

Я. М. Григоренко, А. Я. Григоренко, Л. И. Захарийченко

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ
ТОЛЩИНЫ НА ИХ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина, e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru,
lilianazakh@gmail.com*

Abstract. A study is carried out for the stress-strain state of open and closed cylindrical shells of elliptical cross-section. A case is considered when the shell thickness is a variable quantity. The problem is solved on the basis of Mushtari – Donnell – Vlasov shell model. The numerical-analytical method is used that is based on spline-collocation and discrete orthogonalization methods. An analysis is done for the different types of boundary conditions and variable loading. An effect of the character of variable loading and shell thickness on the distribution of displacements and stresses of corresponding noncircular shells is analyzed.

Key words: elliptic shell, stress-strain state, variable thickness, variable loading, ellipticity magnitude.

Введение.

Цилиндрические оболочки постоянной и переменной толщины широко применяются в различных областях современного производства в качестве элементов конструкций и деталей машин. С увеличением требований к современной технике все большее распространение получают оболочки сложных форм с переменными параметрами [4, 7, 13], в том числе и цилиндрические (открытые и замкнутые) оболочки эллиптического поперечного сечения [8, 10]. Большое значение имеет учет переменной толщины оболочек в связи с необходимостью изменения деформативных и прочностных свойств конструкций в зависимости от требуемых условий работы. Поэтому возникает необходимость расчета напряженно-деформированного состояния некруговых тонких оболочек переменной толщины при различных способах закрепления их контуров под действием переменной нагрузки.

Актуальным является рассмотрение класса задач о напряженно-деформированном состоянии некруговых изотропных тонких цилиндрических оболочек с толщиной, изменяющейся по образующей и направляющей, и находящейся под действием произвольной поверхностной нагрузки. Оболочки могут быть замкнутые и открытые по направляющей, и в соответствии с этим, граничные условия задаются на криволинейных краях или на всем контуре. Применение для решения указанного класса задач различных приближенных и численных методов во многих случаях не позволяет с достаточной точностью удовлетворить граничным условиям и получить искомое решение [3].

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

В упрощенной постановке решение задач указанного выше класса рассмотрим на основании уравнений Муштари – Доннелла – Власова [2, 12].

Отнесем срединную поверхность оболочки к ортогональной системе координат s , t , где s и t , соответственно, длины дуг по образующей и направляющей. Исходные уравнения, описывающие деформацию указанного класса оболочек, запишем в следующем виде:

выражения для деформаций –

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_t = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{w}{R_t}; \quad \varepsilon_{st} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}; \quad \kappa_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad \kappa_t = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \kappa_{st} = -\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}; \quad (1)$$

уравнения равновесия –

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial N_t}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_t}{\partial t} - \frac{1}{R_t} N_t + q_\gamma = 0; \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t} - Q_s = 0; \quad \frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} - Q_t = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

соотношения упругости –

$$\begin{aligned} N_s = D_N (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_t); \quad N_t = D_N (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_s); \quad S = \frac{1-\nu}{2} D_N \varepsilon_{st}; \quad M_s = D_M (\kappa_s + \nu \kappa_t); \\ M_t = D_M (\kappa_t + \nu \kappa_s); \quad H = (1-\nu) D_M \kappa_{st}; \quad D_N = \frac{Eh^3(s,t)}{1-\nu^2}; \quad D_M = \frac{Eh^3(s,t)}{12(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (1) – (3) u, v, w – перемещения по образующей, направляющей и нормали к срединной поверхности; $\varepsilon_s, \varepsilon_t, \varepsilon_{st}, \kappa_s, \kappa_t, \kappa_{st}$ – тангенциальные и изгибные деформации; N_s, N_t, S, Q_s, Q_t – усилия; M_s, M_t, H – моменты; $R_t = R(t)$ – радиус кривизны направляющей; D_N, D_M – тангенциальная и изгибная жесткости; $h = h(s,t)$ – толщина оболочки; E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона; $q_\gamma = q_\gamma(s,t)$ – поверхностная нагрузка.

