

В. П. Голуб, А. В. Плащинская

**К ТЕОРИИ РОСТА УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА  
В ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ  
ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ – СЖАТИИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: creep@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A problem of constructing the two-stage model of the mode I fatigue crack propagation in the thin isotropic finite plates under uniaxial symmetrical and asymmetrical loading is solved. This model is constructed on the basis of an approach that combines the power concept of fracture mechanics and the continuum damage mechanics concept. The model is approved experimentally on the problems of the calculation of central fatigue crack kinetics under uniaxial symmetrical, asymmetrical with alternating signs and asymmetrical with constant signs cyclic loadings.

**Key words:** thin isotropic finite plates, central crack of mode I, uniaxial tension-compression, symmetrical stress alternation, asymmetrical stress alternation, fatigue cracks growth kinetics.

**Введение.**

Одной из наиболее актуальных проблем механики хрупкого разрушения считается проблема построения моделей и решение задач распространения усталостных трещин в твердых телах при длительном упруго-циклическом или так называемом многоцикловом нагружении [1, 3, 12]. Усталостное разрушение в этом случае происходит при напряжениях меньших предела текучести материала и не сопровождается накоплением макроскопических пластических деформаций.

В этой области механики разрушения выполнен огромный объем экспериментальных исследований и сформулирован ряд эмпирических и полуэмпирических соотношений, устанавливающих зависимость скорости роста усталостных трещин от параметров циклического нагружения. Предметный анализ методов построения и структур такого класса соотношений представлен в [1, 3 – 5, 20]. В частности, показано, что на стадии докритического роста усталостных трещин наиболее обоснованной является концепция Пэриса, в соответствии с которой скорость роста усталостной трещины рассматривается как некоторая характеристическая функция от размаха коэффициента интенсивности напряжений. Результаты большинства дальнейших исследований в этом направлении сведены к уточнению характеристической функции путем введения дополнительных параметров, позволяющих учесть особенности циклического нагружения, например, влияние асимметрии цикла напряжений и максимального напряжения в цикле.

Задача построения теоретической модели роста усталостных трещин впервые, по видимому, была поставлена и решена в работах [10, 13]. Аналитическая зависимость для скорости роста усталостных трещин построена, исходя из анализа размерностей и энергетической концепции Ирвина-Орвана, апробирована экспериментально на образцах из алюминиевых сплавов и использована для оценки влияния частоты нагружения и воздействия внешней среды. Теория размерностей использована также и в работах [1, 2] для построения математической модели зарождения и распространения усталостных трещин в трехмерных упруго-пластических телах. В качестве инвариан-

твой характеристики усталостного разрушения в модели используется величина деформации растяжения в зоне предразрушения. Эти модели содержат, однако, неизвестные функции и константы, методика определения которых или не конкретизирована, или связана с проведением уникальных экспериментов на образцах с трещинами.

Более перспективным к построению теоретических моделей роста усталостных трещин в упругих телах представляется подход, объединяющий энергетическую концепцию механики трещин и концепцию механики непрерывной поврежденности [3, 4, 11]. Идея выбора процесса накопления повреждений на фронте трещины в качестве основной движущей силы для растущей усталостной трещины, сформулированная в [3, 4, 12], получила дальнейшее развитие в работах [6, 16 – 19]. В этих работах построена двухстадийная модель роста усталостных трещин в тонких изотропных бесконечных пластинах при одноосном растяжении – сжатии. Концепция механики непрерывной поврежденности объединяется в этом случае с силовым подходом механики трещин. Модель апробирована экспериментально на задачах расчета кинетики роста усталостных трещин в тонких бесконечных пластинах из алюминиевых сплавов при одноосном симметричном растяжении – сжатии.

В данной работе подход, объединяющий силовую концепцию механики трещин и концепцию механики поврежденности, используем для построения двухстадийной модели распространения усталостных трещин в тонких изотропных пластинах конечных размеров при одноосном симметричном и асимметричном растяжении – сжатии.

### §1. Постановка задачи. Исходные состояния.

Рассмотрим процесс роста усталостных трещин нормального отрыва в тонких прямоугольных пластинах конечных размеров из изотропных линейно-упругих материалов. Высота пластин  $h$ , ширина пластин  $w$ .

Пластины подвергаются воздействию одноосных циклических напряжений  $\tilde{\sigma}$ , изменяющихся по асимметричному циклу, так что

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi n) \quad (\sigma_{\max} = (\sigma_m + \sigma_a) < \sigma_y), \quad (1.1)$$

где  $\sigma_m$  – начальное значение среднего напряжения цикла;  $\sigma_a$  – начальное значение амплитуды циклического напряжения;  $\sigma_y$  – предел текучести материала;  $n$  – число циклов нагружения или дискретное время ( $n = ft$ );  $t$  – физическое время;  $f$  – частота нагружения. Циклические напряжения  $\tilde{\sigma}$  распределены равномерно по краям пластин перпендикулярно по отношению к берегам трещин. Берега трещин свободны от нагрузок.

В (1.1) также принято, что величина  $\sigma_a$  не зависит от дискретного времени  $n$  (стационарный режим) и прикладывается с частотой  $f \geq 10$  Гц, а максимальное напряжение в цикле  $\sigma_{\max}$  не превышает предела текучести материала  $\sigma_y$  (многочикловая усталость). В этом случае основной массив пластин деформируется линейно-упруго, а усталостное разрушение является квазихрупким.

Принимаем далее, что асимметричное циклическое нагружение (1.1) можно свести к эквивалентному ему по числу циклов до разрушения  $n_R$  симметричному циклу. Эквивалентное циклическое напряжение  $\tilde{\sigma}_{eqv}$  и амплитуду эквивалентного циклического напряжения  $(\sigma_a)_{eqv}$  зададим в виде

$$\tilde{\sigma}_{eqv}(n) = (\sigma_a)_{eqv} \sin(2\pi n) \quad \text{и} \quad (\sigma_a)_{eqv} = \psi(\sigma_m)\sigma_a, \quad (1.2)$$

где  $\psi(\cdot)$  – функция, учитывающая влияние среднего напряжения асимметричного цикла  $\sigma_m$  на число циклов до разрушения  $n_R$ .

Усталостную трещину представим как узкую остроконечную щель (рис. 1), расположенную вдоль оси  $x$ . Ось  $y$  направлена перпендикулярно по отношению к контуру трещины, а плоскость  $xu$  совпадает со срединной плоскостью трещины. На-

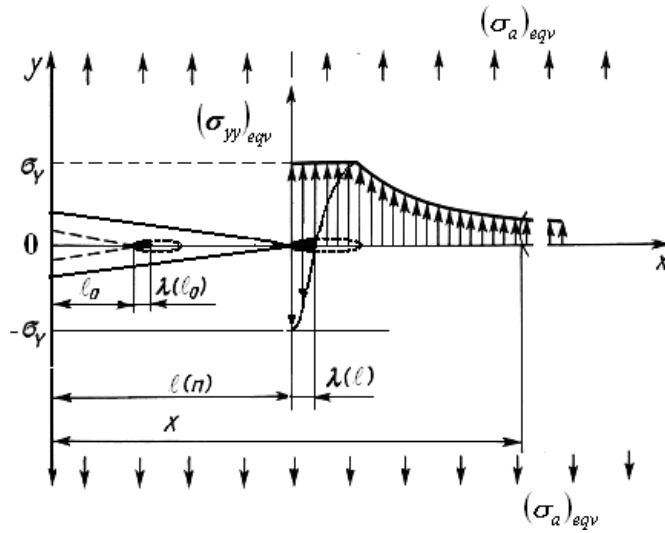


Рис. 1

начальную полудлину усталостной трещины обозначим  $\ell_0$ , а текущую полудлину трещины, зависящую от числа циклов нагружения  $n - \ell(n)$ .

В окрестности вершины усталостной трещины формируется тонкая циклическая пластическая зона, напряжения в которой ограничены пределом текучести материала  $\sigma_Y$  [25, 26, 27, 30]. Начальная  $\lambda(\ell_0)$  и текущая  $\lambda(\ell(n))$  длины циклической пластической зоны определяются размахом напряжений в цикле  $\Delta\tilde{\sigma} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ , а напряжение по её длине изменяется от  $-\sigma_Y$  до  $+\sigma_Y$ .

В качестве основного механизма, контролирующего процесс распространения усталостных трещин в пластинах, рассматриваем процесс накопления усталостных повреждений по фронту растущей трещины. Полагаем, что в каждой произвольной точке фронта разрушения  $x_i(x, 0)$  в момент времени  $n$  накапливаются усталостные повреждения, кинетика накопления которых задается соответствующим эволюционным уравнением.

Система разрешающих уравнений теории упругости для пластины конечных размеров с усталостной трещиной с учетом поврежденности материала и в предположении малости массовых и инерционных сил принимает вид (1.3) и включает уравнения равновесия (а), уравнения совместности в напряжениях (б), граничные условия для прямоугольной пластины с центральной трещиной нормального отрыва (с), эволюционное уравнение для функции поврежденности (д) с начальными и граничными условиями, а также условия локального разрушения на фронте трещины (е).

Здесь  $(\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv}$ ,  $(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}$ ,  $(\tilde{\tau}_{yx})_{eqv}$  – компоненты тензора эквивалентных циклических напряжений в окрестности вершины усталостной трещины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\omega(x, n)$  – скалярный параметр поврежденности, зависящий от координаты по фронту распространяющейся трещины  $x$  и числа циклов нагружения  $n$ ;  $n_*$  – длительность инкубационной стадии;  $\ell_0$ ,  $\ell(n)$  – начальная и текущая длина усталостной трещины;  $\lambda(\ell_0)$ ,  $\lambda(\ell(n))$  – начальная и текущая длина циклической пластической зоны;  $(\Delta\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}$  – размах эквивалентных циклических напряжений;  $D, q$  – коэффициенты, характеризующие интенсивность накопления усталостных повреждений.

