

А. Н. Гузь, А. М. Багно

**ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА
ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ВОЛН ЛЭМБА В СИСТЕМЕ
«СЛОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ – УПРУГИЙ СЖИМАЕМЫЙ СЛОЙ»**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e – mail: alexbag2016@gmail.com*

Abstract. A problem of the acoustic wave propagation in a pre-deformed compressible elastic layer that interacts with a layer of viscous compressible fluid is studied. The results are obtained on the basis of three-dimensional linearized equations of the theory of elasticity of finite deformations for the elastic layer and on the basis of three-dimensional linearized Navier – Stokes equations for the viscous compressible fluid. The problem formulation and the approach, based on utilization of the representations of general solutions of the linearized equations for elastic and fluid layers are applied. A dispersion equation is obtained which describes the propagation of harmonic waves in a hydroelastic system over the wide frequency range for thick liquid layer. An effect of the initial stresses as well as of the thicknesses of elastic and fluid layers on the phase velocities and attenuation coefficients of Lamb modes are analyzed. It is shown that the viscosity of a fluid helps to reduce the depth of penetration of the lowest quasi-Lamb mode into the fluid layer. An approach developed and the results obtained make it possible to establish for the wave processes the limits of applicability of the models, based on different versions of the theory of small initial deformations, the classical theory of elasticity, and of the model of an ideal fluid. The numerical results presented in the form of plots are analyzed.

Key words: elastic compressible layer, layer of viscous compressible fluid, initial stresses, harmonic waves.

Введение.

Одним из многих направлений, по которым проводятся исследования закономерностей распространения поверхностных акустических волн, является направление, связанное с разработкой ультразвуковых неразрушающих методов выявления дефектов и определения напряжений в материалах и элементах различных конструкций. Относящимся к этому направлению исследованиям посвящена обширная библиография. Среди них отметим лишь те работы, которые опубликованы сравнительно недавно [17, 18, 24, 25, 27 – 31, 33 – 35 и др.]. Методология отмеченных подходов основана на знании закономерностей распространения акустических волн в реальных упруго-жидкостных системах. Модель, предложенная в работах [3 – 9, 19 – 23] и основанная на линеаризованной теории гидроупругости, позволяет при рассмотрении динамических задач учесть начальные напряжения в упругих телах и вязкость жидкости, являющихся одними из главных факторов, присущих реальным твердым и жидким средам.

Данная работа посвящена исследованию в рамках моделей предварительно напряженного тела и вязкой сжимаемой ньютоновской жидкости распространения квазилэмбовских волн в гидроупругой системе, состоящей из слоя жидкости и упругого слоя. При этом использованы трехмерные линеаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для твердого тела и трехмерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса для жидкости. Предполагается, что жидкость находится в со-

стоянии покоя, а тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений линейризованных уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и предварительно напряженного упругого тела, предложенные в работах [3 – 9, 19 – 23].

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из слоя вязкой сжимаемой жидкости и сжимаемого упругого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для твердого тела и линейризованных уравнений Навье – Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя [3 – 9, 19 – 23].

Далее рассмотрим такие динамические процессы в гидроупругой системе, при которых возникающие дополнительные деформации, т. е. возмущения деформаций, значительно меньше начальных. Исследуем гармонические волновые процессы малой амплитуды. При этом примем, что упругое тело находится в начальном состоянии. Заметим, что в отличие от твердых тел, соотношения которых записаны в лагранжеских координатах, равенства для жидкой среды записываются в эйлеровых координатах, которые введены в естественном состоянии жидкости. Следует подчеркнуть, что начальное состояние упругого тела при рассмотрении гидроупругой задачи является естественным состоянием по отношению к жидкости и системе в целом. Поскольку в дальнейшем исследуем распространение малых возмущений, то, как известно, в этом случае подходы Эйлера и Лагранжа в описании поведения сред совпадают. Поэтому в дальнейшем не учитываем различия между лагранжескими и эйлеровыми координатами и характерные для нелинейных задач трудности при записи граничных условий при указанных двух подходах не возникают.

В рамках принятых моделей основные соотношения для системы, состоящей из предварительно напряженного сжимаемого упругого тела и вязкой сжимаемой жидкости, имеют вид [3 – 9, 19 – 23]:

1) сжимаемые упругие тела –

$$\left(\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (1.1)$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta}; \quad \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3};$$

2) вязкая сжимаемая жидкость –

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \nu^* \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad z_k \in V_2; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const}; \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*; \quad z_k \in V_2;$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right); \quad \tilde{P}_j = p_{ij} N_i^0, \quad z_k \in V_2. \quad (1.3)$$

При этом специфику взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические $\tilde{Q}_j = \tilde{P}_j$ ($z_k \in S$) и кинематические $\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{v}$ ($z_k \in S$) граничные условия, задаваемые на поверхности контакта упругих тел и жидкости S .

Введенный выше тензор $\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta}$, зависящий от вида начального состояния и типа упругого потенциала материала твердого тела, приведен в работах [3, 4, 6 – 8, 22].

Здесь введены следующие обозначения: u_i – компоненты вектора смещений упругого тела \mathbf{u} ; ρ – плотность материала упругого слоя; v_i – составляющие вектора

возмущений скорости жидкости \mathbf{v} ; ρ^* и p – возмущения плотности и давления в жидкости; ν^* и μ^* – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости; ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; λ_i – удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей; V_1 и V_2 – объемы, занимаемые, соответственно, упругим телом и жидкостью; S – поверхность контакта упругой и жидкой сред.

Равенства (1.1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости относительно состояния покоя и без учета тепловых эффектов описывают соотношения (1.2) – (1.3).

