta_{1j}) rdzdr;$$

$$D_{zi} = \sum_{q=1}^M \int_{F_{\Delta}} [\sigma_{zz}^* b_{2i} + \sigma_{zr}^* b_{3i} - (m \sigma_{z\varphi}^* - K_z \cdot z) \Delta_{1i}] rdzdr +$$

$$+ \sum_{l=1}^L \frac{l_{ij}}{12} \text{sign} F_{\Delta} [t_{nz_i} (3r_i + r_j) + t_{nz_j} (r_i + r_j)];$$

$$D_{ri} = \sum_{q=1}^M \int_{F_{\Delta}} [\sigma_{rr}^* b_{3i} + \sigma_{zr}^* b_{2i} + (\sigma_{\varphi\varphi}^* - m \sigma_{r\varphi}^* + K_r \cdot r) \Delta_{1i}] rdzdr + \quad (42)$$

$$+ \sum_{l=1}^L \frac{l_{ij}}{12} \text{sign} F_{\Delta} [t_{nr_i} (3r_i + r_j) + t_{nr_j} (r_i + r_j)];$$

$$D_{\varphi i} = \sum_{q=1}^M \int_{F_{\Delta}} \left[\sigma_{z\varphi}^* b_{ri} - \sigma_{r\varphi}^* \Delta_{ri} + (m\sigma_{\varphi}^* + K_{\varphi} \cdot r) \Delta_{li} \right] rdzdr +$$

$$+ \sum_{i=1}^L \frac{l_{ij}}{12} \text{sign} F_{\Delta} \left[t_{n\varphi_i} (3r_i + r_j) + t_{n\varphi_j} (r_i + r_j) \right]; \quad (43)$$

$$\Delta_{1j} = b_{3j} + b_{2j} \frac{z}{r} + b_{1j} \frac{1}{r}; \quad \Delta_{2j} = b_{2j} \frac{z}{r} + b_{1j} \frac{1}{r}.$$

Первое суммирование в (42) ведется по всем конечным элементам, а второе – по всем, совпадающим с контуром меридионального сечения тела, сторонам соответствующих элементов, одна из вершин которых имеет номер i . Недостающие коэффициенты в (42) могут быть получены из (43) заменой индекса j , соответственно, на i или k .

Коэффициенты, \bar{T}_m , $\bar{u}_i^{(m)}$ определяются аналогичными (36), (37), (41), (42) выражениями, в которых m необходимо заменить на $-m$, а все величины с чертой – на соответствующие им значения с двумя и наоборот.

Зная \bar{T}_m , \bar{T}_m и $\bar{u}_i^{(m)}$, $\bar{u}_i^{(m)}$ во всех точках конечно-элементной разбивки меридионального сечения тела, значения температуры и компоненты перемещений в теле определяются путем вычисления тригонометрических рядов (34), (35). Затем вычисляются компоненты деформаций и напряжений в каждом приближении для рассматриваемого момента времени. Количество необходимых приближений определяется из условия, что в двух последовательных решениях относительное изменение НДС оказывалось меньше заданного параметра.

2. Примеры расчетов.

Для проверки сходимости предложенного метода исследования НДС тел вращения из трансверсально-изотропного материала с учетом его повреждения в процессе деформирования была рассмотрена тестовая задача, для которой решение может быть получено другими методами. В частности, рассмотрено состояние полого цилиндра с внутренним радиусом 0,05 м и наружным 0,06 м длины 0,4 м, находящегося под воздействием внутреннего давления, растяжения и кручения, изменяющихся во времени по линейному закону: $\sigma_{rr} = -1,5t$ МПа при $r = 0,05$ м; $\sigma_{zz} = 6t$ МПа, $\sigma_{z\varphi} = \pm 1rt$ МПа при $z = \pm 0,2$ м.