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \begin{cases} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv}}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\tau}_{yx})_{eqv}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xy})_{eqv}}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}}{\partial x} = 0; \end{cases} \\
(b) \quad & \frac{\partial^2(\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}}{\partial x^2} - \nu \left[ \frac{\partial^2(\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}}{\partial y^2} \right] = 2(1+\nu) \frac{\partial^2(\tilde{\tau}_{yx})_{eqv}}{\partial x \partial y}; \\
(c) \quad & \begin{cases} (\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv}(n) \cos(\nu, x) = 0; & x = \pm \frac{w}{2}; \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}; \\ (\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}(n) \cos(\nu, y) = \tilde{\sigma}_{eqv}(n); & y = \pm \frac{h}{2}; \quad -\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2}; \\ (\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}(n) \cos(\nu, y) = 0; & y = 0; \quad -\ell_0 \leq x \leq \ell_0; \quad 0 < n \leq n_*; \\ & y = 0; \quad -\ell(n) \leq x \leq \ell(n); \quad n > n_*; \end{cases} \quad (1.3) \\
(d) \quad & \begin{cases} \frac{\partial \omega(x, n)}{\partial n} = D \left[ \frac{(\Delta \tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}}{1 - \omega(x, n)} \right]^q; \\ \omega(x, n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0; \\ 1 & \text{при } n = n_*; \end{cases} \end{cases} \\
(e) \quad & \begin{cases} \max \{ \omega[\ell_0 + \lambda(\ell_0)] \} = 1; & 0 \leq n \leq n_*; \\ \max \{ \omega[\ell(n) + \lambda(\ell(n))] \} = 1; & n \geq n_*. \end{cases}
\end{aligned}$$

Амплитуды эквивалентных нормальных  $(\sigma_a)_{eqv}$  и касательных  $(\tau_a)_{eqv}$  циклических напряжений задаем соотношениями [5, 6]

$$\begin{aligned}
(\sigma_a)_{eqv} &= \left[ \cos \left[ \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-\eta} \sigma_a \cong \left[ 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right]^2 + \frac{1}{24} \left[ \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right]^4 \right]^{-\eta} \sigma_a; \\
(\tau_a)_{eqv} &= \left[ \cos \left[ \frac{\pi \tau_m}{2 \tau_B} \right] \right]^{-\xi} \tau_a \cong \left[ 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi \tau_m}{2 \tau_B} \right]^2 + \frac{1}{24} \left[ \frac{\pi \tau_m}{2 \tau_B} \right]^4 \right]^{-\xi} \tau_a,
\end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\sigma_B, \tau_B$  – пределы прочности материала пластин при растяжении и кручении;  $\eta, \xi$  – коэффициенты чувствительности материала пластин к асимметрии цикла напряжений при одноосном растяжении – сжатии и чистом кручении.

Длину циклической пластической зоны в вершине усталостной трещины нормального отрыва с учетом конечности размеров пластины задаем соотношениями [25 – 27]

$$\begin{aligned}
\lambda(\ell_0) &= \frac{1}{8} \left[ \frac{\pi (\sigma_a)_{eqv}}{2 \sigma_Y} f_0 \left( \frac{h}{w}; \frac{\ell_0}{w} \right) \right]^2 \ell_0; \\
\lambda(\ell(n)) &= \frac{1}{8} \left[ \frac{\pi (\sigma_a)_{eqv}}{2 \sigma_Y} f \left( \frac{h}{w}; \frac{\ell(n)}{w} \right) \right]^2 \ell(n),
\end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $f(\cdot)$  – корректирующие функции, учитывающие влияние граничных условий.

Соотношения (1.5) являются некоторым обобщением модели тонкой пластической зоны D.S.Dugdale [15] и J.R.Rice [30] на циклическое нагружение, что позволило учесть циклическую пластическую зону в полциклах разгрузки.

Принимаем далее, что геометрия усталостной трещины определяется только одним параметром – её длиной  $\ell$ , так что, текущая интенсивность роста трещины определяется приращением длины трещины за цикл или при сглаживании – скоростью роста трещины  $d\ell/dn$ .

Задача в итоге сведена к конкретизации функциональной зависимости вида

$$\frac{d\ell}{dn} = F(\sigma_m, \sigma_a, \ell(n), h, w, c_i), \quad (1.6)$$

куда входят компоненты асимметричного цикла напряжений  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$ , длина усталостной трещины  $\ell(n)$ , высота  $h$  и ширина  $w$  пластины, а также набор  $c_i (i = \overline{f, k})$  материальных констант и коэффициентов, задающих механические свойства материалов пластин.

## §2. Двухстадийная модель роста усталостных трещин.

Модель роста усталостных трещин построим на основе совместного решения задачи определения локального поля напряжений в окрестности вершины растущей трещины и задачи формулировки критерия роста усталостных трещин исходя из концепций механики непрерывной поврежденности.

2.1. *Распределение напряжений на фронте растущей усталостной трещины.* Выражения для компонент напряжений в окрестности фронта усталостной трещины определяем с использованием модифицированной функции напряжений Эри  $\Phi(x, y)$ , удовлетворяющей уравнениям равновесия (1.3, a) и совместности (1.3, b), а также граничным условиям (1.3, c).

Решение задачи сводим к интегрированию бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} \equiv \nabla^2 (\nabla^2 \Phi(x, y)) = 0, \quad (2.1)$$

функция  $\Phi(x, y)$  в котором удовлетворяет условию совместности (1.3, b), так что компоненты напряжений  $(\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv}$ ,  $(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}$ ,  $(\tilde{\tau}_{yx})_{eqv}$  связаны с функцией  $\Phi(x, y)$  соотношениями

$$(\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv} = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2}; \quad (\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv} = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2}; \quad (\tilde{\tau}_{xy})_{eqv} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.2)$$

при соблюдении граничных условий (1.3, c) на контурах пластины  $\Gamma_i$  ( $i = 0, 1$ ) с трещиной в виде

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \int_{\Gamma_1} (\tilde{X}_v)_{eqv} ds + c_1; \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \int_{\Gamma_1} (\tilde{Y}_v)_{eqv} ds + c_2. \quad (2.3)$$

Здесь  $(\tilde{X}_v)_{eqv}$ ,  $(\tilde{Y}_v)_{eqv}$  – компоненты вектора эквивалентных циклических напряжений по координатным осям  $x$  и  $y$  на внешнем контуре  $\Gamma_0$  пластины;  $s$  – длина произвольной дуги на внешнем контуре пластины;  $c_1, c_2$  – постоянные интегрирования. Контур внутренней трещины  $\Gamma_1$  свободен от нагрузок.

Переходя далее к комплексным переменным  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$ , уравнение совместности (2.1) принимает вид [25]

$$16 \frac{\partial^4 \Phi(z, \bar{z})}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0. \quad (2.4)$$

Решение (2.4) может быть представлено в виде модифицированной функции напряжений

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_{\Gamma_i} \bar{\Psi}(z) dz + \int_{\Gamma_i} \Omega(z) dz + (\bar{z} - z) \Omega(z) \right], \quad (2.5)$$

откуда для компонент напряжений с учетом (2.2) получены соотношения [25]

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv} + (\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv} &= 2 \left[ \chi(z) + \overline{\chi(\bar{z})} \right]; \\ (\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv} - (\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv} + 2i(\tilde{\tau}_{xy})_{eqv} &= 2 \left[ \bar{\varphi}(z) - \chi(z) + (\bar{z} - z) \chi'(z) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

удовлетворяющие граничным условиям на контуре пластины

$$\Psi(\bar{z}) + \Omega(z) + (z - \bar{z}) \overline{\Omega'(\bar{z})} = i \int_{\Gamma_i} (X_\nu + iY_\nu) ds. \quad (2.7)$$

В (2.5) – (2.7) приняты следующие обозначения:  $\operatorname{Re}$  – действительная часть;  $\Psi(z)$  и  $\Omega(z)$  – комплексные потенциалы, причем  $\Psi'(z) = \varphi(z)$  и  $\Omega'(z) = \chi(z)$ . Штрихами обозначено дифференцирование, а рисками – комплексные сопряжения. Вид комплексных потенциалов выбирается таким образом, чтобы граничным условиям на берегах трещины они удовлетворяли точно, а на внешней границе – в точках коллокаций.

Комплексные потенциалы  $\varphi(z)$  и  $\chi(z)$  в (2.6) задаем в окрестности вершины трещины соотношениями

$$\varphi(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - \ell^2}} \sum_{k=0}^m A_k z^{2k} - \sum_{k=0}^m B_k z^{2k}; \quad \chi(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - \ell^2}} \sum_{k=0}^m A_k z^{2k} + \sum_{k=0}^m B_k z^{2k}, \quad (2.8)$$

где  $A_k$  и  $B_k$  – коэффициенты рядов, определяемые численно из решения замкнутой системы линейных алгебраических уравнений при удовлетворении граничным условиям в точках коллокаций на внешнем контуре пластины и условиям однозначности смещений при обходе трещины. Представление решения с использованием (2.8) обеспечивает отсутствие напряжений на берегах трещины.

Коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  в (2.8) определяем из замкнутой системы алгебраических уравнений при удовлетворении граничным условиям (1.3, с) и дополнительным условиям однозначности смещений при обходе контура трещины в виде

$$k \oint_{\Gamma_i} \chi(z) dz - \oint_{\Gamma_i} \varphi(\bar{z}) d\bar{z} = 0, \quad (2.9)$$

где  $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  – для плоского напряженного состояния,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для эквивалентных циклических напряжений нормального отрыва  $(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}$  по фронту ( $y = 0$ ;  $z = x$ ) движения контура усталостной трещины длиной  $\ell$  из (2.6) получаем уравнение

$$(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}(x, n) = \frac{(\tilde{\sigma})_{eqv} x}{\sqrt{x^2 - \ell_i^2}} \left( 1 + \sum_{k=1}^m A_k x^{2k} \right); \quad (i = 1, q) \quad (2.10)$$

или, используя асимптотически эквивалентную функцию, уравнение

$$(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}(x, n) = \frac{(\tilde{\sigma})_{eqv}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ell_i}{x - \ell_i}} \left( 1 + \sum_{k=1}^m A_k x^{2k} \right), \quad (2.11)$$

где, как отмечено выше, принято, что по фронту ( $y = 0$ ) распространения усталостной трещины  $(\tilde{\sigma}_{xx})_{eqv} = (\tilde{\tau}_{xy})_{eqv} = 0$ .