Далее предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем $(-\infty < z_1 < \infty, -h_2 \leq z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$ и контактирует со слоем вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем: $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 \leq h_1, -\infty < z_3 < \infty)$. Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси Oz_3 . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости Oz_1z_2 . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1.1) – (1.3) при следующих граничных условиях:

$$\tilde{P}_1|_{z_2=0} = \tilde{Q}_1|_{z_2=0}; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=0} = \tilde{Q}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h_2} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=-h_2} = 0; \quad (1.4)$$

$$\tilde{P}_1|_{z_2=h_1} = 0; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=h_1} = 0; \quad v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (1.5)$$

Здесь введены следующие обозначения: \tilde{Q}_i и \tilde{P}_i – составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости.

§2. Методика решения задачи.

Воспользуемся постановками задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями и вязкой жидкости, а также представлениями общих решений линеаризованных уравнений, предложенными в работах [3 – 9, 19 – 23]. В дальнейшем исследуем волновые процессы в предварительно деформированных сжимаемых упругих телах, взаимодействующих с вязкой жидкостью, начальное состояние которых является однородным. В случае однородного напряженно-деформированного состояния для плоского случая общие решения имеют вид [3 – 9, 19 – 23]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1; \quad v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные функции χ_i являются решениями следующих уравнений:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{11}^0) (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0;$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Здесь введены следующие обозначения: a_{ij} и μ_{ij} – величины, определяемые из уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [4, 5 – 10]; $\bar{\sigma}_{ii}^0$ [$s_{ii}^0 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0) / \lambda_i^2$] – начальные напряжения.

Заметим, что несмотря на то, что для упругих тел приведенные соотношения относительно возмущений являются линейными, в то же время величины начального состояния, входящие в них, определяются из общих нелинейных уравнений. В связи с этим, несмотря на то, что основные соотношения приведены в координатах начального деформированного состояния z_i и все величины отнесены к размерам тела в этом состоянии, общая постановка задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями в координатах z_i по форме аналогична формулировке линейных задач классической теории гидроупругости; при этом есть и существенные различия, которые относятся к структуре уравнений и граничных условий, входящих в нее.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн $\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)]$ ($j = \overline{1, 3}$), где k ($k = \beta + i\gamma$) – волновое число; γ – коэффициент затухания волны; ω – круговая частота; $i^2 = -1$.

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1.4), (1.5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| \theta_{lm} \left(c, \gamma, \rho, \mu, a_{ij}, \mu_{ij}, \sigma_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h_1 / c_s, \omega h_2 / c_s \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 8}), \quad (2.1)$$

где c – фазовая скорость мод в гидроупругой системе; h_1 – толщина слоя жидкости; h_2 – толщина упругого слоя; c_s ($c_s^2 = \mu / \rho$) – скорость волны сдвига в упругом теле; μ – модуль сдвига материала упругого тела.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (2.1) не зависит от формы упругого потенциала. Оно является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 3 – 12, 15, 26]. В частности, если a_0 устремить к бесконечности, то (2.1) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия упругого слоя с вязкой несжимаемой жидкостью. Если $\bar{\mu}^*$ положить равным нулю, то из (2.1) получим результаты

для гидроупругой системы с идеальной жидкостью. При $\rho_0 = 0$ равенство (2.1) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [10]. Если дополнительно устремить h_2 к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [4 – 6, 8, 12, 15, 26]. При $\rho_0 \neq 0$ и $h_1 \rightarrow \infty$ равенство перейдет в уравнение Стоунли [4, 5, 11, 15, 26].

Указанные частные случаи учитывают наличие начальных деформаций в упругом слое. Модели, основанные на различных вариантах теории малых начальных деформаций, на уравнениях приближенных прикладных двумерных теорий как для предварительно напряженных, так и для тел без начальных деформаций, на линейных соотношениях классической теории упругости, являются частными случаями, рассматриваемого в работе, и следуют из него при введении дополнительных упрощающих предположений. Задачи, которые рассмотрены в рамках модели, учитывающей начальные напряжения, приведены в [3 – 8, 11 – 16, 26]. Если положить $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$ и $\bar{\mu}^* = 0$, то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли – Шольте и Лэмба [1].

§3. Числовые результаты.

В дальнейшем дисперсионное уравнение (2.1) решаем численно. При этом расчеты проводим для системы, состоящей из органического стекла и воды, которая характеризуется следующими параметрами: упругий слой – $\rho = 1160$ кг/м³, $\mu = 1,86 \cdot 10^9$ Па, $\lambda = 3,96 \cdot 10^9$ Па; слой жидкости – $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с, $\bar{\mu}^* = 0,001$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$.

Заметим, что уравнение (2.1) получено без каких-либо дополнительных требований к виду функции упругого потенциала, поэтому оно имеет место для упругих потенциалов произвольной формы. При численной реализации задачи вопрос о выборе конкретной формы упругого потенциала имеет самостоятельное, а также важное значение и существенным образом может повлиять на конечный результат. Как показано в работах [3 – 8, 10, 20, 23], для предварительно напряженных сжимаемых жестких материалов (сталь, оргстекло) закономерности, наблюдаемые экспериментально, могут быть правильно описаны теоретически только в рамках упругих потенциалов, являющихся функцией трех инвариантов. В связи с этим, в данной работе для оргстекла использован простейший потенциал в форме Мурнагана, зависящий от трех алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина [3 – 8, 10, 22, 25]. С учетом этого постоянные Мурнагана для оргстекла, посредством которых определяются величины уравнений состояния a_{ij} и μ_{ij} , приняты такими [3 – 8, 10, 12]: $a = -3,91 \cdot 10^9$ Па; $b = -7,02 \cdot 10^9$ Па; $c = -1,41 \cdot 10^9$ Па.