Для исследования процесса повреждения материала при деформировании цилиндра использованы экспериментальные данные, полученные в результате одноосного растяжения и кручения трубчатых образцов или сдвига. Они приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\varepsilon, \%$	$\sigma_{ij}, \text{ МПа}$					
	σ_{zz}	σ_{rr}	$\sigma_{\varphi\varphi}$	σ_{zr}	$\sigma_{z\varphi}$	$\sigma_{r\varphi}$
0	0	0	0	0	0	0
0,01	0,46	2,50	2,50	0,66	0,66	2,28
0,10	4,6	15,0	15,0	5,0	5,0	8,5
0,20	8,5	26,0	26,0	7,5	7,5	15,5
0,50	16,2	40,0	40,0	14,5	14,5	31,0
1,0	28,0	47,5	47,5	24,0	24,0	40,0
2,0	49,5	56,5	56,5	42,0	42,0	48,0
3,0	70,0	64,0	64,0	55,0	55,0	55,0

Некоторые результаты расчета НДС в точке (середина цилиндра вблизи его внутренней поверхности) на шестой секунде нагружения приведены в табл. 2.

Таблица 2

ε_{zz}	ω_{zz}	$E_z^* \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_{\varphi\varphi}$	$\omega_{\varphi\varphi}$	$E_\varphi^* \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_{z\varphi}$	$\omega_{z\varphi}$	$G_{z\varphi}^* \cdot 10^{-3}$
1,201	0,428	2,63	0,468	0,795	5,13	1,376	0,661	1,12

В этой таблице приведены компоненты деформаций (в %) и значения параметров повреждения, которые можно также получить непосредственно из кривых растяжения или кручения при известных значениях соответствующих напряжений, которые определяются приложенной к поверхности нагрузкой. Там же приведены вычисленные значения (МПа) соответствующих упругих характеристик анизотропного материала после его повреждения. При этом первоначально трансверсально-изотропный материал становится цилиндрически ортотропным. Вычисленные путем решения соответствующей краевой задачи величины полностью совпадают с полученными непосредственно из экспериментальных кривых растяжения, кручения или сдвига.

Таким образом, разработанная методика позволяет исследовать упругое НДС ортотропных тел вращения с учетом повреждения при деформировании цилиндрически ортотропного материала и определить его эффективные свойства, учитывающие предварительное нагружение.

Используя предложенную выше методику определения неосесимметричных температурных полей и термонапряженного состояния составных тел вращения, исследуем нестационарное температурное поле и НДС трехслойного цилиндра при кратковременном конвективном нагреве его со стороны внешней поверхности окружающей средой. При проведении расчетов предполагается, что внешний слой $0,49 \leq r \leq 0,50$ м изготовлен из изотропного материала, а внутренняя часть цилиндра $0,23 \leq r \leq 0,48$ м изготовлена из трансверсально-изотропного материала, который при деформировании повреждается. Промежуточный слой изготовлен из теплозащитного изотропного материала. При анализе результатов обратим особое внимание на состояние внутреннего слоя.

Цилиндр в момент времени $t = 0$ находится при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$, а затем подвергается конвективному теплообмену со стороны цилиндрической поверхности с окружающей средой температуры $\theta = 200(1 + 0,5 \cos \varphi)^\circ\text{C}$; коэффициент теплоотдачи α между окружающей средой и материалом цилиндра принят постоянным и равным $1 \text{ кВт/м}^2 \cdot \text{К}$.

В расчетах предполагается, что внешний изотропный слой цилиндра изготовлен из титанового сплава ВТ5, теплофизические характеристики которого определяются величинами $c\rho = 2,64 \text{ МДж/м}^3 \cdot \text{К}$; $\lambda = 11 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$, а диаграмма растяжения образцов и значения коэффициента линейного теплового расширения материала для нескольких значений температуры известны [1]. Коэффициент Пуассона предполагается независимым от температуры и равным 0,3.

В качестве ортотропного материала выбран материал с упругими механическими и теплофизическими характеристиками, независимыми от температуры:

$$E_r = E_\varphi = 2,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}; E_z = 0,46 \cdot 10^4 \text{ МПа}; G_\varphi = 1,14 \cdot 10^4 \text{ МПа};$$

$$G_{zr} = G_{z\varphi} = 0,33 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu_{zr} = \nu_{z\varphi} = 0,11, \nu_{r\varphi} = 0,1; c\rho = 2,93 \text{ МДж/м}^3 \cdot \text{К};$$

$$\lambda_{zz} = \lambda_{rr} = \lambda_{\varphi\varphi} = 0,149 \text{ кВт/м} \cdot \text{К}; \alpha_{zz}^T = \alpha_{rr}^T = \alpha_{\varphi\varphi}^T = 0,65 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}.$$

Для учета его повреждения в процессе деформирования были использованы экспериментальные данные, приведенные выше в табл. 1.