Для усталостной трещины произвольной длины  $\ell(n)$ , зависящей от числа циклов нагружения  $n$ , для  $(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}(x, n)$ , исходя из (2.11), получаем

$$(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}(x, n) = \frac{\tilde{\sigma}_{eqv}(n)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ell(n)}{x - \ell(n)}} f\left(\frac{h}{w}, \frac{\ell(n)}{w}\right), \quad (2.12)$$

где  $f(\cdot)$  – корректирующая функция, учитывающая влияние граничных условий и представляющая аппроксимацию множества  $k$  численных решений [9, 31] для трещин дискретной длины  $\ell_0 \leq \ell_i \leq \ell$ .

Распределение напряжений вдоль фронта распространения усталостной трещины по оси  $0x$  ( $y=0, z=x$ ) в течение инкубационного периода ( $0 \leq n \leq n_*$ ) принимает вид

$$(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}(x, n) = \begin{cases} 0; & |x| < \ell_0; \\ [-\sigma_y, +\sigma_y]; & |x| = \ell_0 + \lambda(\ell_0); \\ \frac{\tilde{\sigma}_{eqv}(n)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ell_0}{x - \ell_0}} f_0\left(\frac{h}{w}, \frac{\ell_0}{w}\right); & |x| = \ell_0 > \lambda(\ell_0), \end{cases} \quad (2.13)$$

а на стадии распространения трещины, соответственно, вид

$$(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv}(x, n) = \begin{cases} 0; & |x| < \ell(n); \\ [-\sigma_y, +\sigma_y]; & |x| = \ell(n) + \lambda(\ell(n)); \\ \frac{\tilde{\sigma}_{eqv}(n)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ell(n)}{x - \ell(n)}} f\left(\frac{h}{w}, \frac{\ell(n)}{w}\right); & |x| > \ell(n) + \lambda(\ell(n)). \end{cases} \quad (2.14)$$

В соотношениях (2.10) – (2.14) в качестве  $\tilde{\sigma}_{eqv}(n)$  рассматриваем амплитудное значение эквивалентного циклического напряжения, которое сводит, согласно (1.2) и (1.4), компоненты асимметричного цикла напряжений (1.1), приложенных к внешней контуре пластины, к симметричному циклу.

2.2. *Основные разрешающие уравнения модели.* Принимаем, что в тонкой изотропной пластине усталостная трещина нормального отрыва под действием одноосных циклических напряжений, приложенных в направлении оси  $y$ , распространяется вдоль оси  $x$  (рис. 2). Процесс усталостного разрушения пластины с растущей трещиной состоит из 2-х стадий и включает инкубационную стадию, когда усталостная трещина раскрывается, но не растет, и собственно стадию роста трещины.

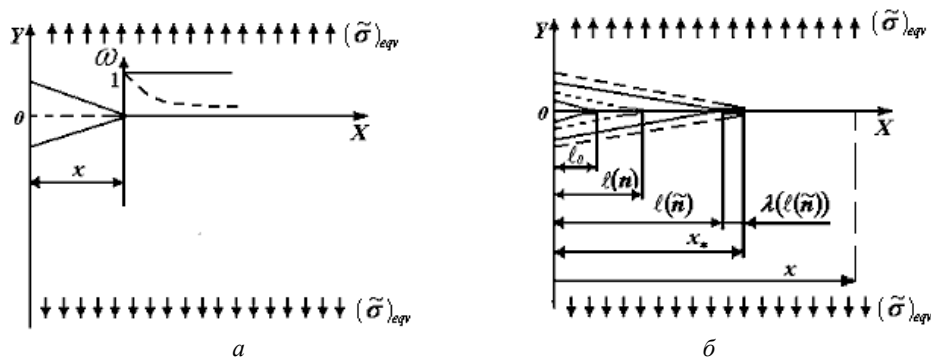


Рис. 2

В качестве «движущей силы» для растущей усталостной трещины рассматриваем процесс накопления усталостных макроповреждений. Модель накопления повреждений основана на введении единой для обеих стадий скалярной меры поврежденности  $\omega(x, n)$ , являющейся функцией координаты  $x$  и числа циклов нагружения  $n$ . Кинетику накопления усталостных повреждений в направлении оси  $x$  задаем дифференциальным уравнением (1.3,  $d$ ), которое, исходя из предположения, что процесс накопления усталостных повреждений определяем размахом напряжений отрыва  $\Delta(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv} = (\sigma_{max})_{eqv} - (\sigma_{min})_{eqv}$  и происходит только в полувциклах растяжения ( $(\sigma_{min})_{eqv} = 0$ ), так что  $\Delta(\tilde{\sigma}_{yy})_{eqv} = (\sigma_{yy})_{a,eqv}$  можно также представить в виде

$$\frac{d\omega(x, n)}{dn} = D \left[ \frac{(\sigma_{yy})_{a,eqv}}{1 - \omega(x, n)} \right]^q \quad (2.15)$$

с начальными и граничными условиями

$$\omega(x_*, n) = \begin{cases} 0; & \forall x; & n = 0; \\ 1; & x = \ell(0) + \lambda(\ell(0)); & n = n_*; \\ 1; & x = \ell(n) + \lambda(\ell(n)); & n = n_R, \end{cases} \quad (2.16)$$

причем первое условие в (2.16) является начальным условием, второе условие определяет длительность инкубационной стадии, а третье задает условие локального разрушения на фронте трещины.

Принимаем далее, что приращение длины усталостной трещины  $\Delta\ell$  за один цикл нагружения является весьма малым, а число циклов нагружения  $n$  – весьма большим. Технически значимое приращение длины усталостной трещины на 1 мм, например, требует  $10^3$  и более циклов нагружения, а число циклов до разрушения составляет  $10^5$  циклов и более. В этом случае число циклов нагружения  $n$  трактуется как непрерывный аргумент, аналогичный физическому времени  $t$ , а длина усталостной трещины  $\ell$  – как непрерывно дифференцируемая функция непрерывного аргумента  $n$ .

Интегрируя уравнение (2.15) с учетом начального условия в (2.16), получаем уравнение

$$1 - [1 - \omega(x, n)]^{1+q} = (1+q)D \int_0^n [(\sigma_{yy})_{a,eqv}(x, \tau)]^q d\tau, \quad (2.17)$$

которое задает уровень поврежденности  $\omega(x, n)$  в точке с координатой  $x$  в произвольный момент времени  $n$ . Кинетика накопления повреждений по фронту движения трещины, задаваемая уравнением (2.17), показана на рис. 2,  $a$  штриховой линией.

Обозначив координату фронта разрушения через  $x_*$  (рис. 2,  $b$ ), страгивание трещины зададим условием  $\omega = 1$  в точке с координатой  $x_* = \ell(0) + \lambda(\ell(0))$  в момент времени  $n = n_*$ . Последующее распространение усталостной трещины происходит при условии  $\omega = 1$  в точке с координатой  $x_* = \ell(n) + \lambda(\ell(n))$ . В этом случае, учитывая двухстадийность процесса усталостного разрушения, из (2.17) получаем уравнение движения фронта разрушения в точке с координатой  $x_*$  в момент времени  $n$  в виде

$$\int_0^1 [1 - \omega(x_*, n)]^q d\omega = (1+q)D \left\{ \int_0^{n_*} [(\sigma_{yy})_{a,eqv}(x_*, \tau)]^q d\tau + \int_{n_*}^n [(\sigma_{yy})_{a,eqv}(x_*, \tau)]^q d\tau \right\}, \quad (2.18)$$

объединяющем длительность инкубационной стадии и стадии роста усталостной трещины.



Подставляя далее (2.13) и (2.14) в (2.18), получаем уравнение движения фронта усталостного разрушения в форме нелинейного интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\begin{aligned} 1 - (1+q)D \left[ \frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_0^{n_s} \left[ \frac{\ell_0}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} f_0^q \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell_0}{w} \right) d\tau = \\ = (1+q)D \left[ \frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_{n_s}^n \left[ \frac{\ell(\tau)}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell(\tau)} \right]^{\frac{q}{2}} f^q \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell(\tau)}{w} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где функции  $f(\cdot)$  зависят от текущего момента времени  $n$ .

Для решения интегрального уравнения (2.19) выполним ряд преобразований и, прежде всего, задавая линейный закон изменения циклической пластической зоны, представим уравнение (2.19) в виде

$$\begin{aligned} 1 - (1+q)D \left[ \frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_0^{n_s} \left[ \frac{\ell_0}{(1+\mu)\ell(n) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} f_0^q \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell_0}{w} \right) d\tau = \\ = (1+q)D \left[ \frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_{n_s}^n \left[ \frac{\ell(\tau)}{(1+\mu)\ell(n) - \ell(\tau)} \right]^{\frac{q}{2}} f^q \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell(\tau)}{w} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где принято  $\lambda(\ell(n)) = \mu\ell(n)$ .

Упростим структуру уравнения (2.20), сделав переход от размерных величин к безразмерным. Используя замены

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{n}{n_R}; \quad \alpha_* = \frac{n_s}{n_R}; \quad \alpha_1 = \frac{\tau}{n_R}; \quad \sigma = \frac{(\sigma_{yy})_{a,eqv}}{(\sigma_a)_{eqv}}; \quad \delta = \frac{\ell}{\ell_0}; \quad \nu = \frac{q}{2}; \\ J_* = J(\alpha_*) = f_0^q \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell(\alpha_*)}{w} \right); \quad J(\alpha_1) = f^q \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell(\alpha_1)}{w} \right); \quad n_R = \frac{1}{(1+q)D(\sigma_a)_{eqv}}, \end{aligned}$$

представим уравнение (2.20) в виде

$$1 - 2^{-\nu} \alpha_* J_* \int_0^{\alpha_*} \left[ \frac{1}{(1+\mu)\delta(\alpha) - 1} \right]^\nu d\alpha_1 = 2^{-\nu} \int_{\alpha_*}^{\alpha} \left[ \frac{\delta(\alpha_1)}{\delta(\alpha)(1+\mu) - \delta(\alpha_1)} \right]^\nu J(\alpha_1) d\alpha_1. \quad (2.21)$$

Здесь  $n_R$  – число циклов до разрушения гладкого цилиндрического образца.