Кроме того, как известно, оргстекло относится к разряду жестких материалов. Они, не разрушаясь, не допускают больших деформаций. Поэтому, несмотря на то, что дисперсионное уравнение (2.1) является наиболее общим и получено для тел, которые подвержены конечным деформациям, при рассмотрении конкретного примера и численного решения уравнения (2.1) коэффициенты уравнений состояния a_{ij} и μ_{ij} были определены в рамках линейного акустического приближения [3 – 8, 10, 12].

Далее дисперсионное уравнение (2.1) решаем численно. Результаты вычислений представлены в виде графиков на рис. 1 – 16.

На рис. 1 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$) при отсутствии начальных напряжений ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$) [10]. Номерами n_a обозначены антисимметричные моды, а n_s – соответственно, симметричные моды.

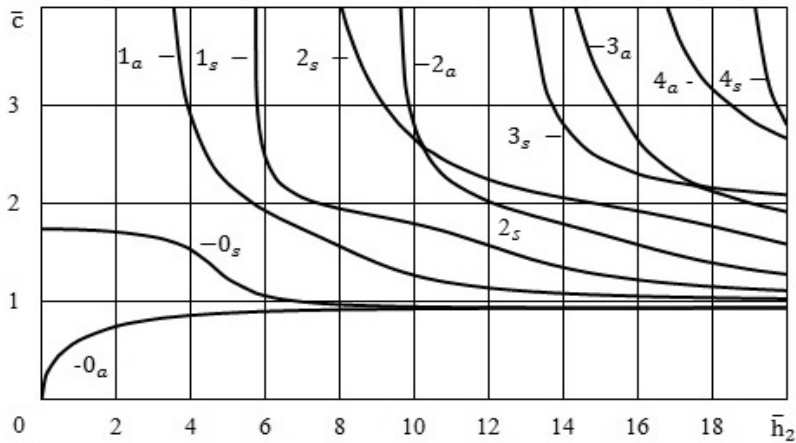


Рис. 1

На рис. 2 показаны дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для толстого вязкого сжимаемого жидкого слоя с толщиной $\bar{h}_1 = 20$ ($\bar{h}_1 = \omega h_1 / c_s$) и $\bar{\mu}^* = 0,001$ при отсутствии начальных деформаций ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$).

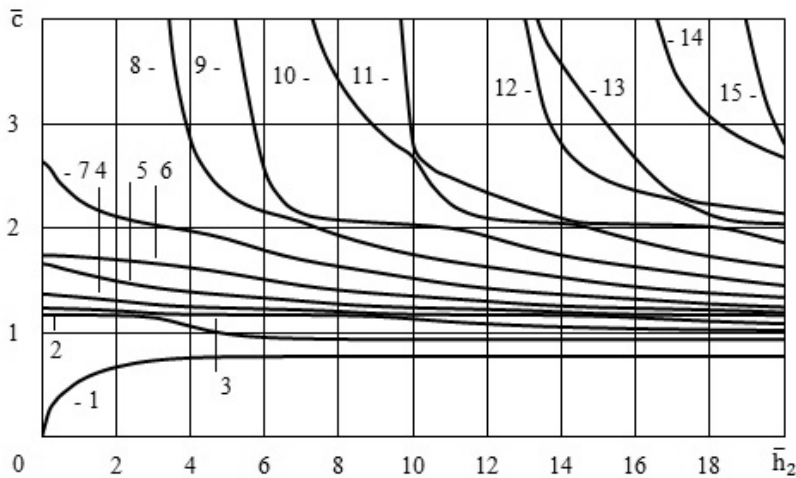


Рис. 2

Графики, представленные на рис. 3, 4, отражают распределение амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из упругого слоя ($-\bar{h}_2 \leq \bar{z}_2 \leq 0$) и слоя ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}_1$) идеальной жидкости ($\bar{\mu}^* = 0$). На них приведены зависимости величин продольных \bar{V}_{z_1} (рис. 3) и поперечных \bar{V}_{z_2} (рис. 4) смещений (скоростей $\partial u_i / \partial t$ и v_i) от безразмерной поперечной координаты \bar{z}_2 для поверхностной моды 1 (рис. 2).

Отметим, что разрыв продольных смещений \bar{V}_{z_1} в упругом теле (кривая 1) и в идеальной жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ($\bar{z}_2 = 0$) обусловлен тем, что в этом случае жидкость принимается идеальной (рис. 3).