Для теплозащитного промежуточного слоя, изготовленного из материала УМП-1, теплофизические характеристики определены такими величинами: $c\rho = 2,375 \text{ МДж/м}^3 \cdot \text{К}$; $\lambda = 0,497 \text{ кВт/м} \cdot \text{К}$. Диаграммы растяжения образцов для нескольких значений температуры приведены в табл. 3. Коэффициент Пуассона и значения коэффициента линейного теплового расширения материала приняты независимо от температуры (в расчетах принято $\nu = 0,32$, $\alpha_r = 0,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}$).

Таблица 3

$\varepsilon, \%$	σ_{ii} (в МПа) для разных значений T (в °C)					
	20 °C	100 °C	200 °C	400 °C	600 °C	2000 °C
0	0	0	0	0	0,0	0,0
0,5	55,0	29,0	11,	4,5	1,0	0,5
1,5	147,5	81,0	30,5	9,5	4,0	1,0
2,25	166,0	122,0	45,0	11,5	4,5	1,3
3,0	174,0	142,0	59,0	12,0	5,0	1,35
4,0	177,0	151,0	68,0	12,4	5,5	1,4
10,0	184,0	157,0	73,5	16,0	6,0	1,8

В результате расчетов температурных полей во внутреннем слое составного цилиндра из указанных материалов оказалось, что температура до 600 секунды нагрева как по радиусу, так и по окружности мало изменяется. При этом его НДС и повреждение определяется воздействием других слоев.

Некоторые результаты расчета НДС приведены на рис. 2 – 9 (сплошные линии соответствуют окружной координате $\varphi = 0$, штриховые – $\varphi = \pi / 2$).

Рис. 2 – 7 иллюстрируют изменение по радиусу и во времени температурного поля, компонентов напряженного состояния и параметров повреждения материала в процессе деформирования во внутреннем цилиндре. На рис. 2, 3 показано изменение вдоль радиуса температуры (рис. 2, а), напряжений (рис. 2) и параметров повреждения (рис. 3) на 300 секунд нагрева. На рис. 4, 5 показано изменение во времени этих величин при $r = 0,29$ м, а на рис. 6, 7 – при $r = 0,43$ м. Из анализа этих рисунков следует, что уже после 100 – 150 секунд внешнего температурного воздействия во внутреннем цилиндре достигается максимальное повреждение материала.