Разрешающую систему уравнений в перемещениях запишем в следующем виде [8]:

$$\begin{aligned} D_N \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial u}{\partial s} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{w}{R_t} \right) \right] + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial D_N}{\partial s} \left[\frac{\partial u}{\partial s} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{w}{R_t} \right) \right] + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial D_N}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 0; \\ D_N \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{w}{R_t} + \nu \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] + \frac{\partial D_N}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{w}{R_t} + \nu \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \\ + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial D_N}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 0; \quad (4) \\ \frac{\partial}{\partial s} \left[D_M \frac{\partial \Delta w}{\partial s} + \frac{\partial D_M}{\partial t} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + \frac{\partial D_M}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left[D_M \frac{\partial \Delta w}{\partial t} + \frac{\partial D_M}{\partial s} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + \frac{\partial D_M}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \right] + \\ + \frac{D_N}{R_t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{w}{R_t} + \nu \frac{\partial u}{\partial s} \right) = q_\gamma \quad (0 \leq s \leq L, t_1 \leq t \leq t_2). \end{aligned}$$

В случае замкнутых по направляющей оболочек граничные условия задаем на криволинейных краях, а в случае открытых – на криволинейных и прямолинейных краях. Граничные условия могут быть сформулированы также в перемещениях или в смешанном виде.

2. Методика решения краевых задач.

Для аппроксимации решения двумерной краевой задачи в направлении направляющей с помощью сплайн-функций преобразуем разрешающую систему дифференциальных уравнений (4) к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{14} \frac{\partial v}{\partial t} + a_{15} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} + a_{16} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{17} w + a_{18} \frac{\partial w}{\partial s}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} &= a_{21} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + a_{24} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_{25} \frac{\partial v}{\partial t} + a_{26} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{27} w + a_{28} \frac{\partial w}{\partial t}; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} &= a_{31} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{32} \frac{\partial v}{\partial t} + a_{33} w + a_{34} \frac{\partial w}{\partial t} + a_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_{36} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + a_{37} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \\ &+ a_{38} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + a_{39} \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial t^2} + a_{3,10} \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial t^2} + a_{3,11} \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial t} + a_{3,12} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + a_{3,13} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + q_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты $a_{ij}(s, t)$, $(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 13)$, q_1 выражаются через механические характеристики и являются функциями координат s и t .

Решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных (5) с соответствующими граничными условиями на прямолинейных краях будем искать в виде

$$u(s, t) = \sum_{i=0}^N u_i(s) \psi_{1i}(t); \quad v(s, t) = \sum_{i=0}^N v_i(s) \psi_{2i}(t); \quad w(s, t) = \sum_{i=0}^N w_i(s) \psi_{3i}(t), \quad (6)$$

где $u_i(s)$, $v_i(s)$, $w_i(s)$ ($i = \overline{0, N}$) – неизвестные функции, а $\psi_{ni}(t)$ ($n = 1, 2, 3$) – линейные комбинации В-сплайнов, соответственно, третьей (для $n = 1, 2$) и пятой (для $n = 3$) степени [1, 5, 6, 11], которые точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейных контурах для открытых оболочек и условиям симметрии для замкнутых оболочек.

Выбирая функции $\psi_{ni}(t)$ ($n = 1, 2, 3$) таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям или условиям симметрии на прямолинейных краях, подставим выражения (6) в дифференциальные уравнения (5) и потребуем их удовлетворения в точках коллокации $t = t_k$ ($k = \overline{0, N}$), т.е. на $N+1$ прямой. После ряда преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $8(N+1)$ -ого порядка вида

$$\frac{d\bar{Z}}{ds} = A(s)\bar{Z} + \bar{f}(s) \quad (0 \leq s \leq L), \quad (7)$$

где $\bar{Z} = \{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_8\}^T = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}'''\}^T$, $\bar{z}_m = \{z_{m_0}, z_{m_1}, \dots, z_{m_N}\}^T$ ($m = \overline{1, 8}$).

Исходя из граничных условий, заданных на краях $s = 0$ и $s = L$, можно сформулировать граничные условия для системы уравнений (7), которые в общем случае принимают вид

$$B_1 \bar{Z}(0) = \bar{b}_1; \quad B_2 \bar{Z}(L) = \bar{b}_2. \quad (8)$$

Краевую задачу для системы уравнений (7) с граничными условиями (7) решаем устойчивым методом дискретной ортогонализации [6, 8]. Подставляя полученные значения функций $u_i(s)$, $v_i(s)$ и $w_i(s)$ ($i = \overline{0, N}$) в выражения (6), получаем решение исходной задачи для перемещений, а по ним вычисляем все факторы напряженно-деформированного состояния оболочки.