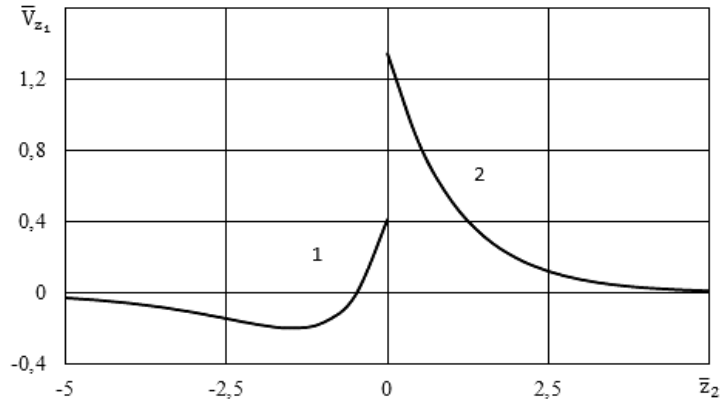


Рис. 3

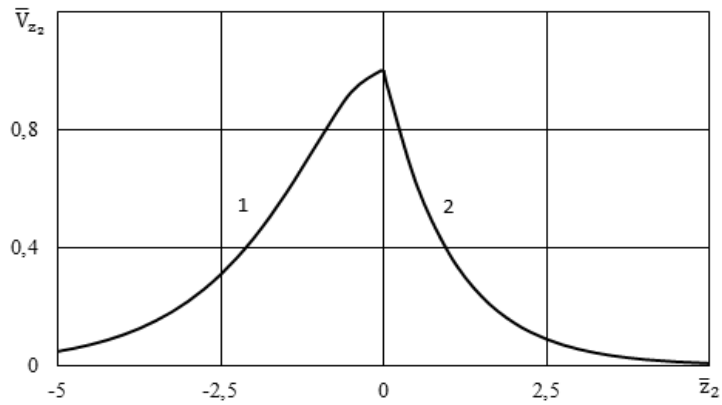


Рис. 4

Аналогичные зависимости для гидроупругой системы, состоящей из упругого слоя и слоя вязкой жидкости ($\bar{\mu}^* = 0,001$), приведены на рис. 5, 6.

Графики, представленные на рис. 3 – 6, получены для первой нижней квазиповерхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине) $\bar{h}_2 = 15$ и отсутствии начальных напряжений ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$)

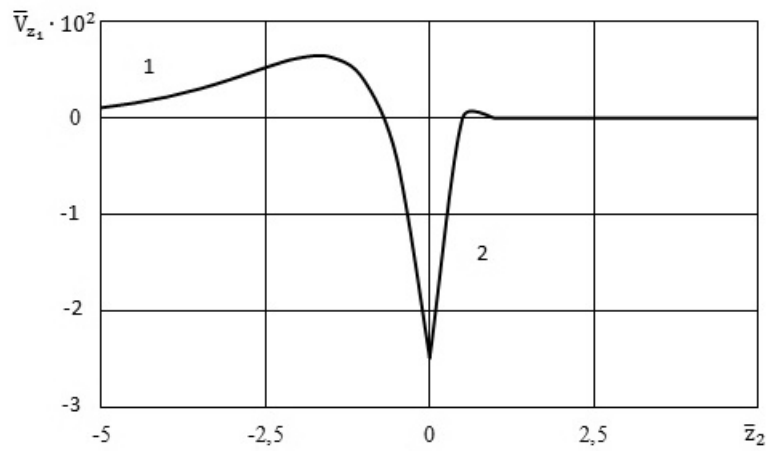


Рис. 5

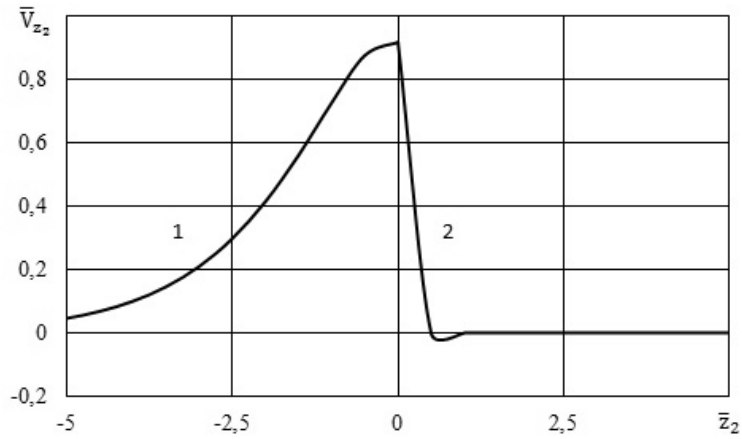


Рис. 6

На рис. 7 – 10 приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s, k_s$ – волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для слоя вязкой жидкости с толщиной $\bar{h}_1 = 20$ и $\bar{\mu}^* = 0,001$ при отсутствии начальных деформаций ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$).