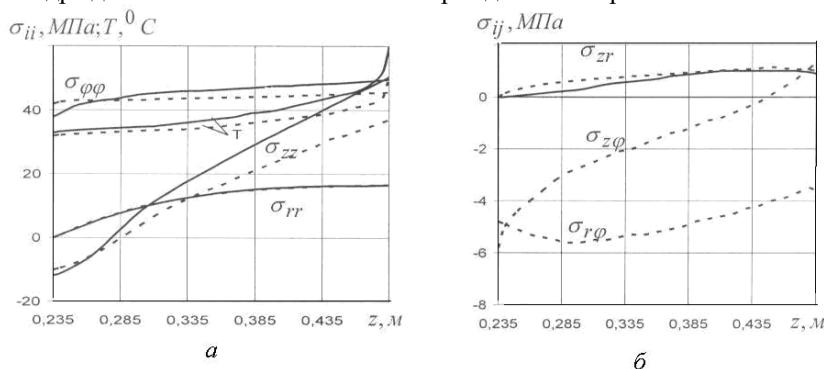


Рис. 2

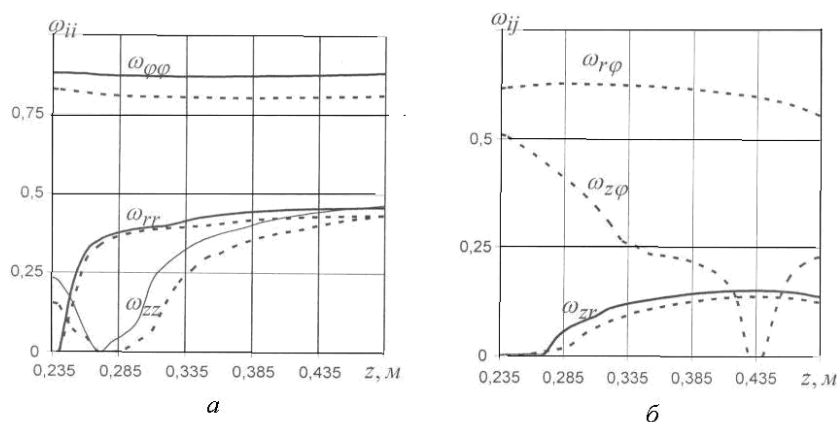


Рис. 3

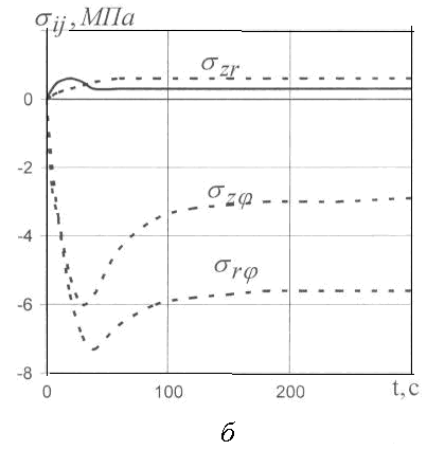
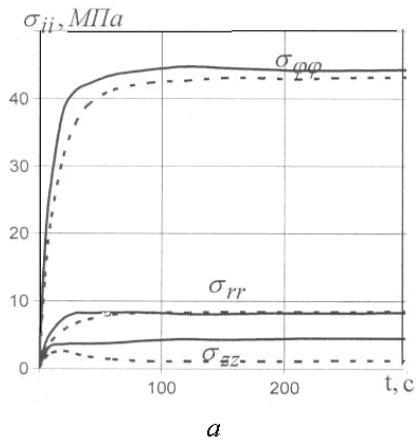


Рис. 4

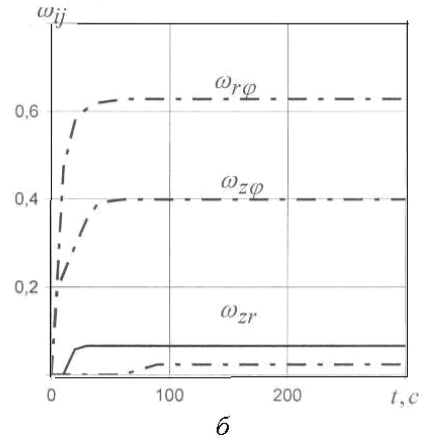
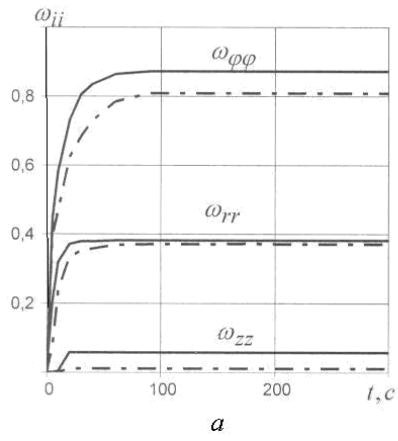


Рис. 5

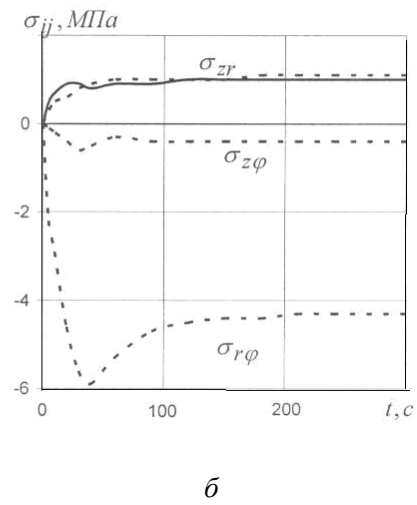
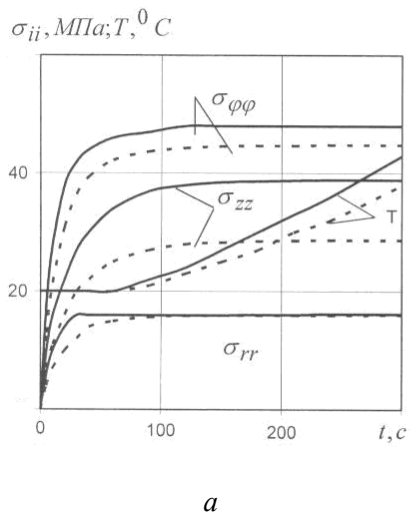