Обозначая в (2.21)  $\delta(\alpha) = z$ ,  $\delta(\alpha_1) = \xi$ ,  $d\alpha_1 = \varphi'(\xi)d\xi$ ,  $J(\alpha_1)d\alpha_1 = \tilde{\varphi}'(\xi)d\xi$ , получаем в результате линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$1 - 2^{-\nu} \alpha_* J_* [z(1+\mu) - 1]^{-\nu} = 2^{-\nu} \int_1^z \left[ \frac{\xi}{z(1+\mu) - \xi} \right]^\nu \tilde{\varphi}'(\xi) d\xi \quad (2.22)$$

с разностным ядром относительно функции  $\xi^\nu \tilde{\varphi}'(\xi)$ . Заметим также, что при  $z=1$  левая часть уравнения (2.22) равняется нулю, так что  $\alpha_* J_* = (2\mu)^\nu$ .

Уравнение (2.22) решается с использованием преобразования Лапласа [8]  $\Phi(p) = \int_0^{+\infty} f(z) e^{-pz} dz$  и переходом, соответственно, от уравнения в оригиналах к уравнению в изображениях. Левую и правую части уравнения (2.22) рассмотрим отдельно.

Левая часть уравнения (2.22) в изображениях принимает вид

$$\int_0^{+\infty} \left[ 1 - 2^{-\nu} \alpha_* J_* [z(1+\mu) - 1]^{-\nu} \right] e^{-pz} dz = \frac{1}{p} - 2^{-\nu} \alpha_* J_* e^{-\frac{p}{1+\mu}} \frac{1}{1+\mu} \left[ \frac{1+\mu}{p} \right]^{-\nu+1} \int_{\frac{-p}{1+\mu}}^{+\infty} x^{-\nu} e^{-x} dx. \quad (2.23)$$

Далее, используя неполную Гамма-функцию  $\Gamma(1-\nu, q) = \int_q^{\infty} t^{-\nu} e^{-t} dt$ , сводим (2.23)

к выражению

$$\frac{1}{p} - 2^{-\nu} \alpha_* J_* e^{-\frac{p}{1+\mu}} \frac{1}{1+\mu} \left[ \frac{1+\mu}{p} \right]^{1-\nu} \Gamma\left(1-\nu, -\frac{p}{1+\mu}\right). \quad (2.24)$$

Для правой части уравнения (2.22) изменим пределы интегрирования таким образом, чтобы нижний предел интегрирования был равен нулю. Используя замену переменных интегрирования, правую часть уравнения (2.22) сводим последовательно к выражению

$$2^{-\nu} \int_1^z \left[ \frac{\xi}{z(1+\mu) - 1} \right]^{\nu} \tilde{\varphi}'(\xi) d\xi = 2^{-\nu} \int_0^{z-1} \left[ \frac{\tau+1}{z(1+\mu) - (\tau+1)} \right]^{\nu} \tilde{\varphi}'(\tau+1) d\tau. \quad (2.25)$$

В изображениях (2.25) принимает вид

$$2^{-\nu} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{z-1} \left[ \frac{\tau+1}{z(1+\mu) - (\tau+1)} \right]^{\nu} \tilde{\varphi}'(\tau+1) d\tau \right] e^{-pz} dz, \quad (2.26)$$

изменяя в (2.26) с помощью формулы Дирихле  $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$  порядок интегрирования, для правой части уравнения (2.22) получаем выражение

$$\begin{aligned} & 2^{-\nu} \int_0^{\infty} (\tau+1)^{\nu} \tilde{\varphi}'(\tau+1) e^{-p(\tau+1)} \left[ \int_{\mu(\tau+1)}^{\infty} x^{-\nu} e^{-\frac{p(x-\mu(\tau+1))}{1+\mu}} \frac{1}{1+\mu} dx \right] d\tau = \\ & = 2^{-\nu} \int_0^{\infty} (\tau+1)^{\nu} \tilde{\varphi}'(\tau+1) e^{-p(\tau+1)} \left[ e^{\frac{p\mu(\tau+1)}{1+\mu}} \frac{1}{1+\mu} \left[ \frac{1+\mu}{p} \right]^{1-\nu} \Gamma\left(1-\nu, \frac{p\mu(\tau+1)}{1+\mu}\right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Подставляя в (2.22) выражение (2.24) для левой части и выражение (2.27) для правой части, уравнение (2.22) в изображениях записываем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} - 2^{-\nu} \alpha_* J_* e^{-\frac{p}{1+\mu}} \left[ \frac{1+\mu}{p} \right]^{1-\nu} \frac{1}{1+\mu} \Gamma\left(1-\nu, -\frac{p}{1+\mu}\right) = \\ & = 2^{-\nu} \int_0^{\infty} (\tau+1)^{\nu} \tilde{\varphi}'(\tau+1) e^{-p(\tau+1)} \left[ e^{\frac{p\mu(\tau+1)}{1+\mu}} \frac{1}{1+\mu} \left[ \frac{1+\mu}{p} \right]^{1-\nu} \Gamma\left(1-\nu, \frac{p\mu(\tau+1)}{1+\mu}\right) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где все обозначения совпадают с принятыми выше.

Решение уравнения (2.28) строится следующим образом.

Аппроксимацию неполных Гамма-функций  $\Gamma(\cdot)$  в (2.28) осуществим с использованием неравенств [24], так что

$$\Gamma\left(1-\nu, -\frac{p}{1+\mu}\right) \geq \left(-\frac{p}{1+\mu}\right)^{-\nu} e^{\frac{p}{1+\mu}} \left(\frac{-p}{\nu}\right); \quad (2.29)$$

$$\Gamma\left(1-\nu, \frac{p\mu(1+\tau)}{1+\mu}\right) \geq \left(\frac{p\mu(1+\tau)}{1+\mu}\right)^{-\nu} e^{-\frac{p\mu(1+\tau)}{1+\mu}} \frac{p\mu(1+\tau)}{\nu}. \quad (2.30)$$

Для левой части уравнения (2.28), используя (2.29), после ряда преобразований получаем выражение

$$\frac{1}{p} - 2^{-\nu} \alpha_* J_* e^{-\frac{p}{1+\mu}} \left[\frac{1+\mu}{p}\right]^{-\nu+1} \left(-\frac{p}{1+\mu}\right)^{-\nu} e^{\frac{p}{1+\mu}} \left(-\frac{p}{\nu}\right) = \frac{1}{p} - 2^{-\nu} \alpha_* J_* \frac{1}{\nu}, \quad (2.31)$$

а для правой части уравнения (2.28), используя (2.30), – выражение

$$\begin{aligned} 2^{-\nu} \int_0^{\infty} (\tau+1)^{\nu} \tilde{\varphi}'(\tau+1) e^{-p(\tau+1)} \left[\frac{1}{1+\mu} \left[\frac{1+\mu}{p}\right]^{1-\nu} \left(\frac{p\mu(1+\tau)}{1+\mu}\right)^{-\nu} p\mu(1+\tau)\nu^{-1}\right] d\tau = \\ = 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \int_0^{\infty} (\tau+1) \tilde{\varphi}'(\tau+1) e^{-p(\tau+1)} d\tau = 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \Phi(p), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где  $\Phi(p)$  – изображение неизвестной функции  $(1+\tau)\tilde{\varphi}'(\tau+1)$ .

Подставляя (2.31) и (2.32) в (2.28) и выполняя несложные преобразования, получаем уравнение

$$p^{-1} - 2^{-\nu} \alpha_* J_* \nu^{-1} = 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \Phi(p), \quad (2.33)$$

приближенное решение которого для изображения неизвестной функции  $(1+\tau)\tilde{\varphi}'(\tau+1)$  принимает вид

$$\Phi(p) = 2^{\nu} [\mu]^{\nu-1} \nu p^{-1}. \quad (2.34)$$

Возвращаясь к оригиналам, решение уравнения (2.34) представим в виде

$$z\tilde{\varphi}'(z) = 2^{\nu} [\mu]^{\nu-1} \Rightarrow \tilde{\varphi}'(z) = 2^{\nu} [\mu]^{\nu-1} z^{-1}, \quad (2.35)$$

сделаем далее обратный переход от  $z \rightarrow \delta(\alpha)$  используя замены

$$\tilde{\varphi}'(z) = \tilde{\varphi}'(\delta(\alpha)) = J(\alpha) \frac{d\alpha}{d\delta(\alpha)},$$

и получим из (2.35) уравнение

$$J(\alpha) \frac{d\alpha}{d\delta(\alpha)} = 2^{\nu} [\mu]^{\nu-1} \nu (\delta(\alpha))^{-1} \Rightarrow \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} = J(\alpha) 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \delta(\alpha). \quad (2.36)$$

Переходя от безразмерных величин к размерным из (2.36) получаем уравнение

$$\frac{d\ell}{dn} = \frac{\ell}{n_R} 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} f^q \left(\frac{h}{w}, \frac{\ell}{w}\right), \quad (2.37)$$

а учитывая, что

$$\nu = \frac{q}{2}; \quad n_R = \frac{1}{(1+q)D(\sigma_a)_{eq\nu}^q}; \quad \mu = \frac{\lambda(n)}{\ell(n)},$$

из (2.37) получаем дифференциальное уравнение для скорости роста усталостной трещины

$$\frac{d\ell}{dn} = D \left(1 + \frac{1}{q}\right) \left[(\sigma_a)_{eq\nu} \sqrt{\ell}\right]^q (2\lambda(\ell))^{1-\frac{q}{2}} f^q \left(\frac{h}{w}, \frac{\ell}{w}\right), \quad (2.38)$$