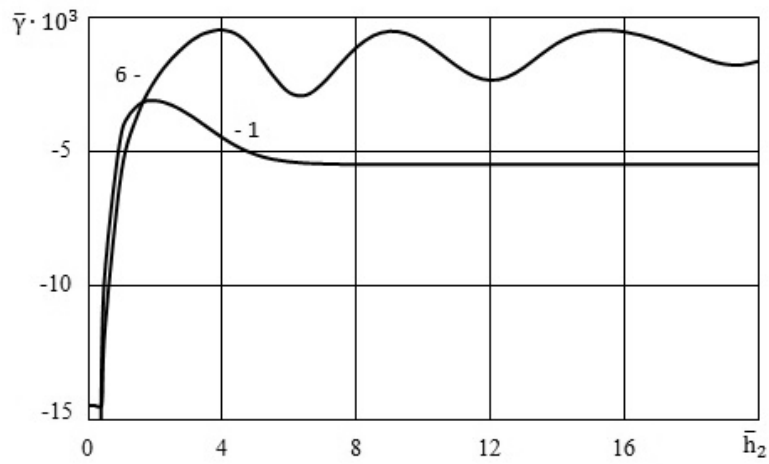


Рис. 7

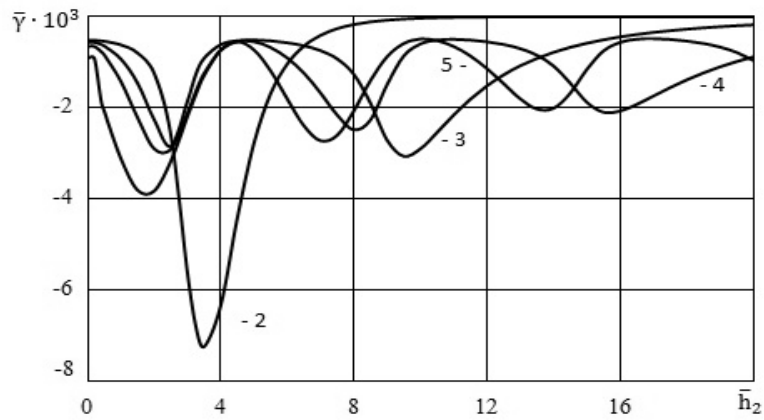


Рис. 8

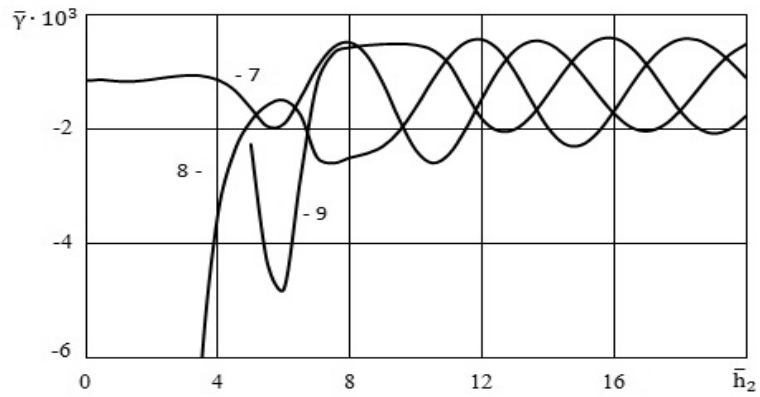


Рис. 9

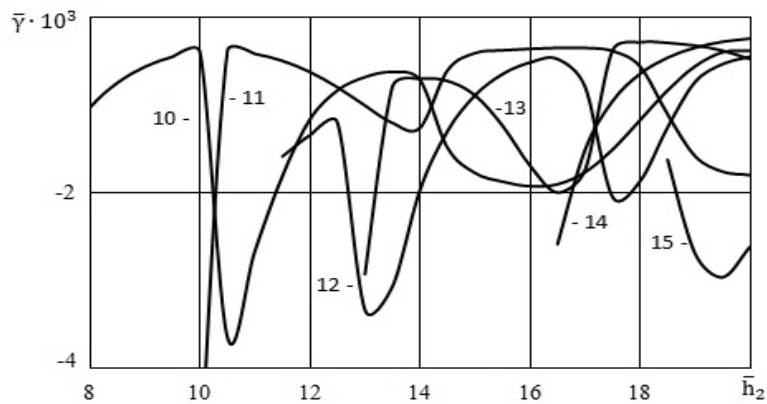


Рис. 10

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на скорости нормальных волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 11 – 13, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_ε [$c_\varepsilon = (c_\sigma - c)/c$, c_σ – фазовая скорость мод в предварительно напряженном слое, c – фазовая скорость нормальных волн в упругом слое при отсутствии начальных деформаций] от толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этих рисунках приведены кривые для гидроупругого волновода, толщина вязкого жидкого слоя которого $\bar{h}_1 = 20$ и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