3. Числовые результаты и их анализ.

Представим результаты решения задач на основании изложенного выше подхода. Исследуем напряженно-деформированное состояние (НДС) изотропной цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением, находящейся под действием равномерно распределенной нормальной поверхностной нагрузки q_γ . Рассмотрим оболочки, у которых периметр поперечного сечения срединной поверхности остается неизменным и равным периметру окружности радиуса R , т.е. имеет место такое равенство

$$\pi(a+b) \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots \right) = 2\pi R$$

$$\left(\Delta = \frac{b-a}{b+a}; a = \frac{R}{f}(1-\Delta); b = \frac{R}{f}(1+\Delta); f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots, \frac{a}{b} = \frac{1-\Delta}{1+\Delta} \right). \quad (9)$$

Параметрические уравнения поперечного сечения оболочки задаем в виде [9]:

$$x = b \cos \varphi; z = a \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{\gamma(\varphi)} \frac{d}{d\varphi}, \quad \gamma(\varphi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}, \quad (10)$$

где a – малая, а b – большая полуоси эллипса, φ – угловой параметр.

Исследуем НДС эллипсоидальной цилиндрической оболочки для трех вариантов рассматриваемых задач:

вариант 1 – открытая оболочка ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$), криволинейные и прямолинейные края которой жестко закреплены, т.е. выполняются такие граничные условия:

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s = 0, s = L;$$

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = -\pi/2, \varphi = \pi/2; \quad (11)$$

вариант 2 – открытая оболочка ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$), криволинейные края которой жестко закреплены, а прямолинейные – шарнирно оперты, т.е. выполняются граничные условия:

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s = 0, s = L;$$

$$u = v = w = 0; \quad M_\varphi = 0 \quad \text{при } \varphi = -\pi/2, \varphi = \pi/2; \quad (12)$$

вариант 3 – замкнутая оболочка, криволинейные края которой жестко закреплены, тогда на прямолинейных краях задаются условия симметрии, таким образом имеем граничные условия:

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s = 0, s = L.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = v = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{3\gamma'}{\gamma^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\gamma^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = 0 \quad \text{при } \varphi = -\pi/2, \varphi = \pi/2. \quad (13)$$

При решении задачи можно рассматривать часть оболочки: $0 \leq s \leq L/2$; $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, задавая при $s = L/2$, $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ условия симметрии.

Толщина оболочки изменяется вдоль направляющей по закону:

$$h = h_0(1 + \alpha |\sin \varphi|), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (14)$$

к оболочке приложена поверхностная нагрузка

$$q_\gamma = q_0(1 + \eta \cos 2\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (15)$$

Задачу решаем при таких исходных данных: $R = 20$; $L = 60$; $q_\gamma = q_0 = \text{const}$, $h_0 = 0,5$; $E = 1$; $\nu = 0,3$ (Δ и α принимали различные значения, указанные на графиках). Задача решена с помощью сплайн-аппроксимации по направляющей, при этом в рядах (6) учтено 12 членов.