Рис. 6

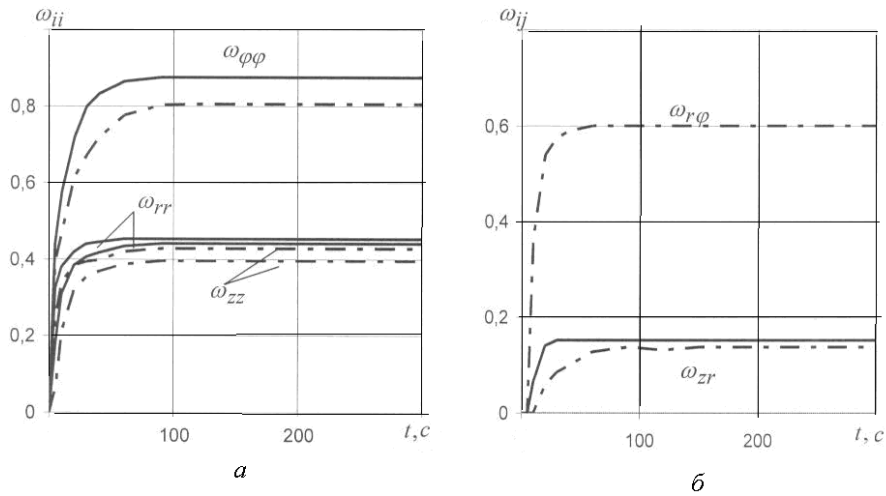


Рис. 7

На рис. 8, 9 приведено изменение во времени температуры и компонентов напряженного состояния посредине теплоизоляционного слоя ($r = 0,4875$ м) до 600 с нагрева и внешней титановой оболочки ($r = 0,495$ м) – до 300 с.