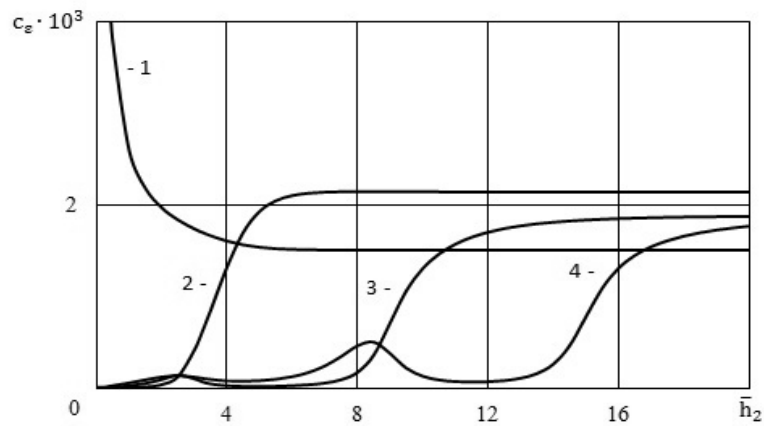


Рис. 11

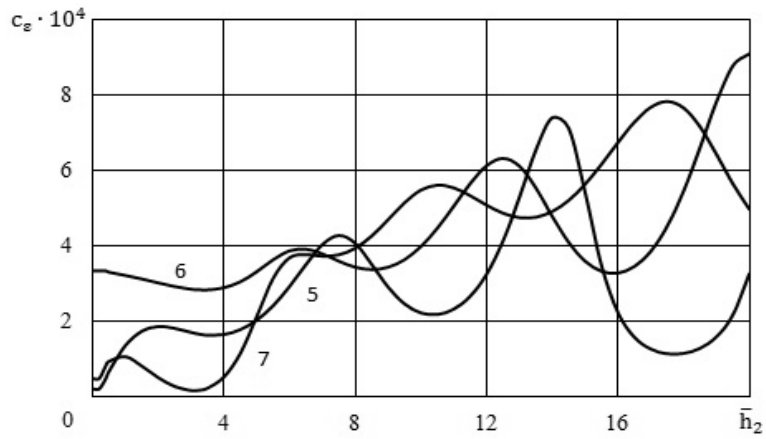


Рис. 12

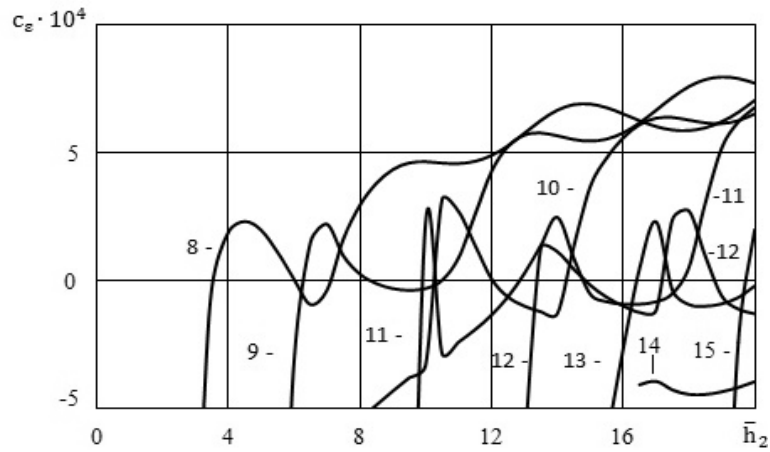


Рис. 13

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на коэффициенты затухания мод в упругом слое, взаимодействующем со слоем вязкой сжимаемой жидкости, иллюстрируют графики на рис. 14 – 16, на которых представлены зависимости относительных изменений величин коэффициентов затухания мод γ_ε [$\gamma_\varepsilon = (\gamma_\sigma - \gamma) / \gamma$, γ_σ –

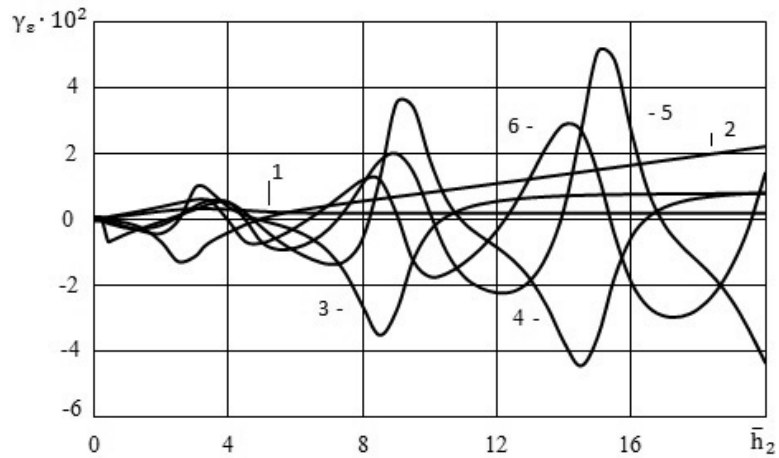


Рис. 14

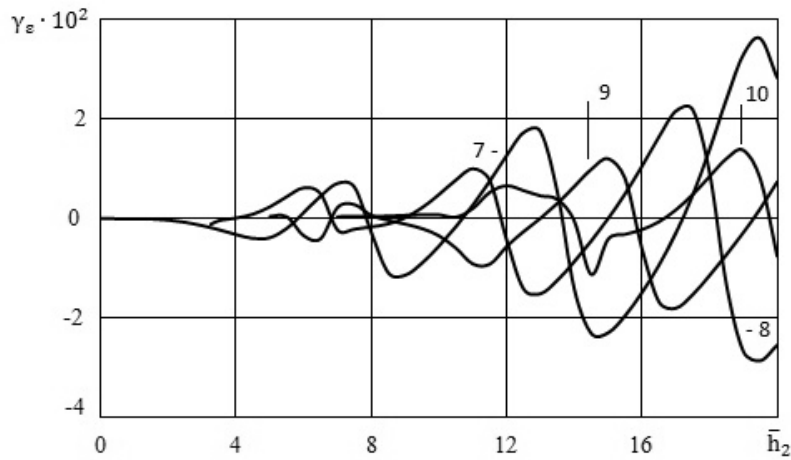


Рис. 15

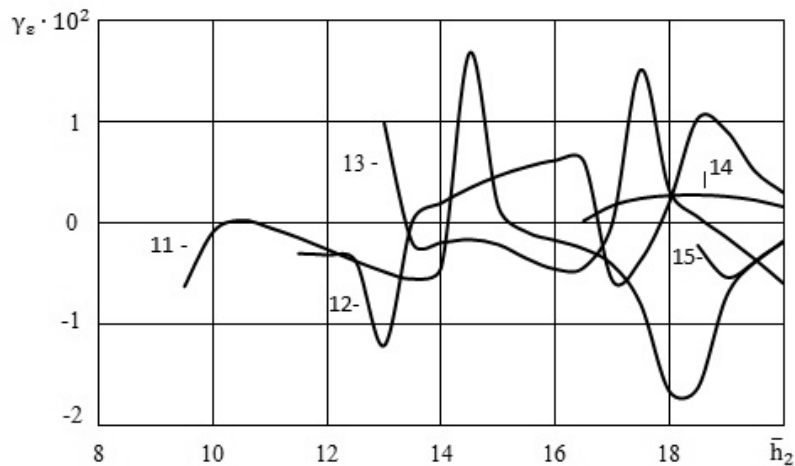


Рис. 16

коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе, упругий слой которой подвержен начальным деформациям, γ – коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе при отсутствии начальных деформаций] от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этих рисунках представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, толщина жидкого слоя которого $\bar{h}_1 = 20$ и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

§4. Анализ числовых результатов.

Из графиков, представленных на рис. 1, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба, распространяющейся вдоль нижней свободной поверхности слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9335596$) снизу, а скорость нулевой симметричной моды, распространяющейся вдоль верхней свободной поверхности слоя, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,9335596$) сверху. Скорости всех высших нормальных волн Лэмба при увеличении толщины упругого слоя или частоты стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s [10].

Графики для гидроупругой системы, которые приведены на рис. 2, показывают, что при росте толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды стремится к скорости

волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,769121$) снизу, а скорость второй моды – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933558$) сверху. Квазирэлеевская мода 2 распространяется вдоль свободной поверхности упругого слоя. Фазовые скорости всех последующих мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела. При этом с ростом толщины они локализируются в толще упругого слоя [1]. Отметим, что наличие жидкости приводит к увеличению числа нормальных квазилэмбовских волн в гидроупругой системе. При этом возникающие низшие моды имеют нулевые частоты запирания.