а, полагая  $n = n_*$  из (2.19), получаем уравнение для расчета длительности инкубационной стадии

$$n_* = \left[ (1+q)D [(\sigma_a)_{eqv}]^q \left[ \frac{\ell_0}{2\lambda(\ell_0)} \right]^{\frac{q}{2}} f_0^{-q} \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell_0}{w} \right) \right]^{-1}. \quad (2.39)$$

Объединяя далее уравнения (2.38) и (2.39), двухстадийная модель роста усталостных трещин в тонких изотропных пластинах конечных размеров при одноосном асимметричном растяжении – сжатии может быть представлена системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q}\right) D \frac{1}{[2\lambda(\ell(n))]^{\frac{q}{2}-1}} \left( (\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\ell} f \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell(n)}{w} \right) \right)^q; \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left[ \frac{1}{(\sigma_a)_{eqv}} \right]^q \left[ \frac{2\lambda(\ell_0)}{\ell_0} \right]^{q/2} f_0^{-q} \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell_0}{w} \right), \end{cases} \quad (2.40)$$

подставляя в (2.40) выражение для эквивалентных нормальных напряжений из (1.4) и выражения для длин циклической пластической зоны (1.5) и выражение для функции  $f(\cdot)$  в форме полинома четвертой степени, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = D \left(1 + \frac{1}{q}\right) \left( \frac{4\sigma_y}{\pi} \right)^{q-2} \left[ \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right)^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right)^4 \right]^{-\eta} \sigma_a f \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell}{w} \right) \right]^2; \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D \left[ \frac{4\sigma_y}{\pi} \right]^q}; \\ f \left( \frac{h}{w}, \frac{\ell(n)}{w} \right) = A_0 - A_1 \frac{2\ell(n)}{w} + A_2 \left( \frac{2\ell(n)}{w} \right)^2 - A_3 \left( \frac{2\ell(n)}{w} \right)^3 + A_4 \left( \frac{2\ell(n)}{w} \right)^4, \end{cases} \quad (2.41)$$

где первые уравнения задают кинетику роста усталостных трещин, а вторые – длительность инкубационной стадии. Таким образом, функциональная зависимость (1.6) конкретизирована в виде (2.41).

*2.3. Методика определения функций и констант модели.* Двухстадийная модель распространения усталостных трещин в тонких изотропных пластинах конечных размеров, изложенная в разделе 2.2, содержит две группы материальных констант, подлежащих определению из эксперимента, а также корректирующую функцию  $f(\cdot)$ , учитывающую влияние конечности размеров пластины.

*Первая группа* материальных констант включает значения предела текучести  $\sigma_y$  и предела кратковременной прочности  $\sigma_B$ . Значения пределов  $\sigma_y$  и  $\sigma_B$  определяем по диаграмме растяжения « $\sigma - \varepsilon$ », которая строится по результатам стандартных испытаний гладких цилиндрических образцов материала на кратковременную прочность.

*Вторая группа* материальных констант включает значения коэффициентов  $D$  и  $q$  и значения показателя степени  $\eta$ . Коэффициенты  $D$  и  $q$  характеризуют сопротивление материала усталостному разрушению и их определяем по результатам стандартных испытаний гладких цилиндрических образцов материала на усталость при симметричном цикле нагружения. Данные экспериментов аппроксимируем уравнением

$$n_R = \frac{1}{(1+q)D(\sigma_a)^q}, \quad (2.42)$$

полученным интегрированием эволюционного уравнения поврежденности (1.3,d) при условии, что  $(\Delta\sigma_{yy})_{eqv} = \sigma_a$ , а  $n_* = n_R$ . Задача определения коэффициентов  $D$  и  $q$  в (2.42) сведена в итоге к минимизации функционала

$$\Phi(D, q) = \sum_{j=1}^s \left\{ n_{Rj}(\sigma_{aj}) - [(1+q)D(\sigma_{aj})^q]^{-1} \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (2.43)$$

где  $\sigma_{aj}$ ,  $n_{Rj}$  – набор дискретных значений амплитуд циклических напряжений и соответствующих им чисел циклов до разрушения.

Показатель степени  $\eta$  характеризует чувствительность материала к уровню асимметрии цикла напряжений и его определяем по результатам обработки данных стандартных испытаний гладких цилиндрических образцов на усталость при различных значениях среднего напряжения  $\sigma_m$ . Задача определения величины  $\eta$  сведена к минимизации функционала [5, 16]

$$\Phi \left[ \psi \left[ \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right], \eta \right] = \sum_{i=1}^k \left\{ \psi \left[ \frac{\sigma_{mi}}{\sigma_B} \right] - \left[ \frac{\sigma_{ai}}{\sigma_n} \right] \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (2.44)$$

который соответствует условию наилучшего согласования экспериментальных данных с линеаризованной предельной диаграммой. Здесь функцию  $\psi(\cdot)$  выбираем в форме, приведенной в (1.4).

Для определения показателя степени  $\eta$  может быть использован также единственный базовый эксперимент на усталость гладких цилиндрических образцов при отнулевом цикле ( $\sigma_m = \sigma_a$ ). В этом случае величину  $\eta$  определяем из соотношения [5, 7]

$$\eta = \frac{\lg \sigma_a^0 - \lg \sigma_n^0}{\lg \left( \cos \frac{\pi \sigma_m^0}{2 \sigma_B} \right)}, \quad (2.45)$$

где  $\sigma_a^0$ ,  $\sigma_m^0$  – амплитуда циклического напряжения и, соответственно, среднее напряжение отнулевого асимметричного цикла;  $\sigma_n^0$  – ограниченный предел усталости при симметричном цикле, соответствующий долговечности  $n_R^0$  под действием напряжений  $\sigma_m^0$  и  $\sigma_a^0$ .

Корректирующие функции  $f_0(\cdot)$  и  $f(\cdot)$ , учитывающие влияние конечности размеров пластины на кинетику распространения усталостных трещин, задаем полиномами четвертой степени. В этом случае корректирующую функцию для инкубационной стадии записываем в виде

$$f_0 \left( \frac{h}{w}; \frac{\ell_0}{w} \right) = A_0 + A_1 \frac{\ell_0}{w} + A_2 \left( \frac{\ell_0}{w} \right)^2 + A_3 \left( \frac{\ell_0}{w} \right)^3 + A_4 \left( \frac{\ell_0}{w} \right)^4, \quad (2.46)$$

а для стадии распространения усталостной трещины – в виде

$$f \left( \frac{h}{w}; \frac{\ell(n)}{w} \right) = A_0 + A_1 \frac{\ell(n)}{w} + A_2 \left( \frac{\ell(n)}{w} \right)^2 + A_3 \left( \frac{\ell(n)}{w} \right)^3 + A_4 \left( \frac{\ell(n)}{w} \right)^4. \quad (2.47)$$

Здесь  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  – коэффициенты полиномов, зависящие от соотношения между высотой  $h$  и шириной  $w$  пластины, а также от соотношения между длиной трещины  $\ell$  и шириной пластины  $w$ .

Значения коэффициентов полиномов в (2.46) и (2.47) определяем по результатам аппроксимации полиномами численных решений задачи о напряженном состоянии пластины конечных размеров с трещиной нормального отрыва при одноосном растяжении. Численные решения построены методом граничных коллокаций [9, 31].

### §3. Кинетика роста усталостных трещин в пластинах конечных размеров при одноосном растяжении-сжатии.

Получим решение задачи расчета кинетики роста усталостных трещин в тонких изотропных пластинах конечных размеров при одноосном циклическом растяжении – сжатии. Кинетику роста усталостных трещин задаем в форме зависимости длины усталостной трещины от числа циклов нагружения. Рассмотрены симметричный цикл, асимметричный знакопеременный цикл, асимметричный отнулевой цикл и асимметричный знакопостоянный цикл.

3.1 *Объект исследования. Материальные константы.* В качестве объекта исследования рассматриваем тонкие изотропные пластины конечных размеров, содержащие центральную остроконечную трещину. На рис. 3 представлены геометрия и условия нагружения пластины с трещиной (а), дискретные значения множества численных

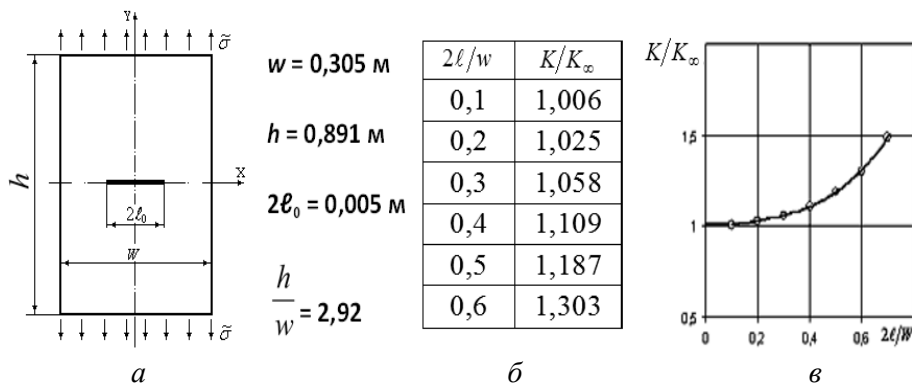


Рис. 3

решений задачи о распределении напряжений отрыва в вершине растущей усталостной трещины (б) и аппроксимация численных решений (в). Численные решения заимствованы из [9]. Аппроксимация численных решений осуществлена полиномами четвертой степени (2.46) и (2.47). В этом случае корректирующую функцию  $f(\cdot)$  запишем в виде

$$f\left(\frac{h}{w}, \frac{\ell}{w}\right) = 1,0106 - 0,1996\left(\frac{2\ell}{w}\right) + 1,829\left(\frac{2\ell}{w}\right)^2 - 3,068\left(\frac{2\ell}{w}\right)^3 + 3,2197\left(\frac{2\ell}{w}\right)^4, \quad (3.1)$$

где под  $\ell$  понимается как начальная  $\ell_0$ , так и текущая  $\ell(n)$  полудлина усталостной трещины.