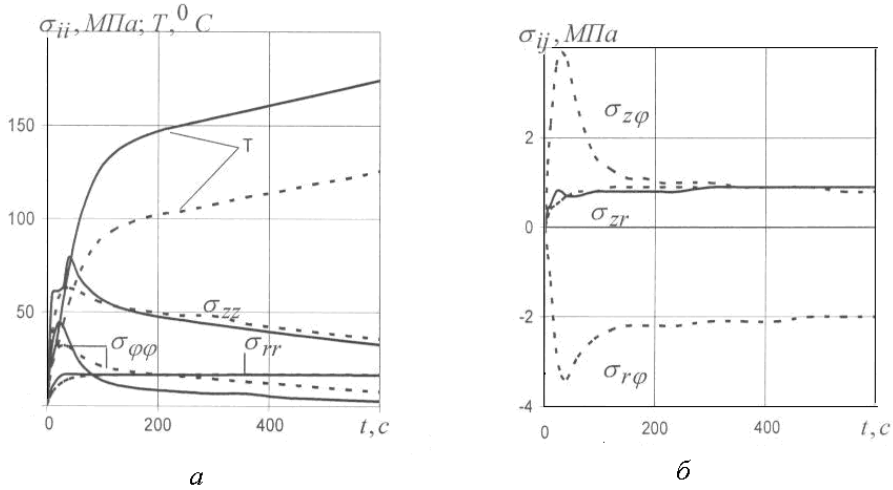


Рис. 8

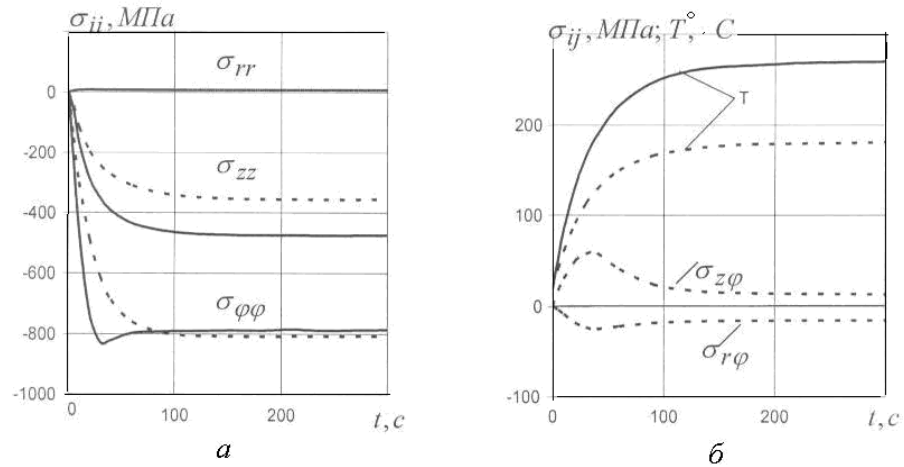


Рис. 9

Из анализа числовых данных следует, что во внешнем слое температура уже к 100 с устанавливается, что приводит к более раннему уменьшению градиента температуры и, как следствие, к разгрузке, начиная с 30 секунды. Аналогичная картина наблюдается и в теплозащитном слое; только в нем за счет роста температуры после начала разгрузки нормальные напряжения (рис. 8, а) продолжают изменяться и после 300 с.

Заключение.

Предложена методика, которая позволяет исследовать НДС тел вращения с учетом повреждения при деформировании упругого ортотропного материала. Ее использование показывает, что первоначально трансверсально-изотропный материал при деформировании с изученным типом повреждения материала становится цилиндрически ортотропным.

Предложенный подход позволяет путем решения соответствующей краевой задачи прогнозировать прочностные свойства, учитывающие историю нагружения, без проведения экспериментов на образцах из предварительно деформированных материалов рассматриваемых тел.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано методику врахування пошкодження при деформуванні непружних ізотропних і пружних ортотропних матеріалів при дослідженні термопружнопластичного напружено-деформованого стану складених тіл обертання при неосесиметричному навантаженні та нагріванні. Числові результати представлено в графічній формі і проаналізовано.

1. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. и др.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965 – 568 с.
2. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. – 1967. – № 3. – С. 21 – 35.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. *Работнов Ю.Н., Милейко С.Т.* Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970 – 224 с.
5. *Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г.* Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328 с.
6. *Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г.* Термовязкопластичность: Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т. – К.: Наук. думка, 1987. – Т. 2. – 264 с.
7. *Babeshko M.E., Savchenko V.G.* Improving the Convergence of the Additional-Strain Method in Thermo-plasticity Boundary Problems with Deformation Along Small Curvature Trajectories // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 8. – P. 771 – 776.
8. *Baste S., Audoin B.* On internal variables in anisotropic damage // Eur. J. Mech. A. – 1991. – **10**, N 6. – P. 587 – 606.
9. *Galishin A.Z.* Determining the Thermoviscoplastic State of Shells of Revolution Subject to Creep Damage // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 5. – P. 537 – 545.
10. *Chaboche J.L.* Continuous damage mechanics – a tool to describe phenomena before crack initiation // Nuclear. Eng. and Design. – 1981. – N 64. – P. 233 – 247.
11. *Chandranath S., Pandey P.C.* An isotropic damage model for ductile material // Eng. Fract. Mater. – 1995. – **50**, N 6. – P. 457 – 465.
12. *Hencky H.* Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen // ZAMM. – 1924. – **4**, N 4. – P. 323 – 334.
13. *Hill R.* Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: University Press, 1950. – 348 с.
14. *Khoroshun L.P.* Deformation and Short-Term Damage of a Physically Nonlinear Unidirectional Fibrous Composite // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 272 – 281.
15. *Prandtl L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht // ZAMM. – 1923. – **3**, N 6. – P. 401 – 406.
16. *Reuss A.* Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie // ZAMM. – 1930. – **10**, N 3. – P. 266 – 274.
17. *Savchenko V.G.* Numerical Nonaxisymmetric Thermoelastic Analysis of Compound Solids of Revolution with Damage // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 275 – 282.
18. *Savchenko V.G., Babeshko M.E.* Solution of Nonaxisymmetric Three-dimensional Thermoelasticity Problem by the Secondary-Stress Method // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, N 12. – P. 1207 – 1213.
19. *Savchenko V.G., Shevchenko Yu.N.* Nonaxisymmetrical thermal stressed state of laminated bodies of revolution of orthotropic materials under nonisothermic loading // Mech. of Compos. Mater. – 2004. – **40**, N 6. – P. 731 – 751.
20. *Shevchenko Yu.N., Savchenko V.G.* Three-Dimensional Problems of Thermoviscoplasticity: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 217 – 271.
21. *Zyczkowski M.* Combined Loadings in the Theory of Plasticity. – Warszawa: PWN – Polish Scientific Publishers, 1981. – 714 p.

Поступила 07.07.2017

Утверждена в печать 30.01.2018