Из графиков рис. 3 – 6 видно, что квазиповерхностная мода 1 (волна типа Стоунли) при выбранных механических параметрах системы $\bar{a}_0 = 1,152595 > \bar{c}_R = 0,933558$, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных слоях как упругого тела, так и жидкости. При этом, как следует из графиков рис. 5, 6, более сильная связь между упругим телом и жидкой средой, обусловленная вязкостью жидкости, приводит к уменьшению глубины проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкий слой.

Из графического материала, представленного на рис. 7 – 10, непосредственно следует, что для всех мод существуют упругие слои определенной толщины, при которых моды распространяются как с наименьшим, так и с наибольшим затуханием. С ростом толщины упругого слоя для квазилэмбовских мод (кроме первой) характерно уменьшение их величин коэффициентов затухания и общего влияния вязкой жидкости на них.

Из графиков, приведенных на рис. 11 – 13, следует, что начальное растяжение упругого слоя ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) приводит к повышению фазовых скоростей мод 1 – 7. Скорости всех высших мод 8 – 15 в окрестности толщин упругих слоев, при которых они зарождаются, становятся меньше скоростей соответствующих мод в слое без начальных напряжений. Нетрудно видеть, что для мод, начиная с восьмой и далее, для всех последующих существуют упругие слои определенных толщин (частот), при которых предварительные деформации не влияют на их фазовые скорости. В рассматриваемом здесь случае гидроупругой системы с толстым жидким слоем для каждой моды 8 – 10 имеются упругие слои трех таких толщин. Для следующих нормальных волн высокого порядка существуют упругие слои пяти таких толщин.

Из графиков, приведенных на рис. 14 – 16, следует, что для мод, начиная со второй и дальше для всех последующих, существуют толщины упругого слоя, при которых предварительное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) не влияет на их коэффициенты затухания.

§5. Влияние вязкости жидкости на дисперсию квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах.

В гидроупругом волноводе жидкость для ряда мод вызывает изменение критических частот, смещение дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра, изменение их конфигурации, а также появление новых мод. Это приводит к тому, что в окрестности толщин, при которых моды зарождаются, влияние жидкости на величины их фазовых скоростей становится значительным.

Влияние вязкости жидкости связано с ее взаимодействием со смещениями, возникающими в упруго-жидкостной системе при распространении волновых возмущений. В тех точках мод, где преобладающими являются сдвиговые смещения на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и величины коэффициентов затухания принимают максимальные значения. В точках волны с малыми поверхностными сдвиговыми смещениями, соответственно, и влияние вязкости наименьшее. Как отмечалось ранее, моды высокого порядка распространяются с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом толщины к скорости волны сдвига в материале упругого тела. При этом с возрастанием толщины, как известно [1], в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т. е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализируются в его толще. Следствием этого является уменьшение влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания этих мод с возрастанием толщины упругого слоя в коротковолновой части спектра.

§6. Особенности влияния начальных напряжений на дисперсию квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах.

Как показано в работе [10], в упругом волноводе, невзаимодействующем с жидкостью, начальные растяжения вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Это приводит к тому, что в окрестности критических частот величины фазовых скоростей мод в предварительно деформированном слое могут быть как меньше, так и больше величин фазовых скоростей соответствующих мод в теле без начальных напряжений. Этим обусловлено также то, что в упругом волноводе появляются частоты (толщины), при которых начальные напряжения не оказывают влияния на величины фазовых скоростей ряда нормальных волн Лэмба.

В гидроупругих волноводах предварительное деформирование (растяжение $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) вызывает изменение критических частот, сдвиг дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра и изменение их конфигурации, приводящее к появлению для ряда квазилэмбовских мод упругих слоев определенных толщин, при которых начальные напряжения не оказывают влияния на величины их фазовых скоростей и коэффициентов затухания. Масштаб изменения формы дисперсионной кривой моды зависит от ее номера. Для мод более высокого порядка эти изменения становятся более значительными. Это приводит к тому, что для низших мод существует по одному упругому слою с толщиной, при которой их фазовые скорости не зависят от начального растяжения. У мод более высокого порядка количество упругих слоев с такими толщинами возрастает.

§7. Свойства локализации низших квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах.

Графики, приведенные на рис. 2, для упруго-жидкостной системы, состоящей из органического стекла и воды, показывают, что в гидроупругом волноводе при увеличении толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,769121$) снизу. Относительно поведения этой моды в коротковолновой части спектра необходимо отметить следующее. Как известно [2], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом волноводе, как было указано ранее, механические параметры гидроупругой системы «оргстекло – вода» таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 1,152595$) больше скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933558$).

Как следует из графиков, представленных на рис. 5, 6, при таком соотношении между параметрами компонентов системы в коротковолновой части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется, преимущественно, в приконтактной области упругого слоя. Скорость моды 2, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной границы, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933558$) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела \bar{c}_s . При этом с ростом толщины упругого слоя, как указывалось выше, эти моды локализуются в его толще [1].

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе низшие моды проникают в твердое тело и так же, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. Этим объясняется влияние начальных напряжений на фазовые скорости всех мод. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Заключение.

В рамках трехмерных уравнений линеаризованной теории упругости конечных деформаций для упругого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Навье – Стокса для вязкой сжимаемой жидкости даны постановка и решение задачи о распространении акустических волн в системе «слой вязкой сжимаемой жидкости – предварительно напряженный сжимаемый упругий слой».