В качестве материала пластин выбраны алюминиевые сплавы 2024-T3 и 7075-T6, используемые в авиационной и космической технике. Материальные константы определяем по экспериментальным диаграммам растяжения и экспериментальным кривым усталости, которые построены по результатам стандартных испытаний гладких цилиндрических образцов.

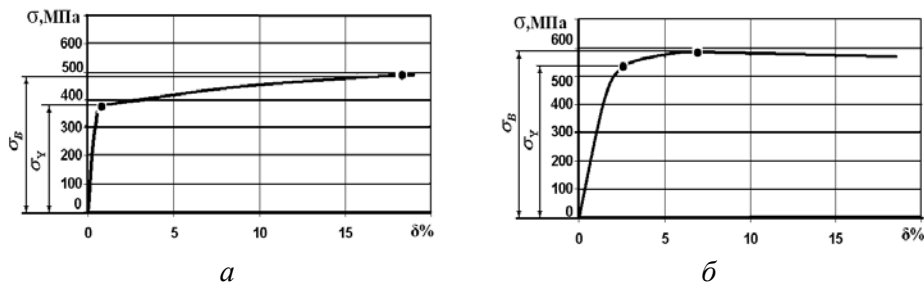


Рис. 4

Экспериментальные диаграммы растяжения для образцов алюминиевого сплава 2024-Т3 приведены на рис. 4, а, а для образцов алюминиевого сплава 7075-Т6 – на рис. 4, б. Точками отмечены уровни напряжений, соответствующие пределам текучести  $\sigma_y$  и пределам кратковременной прочности  $\sigma_B$ . Экспериментальные данные заимствованы из [14, 23].

Экспериментальные кривые усталости, полученные при одноосном симметричном растяжении-сжатии, приведены для образцов алюминиевого сплава 2024-Т3 на рис. 5,а, а для образцов алюминиевого сплава и 7075-Т6 – на рис. 5,б. Исходные экспериментальные данные нанесены точками, а линиями нанесена аппроксимация экспериментальных данных уравнением (2.42). Экспериментальные данные заимствованы из [21]. По результатам аппроксимации путем минимизации функционала (2.43) определяются значения коэффициентов  $D$  и  $q$ .

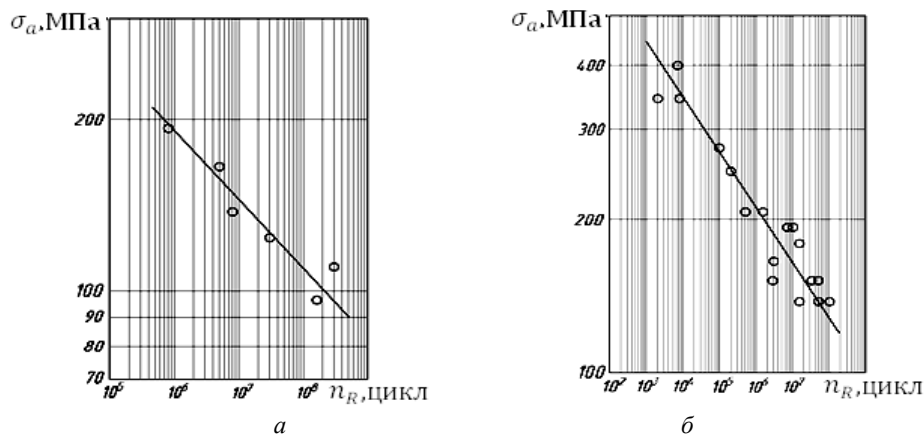


Рис. 5

На рис. 6 представлены диаграммы предельных напряжений образцов алюминиевых сплавов 2024-Т3 (а) и 7075-Т6 (б) в обобщенной системе координат. Диаграммы построены по данным испытаний на усталость гладких цилиндрических образцов при варьировании величины среднего напряжения  $\sigma_m$  асимметричного цикла нагружения одноосным растяжением – сжатием. Точками показаны нормированные экспериментальные данные, а линиями – аппроксимация нормированных экспериментальных данных уравнением (1.4) при условии, что  $(\sigma_a)_{eqv} = \sigma_n$ . По результатам аппроксимации путем минимизации функционала (2.44) определяем значения показателя степени  $\eta$ .

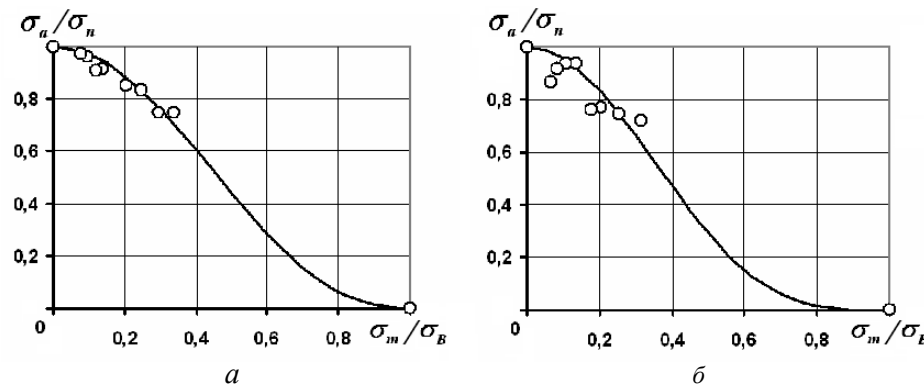


Рис. 6

В таблице для рассматриваемых алюминиевых сплавов приведены значения пределов текучести  $\sigma_Y$  и кратковременной прочности  $\sigma_B$ , значения коэффициентов  $D$  и  $q$  и значения показателя степени  $\eta$ . Значения всех материальных констант определены по результатам обработки экспериментальных данных, приведенных на рис. 4 – 6, по методике, изложенной в пункте 2.3.

Сплав	$\sigma_Y$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$D$ , (МПа <sup>q</sup> ·цикл) <sup>-1</sup>	$q$	$\eta$
2024-T3	353	489	$7,45 \cdot 10^{-26}$	8,28	2,37
7075-T6	523	571	$3,33 \cdot 10^{-29}$	9,23	3,57

3.2 *Симметричный цикл.* Решим задачу расчета зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  в тонких пластинах конечных размеров из алюминиевых сплавов при одноосном симметричном растяжении – сжатии. Условие нагружения (1.1) конкретизируется в этом случае в виде

$$\tilde{\sigma} = \sigma_a \sin(2\pi n); \sigma_m = 0; \sigma_{\min} = -\sigma_a < 0; \sigma_{\max} = \sigma_a > 0; R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1, \quad (3.2)$$

где  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$  – минимальное и максимальное напряжение в цикле ( $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$ ;  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ );  $R$  – коэффициент асимметрии.

Для зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  из (2.41) с учетом (3.1) и (3.2) получаем систему разрешающих уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} n &= n_* + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{q-2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{q}\right) D (\sigma_Y)^{q-2}} \int_{\ell_0}^{\ell(n)} \frac{1}{\left(\sigma_a f\left(\frac{h}{w}, \frac{\ell(n)}{w}\right)\right)^2} d\ell; \\ n_* &= \frac{1}{(1+q)D \left[\frac{4\sigma_Y}{\pi}\right]^q}; \\ f\left(\frac{h}{w}, \frac{\ell}{w}\right) &= 1,0106 - 0,1996 \left(\frac{2\ell}{w}\right) + 1,829 \left(\frac{2\ell}{w}\right)^2 - 3,068 \left(\frac{2\ell}{w}\right)^3 + 3,2197 \left(\frac{2\ell}{w}\right)^4, \end{aligned} \right. \quad (3.3)$$

интеграл в которой вычисляем численно по методу Симпсона.

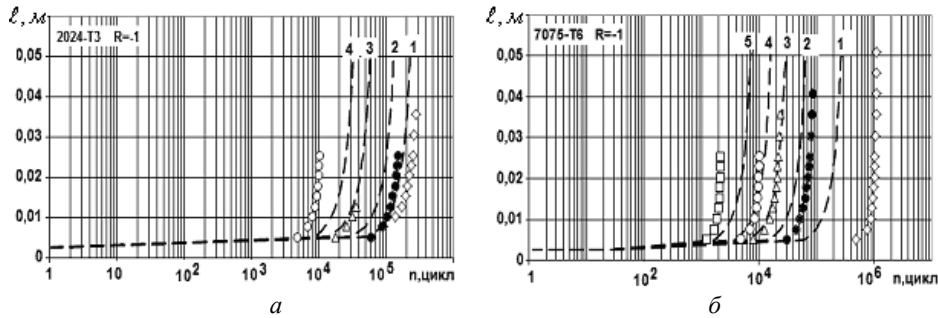


Рис. 7

Результаты расчетов зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  при варьировании величины амплитуды  $\sigma_a$ , выполненных по уравнению (3.3), сопоставлены на рис. 7 с экспериментальными данными для пластин из алюминиевых сплавов 2024-T3 (а) и 7075-T6 (б). Для пластин из алюминиевого сплава 2024-T3 зависимости  $\ell$  от  $n$  построены при  $\sigma_a = 52$  МПа (линия 1,  $\diamond$ );  $\sigma_a = 69$  МПа



(линия 2, ●);  $\sigma_a = 103$  МПа (линия 3, Δ);  $\sigma_a = 138$  МПа (линия 4, ○). Для пластин из алюминиевого сплава 7075-T6 аналогичные зависимости получены при напряжениях  $\sigma_a = 34$  МПа (линия 1, ◇);  $\sigma_a = 69$  МПа (линия 2, ●);  $\sigma_a = 103$  МПа (линия 3, Δ);  $\sigma_a = 138$  МПа (линия 4, ○);  $\sigma_a = 207$  МПа (линия 5, □). Экспериментальные данные заимствованы из [22]. Здесь и далее экспериментальные данные нанесены точками, а результаты расчетов – линиями. Расчеты выполнены с использованием значений материальных констант, приведенных в таблице.

**3.3 Асимметричный знакопеременный цикл.** Решим задачу расчета зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  в тонких пластинах конечных размеров из алюминиевых сплавов при одноосном знакопеременном комбинированном статическом и циклическом нагружении. Условие нагружения (1.1) конкретизируется в этом случае в виде

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi n); \quad \sigma_m > 0; \quad \sigma_{\min} < 0; \quad \sigma_{\max} > 0; \quad -1 < R < 0, \quad (3.4)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (1.1) и (3.2).

Для зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  из (2.41) с учетом (3.1) и (3.4) получаем систему разрешающих уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} n &= n_* + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{q-2} \frac{\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \sigma_m}{2\sigma_B}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\pi \sigma_m}{2\sigma_B}\right)^4\right]^{2\eta}}{\left(1 + \frac{1}{q}\right) D (\sigma_Y)^{q-2}} \int_{\ell_0}^{\ell(n)} \frac{1}{\left(\tilde{\sigma}_a f\left(\frac{h}{w}, \frac{\ell(n)}{w}\right)\right)^2 \ell(n)} d\ell; \\ n_* &= \frac{1}{(1+q)D \left[\frac{4\sigma_Y}{\pi}\right]^q}; \\ f\left(\frac{h}{w}, \frac{\ell}{w}\right) &= 1,0106 - 0,1996 \left(\frac{2\ell}{w}\right) + 1,829 \left(\frac{2\ell}{w}\right)^2 - 3,068 \left(\frac{2\ell}{w}\right)^3 + 3,2197 \left(\frac{2\ell}{w}\right)^4, \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

где, как и в (3.3), интеграл вычисляем численно по методу Симпсона.

Результаты расчетов зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  при фиксированном значении среднего напряжения  $\sigma_m$  и варьировании величины амплитуды  $\sigma_a$ , выполненных по уравнениям (3.5), сопоставлены на рис. 8 с экспериментальными данными для пластин из алюминиевых сплавов 2024-T3 (а) и 7075-T6 (б). Для пластин из алюминиевого сплава 2024-T3 зависимости  $\ell$  от  $n$  постро-

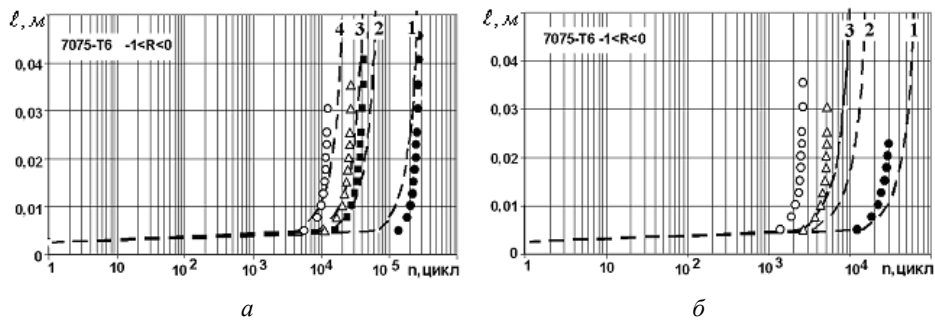


Рис. 8

ены при  $\sigma_m = 17$  МПа и  $\sigma_a = 34$  МПа (линия 1, ●);  $\sigma_a = 69$  МПа (линия 2, ■);  $\sigma_a = 86$  МПа (линия 3, Δ);  $\sigma_a = 121$  МПа (линия 3, ○), а для пластин из алюминиевого сплава 7075-Т6 – при  $\sigma_m = 34$  МПа и  $\sigma_a = 69$  МПа (линия 1, ●);  $\sigma_a = 138$  МПа (линия 2, Δ);  $\sigma_a = 172$  МПа (линия 3).

**3.4 Асимметричный знакопостоянный цикл.** Решим задачу расчета зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  в тонких пластинах конечных размеров из алюминиевых сплавов при одноосном знакопостоянном комбинированном статическом и циклическом нагружении. Рассмотрены два вида асимметричных знакопостоянных циклов. В качестве таких циклов выбраны асимметричный отнулевой цикл, для которого минимальное напряжение в цикле равно нулю, и асимметричный знакопеременный цикл, для которого минимальное напряжение в цикле больше нуля. Зависимость  $\ell$  от  $n$  задается системой разрешающих уравнений (3.5).

*Асимметричный отнулевой цикл.* Условие нагружения (1.1) конкретизируется в этом случае в виде

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi n); \sigma_m = \sigma_a > 0; \sigma_{\min} = 0; \sigma_{\max} > 0; R = 0, \quad (3.6)$$

где, как и выше,  $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$ , а  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ .

Результаты расчетов зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  при фиксированном значении коэффициента асимметрии  $R = 0$  и варьировании величин среднего напряжения  $\sigma_m$  и амплитуды циклических напряжений  $\sigma_a$  согласно (3.6), выполненных по уравнению (3.5), сопоставлены на рис. 9 с экс-

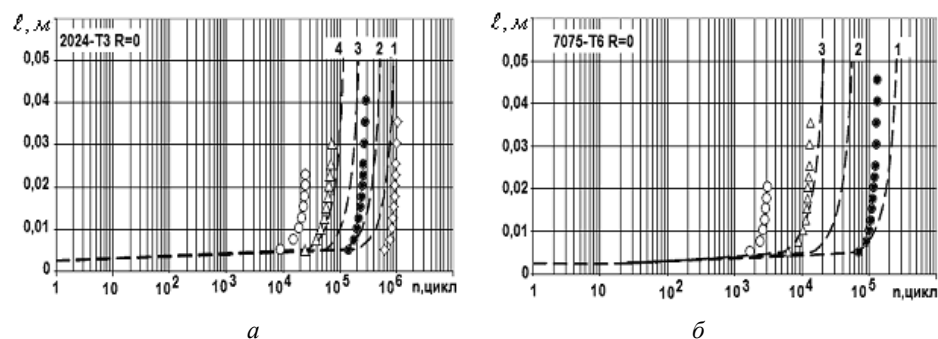


Рис. 9

периментальными данными для пластин из алюминиевых сплавов 2024-Т3 (а) при  $\sigma_m = \sigma_a = 26$  МПа (линия 1, ◇);  $\sigma_m = \sigma_a = 34$  МПа (линия 2, ●),  $\sigma_m = \sigma_a = 52$  МПа (линия 3, Δ);  $\sigma_m = \sigma_a = 69$  МПа (линия 4, ○); для пластин из алюминиевого сплава 7075-Т6 (б) при  $\sigma_m = \sigma_a = 34$  МПа (линия 1, ●);  $\sigma_m = \sigma_a = 69$  МПа (линия 2, ◇);  $\sigma_m = \sigma_a = 103$  МПа (линия 3, ○).

*Асимметричный знакопостоянный цикл.* Условие нагружения (1.1) конкретизируется в этом случае в виде

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi n); \sigma_m > \sigma_a > 0; \sigma_{\min} > 0; \sigma_{\max} > 0; R \geq 0, \quad (3.7)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (3.6).

Результаты расчетов зависимости длины усталостной трещины  $\ell$  от числа циклов нагружения  $n$  при варьировании величин среднего напряжения  $\sigma_m$  и амплитуды циклических напряжений  $\sigma_a$  согласно (3.7), выполненных по уравнению (3.5), сопоставлены на рис 10 с экспериментальными данными для пластин из алюминиевых спла-

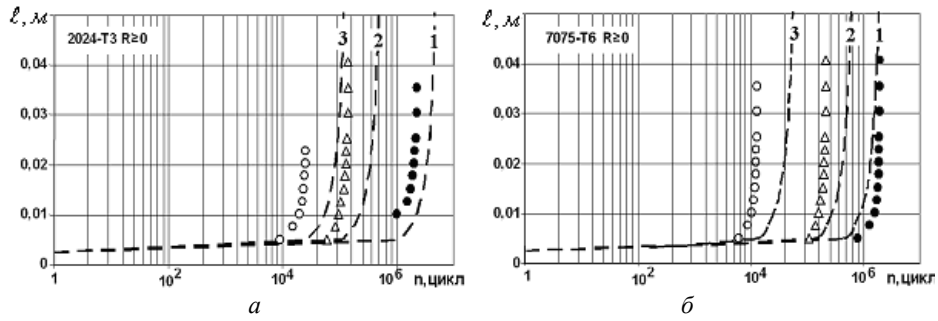


Рис. 10

вов 2024-T3 (а) и 7075-T6 (б) при фиксированном значении среднего напряжения  $\sigma_m$  и варьировании амплитуды циклических напряжений  $\sigma_a$ . Для пластин из сплава 2024-T3 зависимости  $\ell$  от  $n$  построены при  $\sigma_m = 69$  МПа и значениях  $\sigma_a = 12$  МПа, (линия 1, ●);  $\sigma_a = 34$  МПа, (линия 2, Δ);  $\sigma_a = 69$  МПа (линия 3, ○), а для пластин из сплава 7075-T6 при  $\sigma_m = 69$  МПа и  $\sigma_a = 12$  МПа, (линия 1, ●);  $\sigma_a = 21$  МПа, (линия 2, Δ);  $\sigma_a = 69$  МПа (линия 3, ○).

#### §4. Обсуждение результатов.

В работе построена двухстадийная модель усталостного разрушения тонких изотропных пластин конечных размеров с трещинами при одноосном асимметричном растяжении-сжатии. Модель учитывает длительность инкубационной стадии и описывает стадию роста усталостной трещины. Влияние асимметрии цикла напряжений учитывается с использованием концепции эквивалентных напряжений, позволяющей асимметричный цикл свести к эквивалентному по числу циклов до разрушения симметричному циклу. К симметричному циклу, который является знакопеременным, сводятся как знакопеременные, так и знакопостоянные асимметричные циклы.

Модель апробирована экспериментально на задачах расчета кинетики роста усталостных трещин нормального отрыва в пластинах из алюминиевых сплавов при симметричном, знакопеременном и знакопостоянном асимметричном нагружениях. Для апробации использованы заимствованные из литературы экспериментальные данные. Результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных представлены на рис. 7 – 10.