Проанализировано влияния начальных деформаций, толщин слоев упругого тела и жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания мод. Приведены дисперсионные кривые для мод Лэмба в широком диапазоне частот. Показано, что в случае толстого вязкого жидкого слоя квазиповерхностная мода 1 (волна типа Стоунли) при выбранных механических параметрах системы ($\bar{a}_0 > \bar{c}_R$), распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется, преимущественно, в приконтактной области упругого тела. Квазирэлеевская мода 2 распространяется вдоль свободной поверхности упругого слоя. Фазовые скорости всех квазилэмбовских мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела.

Показано, что наличие жидкого слоя приводит к появлению новых нормальных волн. Возникающие моды имеют нулевые частоты запираения. Воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра. Жидкость оказывает влияние на распределение мод среди сред. Локализация низших квазилэмбовских мод в системе «слой жидкости – упругий слой» зависит от механических параметров гидроупругой системы. Основным критерием распределения низших нормальных волн в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в слое жидкости и волны Рэлея, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя. Вязкость жидкости уменьшает глубину проникновения низшей моды в жидкость и усиливает концентрацию потоков энергии в упругом слое.

Обнаружено существование упругих слоев определенной толщины, при которых начальное растяжение не влияет на фазовые скорости и коэффициенты затухания определенных мод. Установлено, что в гидроупругой системе начальное растяжение вызывает смещение дисперсионных кривых квазилэмбовских мод в длинноволновую часть спектра и изменение их конфигурации. При этом масштаб этих изменений зависит от номера моды. Для мод более высокого порядка эти изменения становятся более значительными. Это приводит к тому, что для низших мод существует по одному упругому слою с толщиной, при которой их фазовые скорости не зависят от начального растяжения. У мод более высокого порядка количество упругих слоев с такими толщинами возрастает. Установлено, что для мод, начиная со второй и дальше для всех последующих, существуют толщины упругого слоя, при которых предварительное растяжение не влияет на их коэффициенты затухания.

Предложенный подход и полученные результаты, позволяют для волновых процессов установить пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, классической теории упругости, а также модели идеальной жидкости.

РЕЗЮМЕ. Досліджено поширення акустичних хвиль у попередньо деформованому стисливному пружному шарі, що взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини. Результати отримано на основі тривимірних рівнянь линеаризованої теорії пружності скінченних деформацій для пружного шару та тривимірних линеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, які базуються на використанні представлень загальних розв'язків линеаризованих рівнянь для пружного та рідкого шарів. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення гармонічних хвиль у гідропружній системі у широкому діапазоні частот для товстого рідкого шару. Проаналізовано вплив початкових напружень, а також товщини шарів пружного тіла і рідини на фазові швидкості та коефіцієнти загасання мод Лемба. Показано, що в'язкість рідини призводить до зменшення глибини проникнення нижчої квазілэмбової моди в рідкий шар. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделей, основаних на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, класичній теорії пружності та моделі ідеальної рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. – 1988. – 34, № 4. – С. 608 – 615.

3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.1. Общие вопросы – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
8. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
9. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
10. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
11. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – 16, № 1. – С. 113 – 116.
12. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1979. – 15, N 4. – P. 277 – 291.
13. Bagnò A.M. The Dispersion Spectrum of a Wave Process in a System Consisting of an Ideal Fluid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 6. – P. 648 – 654.
14. Bagnò A.M. Wave Propagation in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 2. – P. 133 – 139.
15. Bagnò A.M., Guz A.N. Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – 33, N 6. – P. 435 – 463.
16. Bagnò A.M., Guz A.N. Effect of Prestresses on the Dispersion of Waves in a System Consisting of a Viscous Liquid Layer and Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 333 – 341.
17. Drinkwater B.W., Wilcox P.D. Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // NDT & E International. – 2006. – 39, N 7. – P. 525 – 541.
18. Gibson A., Popovics J. Lamb wave basis for impact-echo method analysis // J. of Engineering Mechanics. – 2005. – 131, N 4. – P. 438 – 443.
19. Guz A. N. Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – 16, N 3. – P. 175 – 190.
20. Guz A.N. Compressible Viscous Fluid Dynamics (review). Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 1. – P. 14 – 39.
21. Guz A.N. The Dynamics of a Compressible Viscous Liquid (review). II // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 3. – P. 281 – 302.
22. Guz A.N. Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 1. – P. 23 – 59.
23. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
24. Guz A.N. On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // J. Phys. Sci. and Appl. – 2011. – 1, N 1. – P. 1 – 15.
25. Guz A. N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 3. – P. 231 – 252.
26. Guz A. N., Zhuk A. P., Bagnò A. M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 5. – P. 449 – 507.
27. Jhang K.Y. Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing. – 2009. – 10, N 1. – P. 123 – 135.
28. Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C. Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // Smart Materials and Structures. – 2002. – 11, N 2. – P. 269 – 279.
29. Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H. Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // Int. J. of Plasticity. – 2003. – 19, N 6. – P. 771 – 804.
30. Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K. Ultrasonic Lamb wave tomography // Inverse Problems. – 2002. – 18, N 6. – P. 1795 – 1808.
31. Liu L., Ju Y. A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // NDT & E International. – 2011. – 44, N 1. – P. 106 – 110.
32. Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2007. – 42, N 2. – P. 310 – 320.
33. Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C.V. Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (Ao) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // Smart Materials and Structures. – 2009. – 18, N 8. – P. 1 – 7.
34. Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G. Methods of measuring residual stresses in components // Materials & Design. – 2012. – 35, March. – P. 572 – 588.
35. Spies M. Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // Ultrasonics. – 2004. – 42, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Поступила 16.02.2016

Утверждена в печать 30.01.2018