В целом, как следует из приведенных на рисунках 7 – 10 данных, результаты расчетов, учитывая, что для процесса усталостного разрушения характерно существенное (на 1 – 2 порядка) рассеивание усталостных свойств, вполне удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов. Максимальная погрешность не превышает 30 – 40% и практически не зависит от характера асимметричного цикла и степени асимметрии цикла. В эксперименте, как правило, усталостная трещина растет более интенсивно, чем это следует из результатов расчета, так что одна и та же длина трещины достигается за меньшее число циклов нагружения. Это объясняется тем обстоятельством, что при расчете кинетики роста усталостных трещин использовано приближенное аналитическое решение. В этом случае в процедуре расчета дискретных значений длины трещины не учитывалась предыстория накопления усталостных повреждений. Принято, что в каждый момент времени расчета длины усталостной трещины функция повреждения изменяется от 0 до 1. Учет предыстории накопления усталостных повреждений и, возможно, улучшение согласования расчетных и экспериментальных данных может быть достигнуто, когда задачу расчета кинетики роста усталостных трещин будем решать численно.

Длительность инкубационной стадии  $n_*$ , как это следует из структуры уравнений (3.3) и (3.5), определена только механическими свойствами материала и не зависит ни от уровня приложенных напряжений, ни от начальной длины усталостной трещины.

Не оказывает также влияния на величину  $n_c$  конечность размеров пластины и характер концентратора напряжений. Эта особенность уравнений (3.3) и (3.5) связана с выбранной моделью пластической зоны в вершине усталостной трещины, позволяющей получать решение в аналитическом виде. Кинетические диаграммы роста усталостных трещин в относительной системе координат (рис. 11) для пластин из алюминиевых

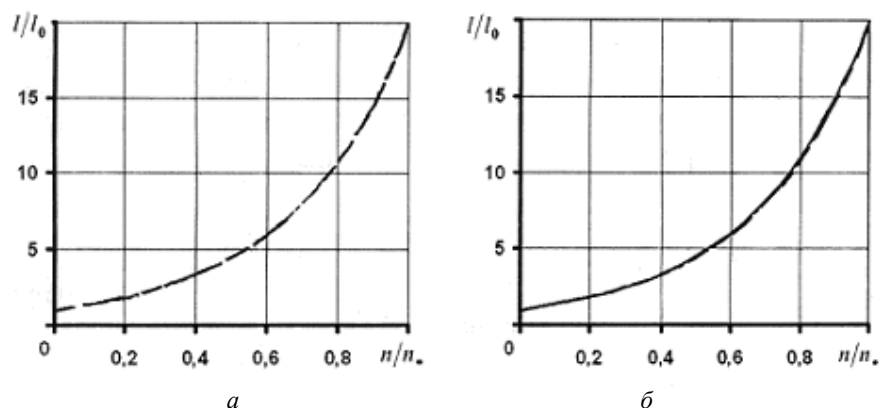


Рис. 11

сплавов 2024-Т3 (а) и 7075-Т6 (б) сводятся в этом случае к единым диаграммам, не зависящим от уровня приложенных напряжений и, возможно, от геометрии пластины с концентратором напряжений и материала пластины.

Подтвердить или опровергнуть экспериментально эту особенность построенной модели усталостного разрушения не представляется возможным в связи с отсутствием соответствующих экспериментальных данных. Можно, однако, предположить, что все указанные выше факторы в той или иной мере будут оказывать влияние на длительность инкубационной стадии.

#### Заключение.

В работе построена и экспериментально апробирована модель роста усталостных трещин нормального отрыва в тонких изотропных пластинах конечных размеров при одноосном симметричном и асимметричном растяжении – сжатии. Модель позволяет рассчитывать длительность инкубационной стадии и зависимость длины усталостной трещины от числа циклов нагружения на стадии роста трещины. Влияние асимметрии цикла напряжений в модели учтено с помощью эквивалентных напряжений, позволяющих асимметричный цикл свести к симметричному. Влияние конечности размеров пластины на напряженное состояние в вершине усталостной трещины учитывается с помощью корректирующих функций. Корректирующие функции заданы полиномами четвертой степени, коэффициенты которых определяем по результатам аппроксимации известных численных решений задач о напряженном состоянии пластин конечных размеров с трещинами. Материальные константы модели определены по результатам обработки данных стандартных испытаний гладких цилиндрических образцов на статическое растяжение и на усталость при симметричном и отнулевом циклах. Модель апробирована экспериментально на решении задач расчета кинетики роста усталостных трещин в прямоугольных пластинах из алюминиевых сплавов в широком диапазоне изменения коэффициентов асимметрии цикла напряжений.

**РЕЗЮМЕ.** Побудовано двохстадійну модель розповсюдження тріщин втоми нормального відриву в тонких ізотропних пластинах кінцевих розмірів при одновісному симетричному й асиметричному розтягу – стиску. Модель побудовано на основі підходу, що поєднує силову концепцію механіки тріщин і концепцію механіки континуальної пошкодженості. Модель апробовано експериментально на задачах розрахунку кінетики росту центральної тріщини втоми при одновісному симетричному та асиметричному знакозмінному і знакопостійному циклічних навантаженнях.

1. *Андрейкив А.Е.* Пространственные задачи теории трещин. – К.: Наук. думка, 1982. – 348 с.
2. *Андрейкив А.Е.* Расчетная модель для определения периода зарождения усталостной макротрещины // Физ.-хим. механика материалов. – 1976. – № 6. – С. 27 – 30.
3. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
4. *Болотин В.В.* Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – №7. – С. 153 – 160.
5. *Голуб В.П., Пельх В.Н., Погребняк А.Д.* К задаче расчета усталостной долговечности призматических стержней при асимметричном изгибе и кручении // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – №8/95. – С. 129 – 133.
6. *Голуб В.П., Плащинская А.В., Кочеткова Е.С.* Усталостное разрушение тонких алюминиевых пластин с трещинами при одноосном асимметричном нагружении // Надежность и долговечность машин и сооружений. Сб. статей. – Вып. 31. – К.: Изд-во ИПП НАНУ. – 2008. – С. 73 – 81.
7. *Коцаньда С.* Усталостное разрушение металлов / Пер. с польского под ред. В.С.Ивановой. – М.: Металлургия, 1976. – 456 с.
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
9. *Саврук М.П.* Механика и прочность материалов. В 5 т. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 618 с.
10. *Черепанов Г.П.* О росте трещин при циклическом нагружении // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1968. – № 6. – С. 64 – 75.
11. *Bolotin V.V.* A unified approach to damage accumulation and fatigue crack growth // Engineering Fracture Mechanics. – 1985. – 22, N 3. – P. 387 – 398.
12. *Broek D.* Elementary engineering fracture mechanics. – Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1974. – 268 p.
13. *Cherepanov G.P., Halmanov H.* On the theory of fatigue crack growth // Eng. Fract. Mech. – 1971. – 4, N 1. – P. 143 – 145.
14. *Dolan, T.J.* Effect of range of stress and of special notches on fatigue properties of aluminium alloys suitable for airplane propellers // NASA TN-852. – 1942. – 35 p.
15. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – 8, N2. – P. 100 – 104.
16. *Golub V.P.* Modelling of fatigue cracks growth in thin plates with stress concentrators // Numerical Methods in Engineering'96. Proc. of the Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering, 9-13 September 1996. – Paris - New-York: John Wiley & Sons. – 1996. – P. 129 – 135.
17. *Golub V.P.* Subcritical fatigue crack growth in thin plates under high-cyclic loading. // Fracture Mechanics of Materials and Strength of Structures. Issue 2. Analytical Methods in Fracture Mechanics, Lviv: Kamianjar. – 1999. – 2, N 2. – P. 83 – 88.
18. *Golub V.P.* The theory of long-term fatigue fracture providing for crack initiation and propagation // Advances in Fracture Research. (ICF9). – 1997. – 3. – P. 1361 – 1370.
19. *Golub V.P., Panteleyev E.A.* Fatigue damage and cyclic life-time of cracked isotropic plates considering two-stage fracture // Fatigue 93. Proc. of the Intern. Cong. on Fatigue: EMAS. – 1993. – 1. – P. 275 – 281.
20. *Golub V.P., Plashchiskaya A.V.* Fatigue Fracture Model for thin Isotropic Plates with Cracks in Axial Loading // Int. Appl. Mech. – 1994, 30, N 7. – P. 520 – 529.
21. *Grover H.J., Hyler W.S., Kuhn P., Landers C.B., Hawell F.N.* Axial-load fatigue properties of 24S-T and 75S-T aluminum alloys as determined in several laboratories // NASA TN 2928. – 1953. – 64 p.
22. *Hudson C.M.* Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 and 2024-T3 aluminium alloy specimens // NASA TN D-5390. – 1969. – 34 p.
23. *Johnston W.N.* Fracture tests on thin sheet 2024-T3 aluminum alloy for specimens with and without anti-buckling Guides // NASA / CR-2001-210832. – 2001. – 35 p.
24. *Luke Y.L.* The special functions and their approximations. – New York: Academic Press, 1969. – 484 p.
25. *Newman J.C.* An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plate with various shaped boundaries. – NASA TN D-6376, 1971. – 45 p.
26. *Newman J.C., Jr.* FASTRAN-II – A fatigue crack growth structural analysis program. – NASA-TM-104159, 1992. – 103 p.
27. *Newman J.C., Jr., Wu X.R., Venneri S.L., Li C.G.* Small-crack effects in high-strength aluminum alloys // NASA RP 1309, 1994. – 118 p.
28. *Paris P.C., Erdogan F.* A critical analysis of crack propagation laws // J. of Basic Engineering. Ser. D. Trans. ASME. – 1963. – 85, N4. – P. 528 – 534.
29. *Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.E.* A rational analytic theory of fatigue // The Trend in Engineering. – 1961. – 13, N 1. – P. 9 – 14.
30. *Rice J.R.* Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue // ASTM STP 415, Fatigue Crack Propagation. – 1967. – P. 247 – 309.
31. *Tada H.* A note on the finite width correction to the stress intensity factor // Eng. Fract. Mech. – 1971. – 3, N 3. – P. 345 – 347.

Поступила 07.09.2016

Утверждена в печать 10.10.2017