На рис. 1 и 2 представлены значения максимального прогиба w и максимального

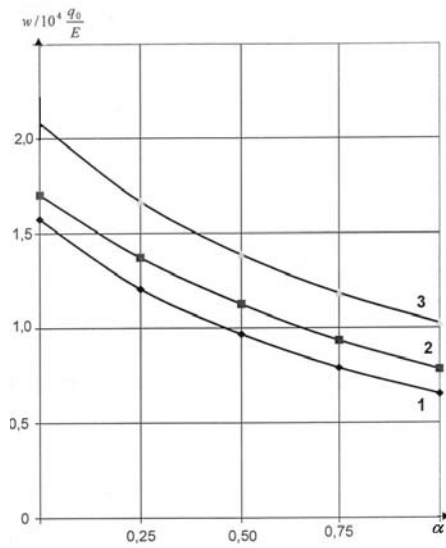


Рис. 1

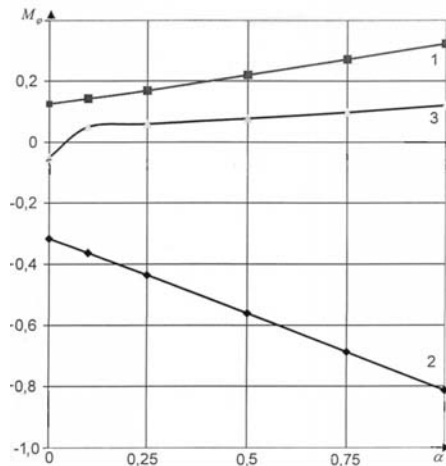


Рис. 2

момента M_φ в сечении $s = L/2$ в зависимости от параметра изменения толщины при $\Delta = 0,3$ и $\Delta = 0,1$, соответственно. Цифры 1, 2 и 3 соответствуют трем вариантам закрепления прямолинейных контуров. Максимальные значения прогиба для вариантов 1 и 2 имеют место при $\varphi = 0,7\pi/2$ и для варианта 3 – при $\varphi = \pi/2$; максимальные значения момента M_φ для вариантов 1 и 3 – при $\varphi = \pi/2$ и для варианта 2 – при $\varphi = 0,8\pi/2$.

Из рис. 1 следует, что с увеличением значения параметра α максимальные значения прогиба уменьшаются при любом способе закрепления прямолинейных контуров, при этом наибольшие значения имеют место в замкнутой оболочке; они превышают для $\alpha = 1$ значения прогиба для вариантов 1 и 2 в 1,8 и 1,5 раз, соответственно.

Значения же максимального окружного момента (рис. 2) увеличиваются с ростом параметра α для вариантов 1 и 3 закрепления оболочки и уменьшаются при шарнирно закрепленных прямолинейных контурах (вариант 2).

На рис. 3 приведены графики распределения окружного усилия N_φ вдоль направляющей в сечении $s = L/2$ при $\Delta = 0,25$ и $\alpha = 1$ для трех вариантов граничных условий. Из рисунка видно, что максимальное усилие наблюдается в замкнутой оболочке (вариант 3). Его максимальное значение превышает наибольшие значения для вариантов 1 и 2 – в 1,5 раза и 1,2 раза, соответственно.

Рассмотрим замкнутые эллипсоидальные цилиндрические оболочки, толщина которых изменяется по закону (14) под действием переменной нагрузки (15).

Задача решена при таких исходных данных: $R = 20$; $L = 60$; $h_0 = 0,5$; $E = 1$; $\nu = 0,3$; Δ , η и α принимали различные значения, указанные в таблицах и на графиках. Задача решена с помощью сплайн-аппроксимации по направляющей, при этом в рядах (6) учитывались 12 членов.

В таблице приведено распределение прогиба и момента по направляющей на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ в сечении $s = L/2$ при $\Delta = 0,1$.

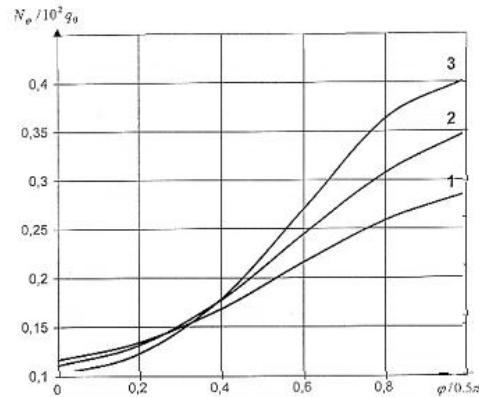


Рис. 3

η	$\varphi/\pi/2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 1$
$Ew/10^3 q_0$					
0,25	0	-0,7309	-0,3819	-0,2709	-1,1853
	0,2	-0,0409	0,1024	0,1403	0,1660
	0,4	1,2925	0,9060	0,7796	0,6809
	0,6	1,7996	1,1467	0,9580	0,8180
	0,8	1,0885	0,7966	0,7057	0,6338
	1	0,5140	0,5397	0,5256	0,5043
0,75	0	2,8871	2,9004	2,8230	2,7203
	0,2	3,6872	3,0561	2,7921	2,5568
	0,4	4,1656	2,4215	1,9229	1,5591
	0,6	0,9532	-0,1565	-0,3651	-0,4735
	0,8	-5,2991	-3,5874	-3,0546	-2,6396
	1	-8,6619	-5,2059	-4,2649	-3,5772
1,0	0	4,6962	4,5416	4,3700	4,1732
	0,2	5,5513	5,5330	4,1179	3,7506
	0,4	5,6021	3,1793	2,4945	1,9981
	0,6	0,5300	-0,8082	-1,0267	-1,1193
	0,8	-8,4929	-5,7793	-4,9347	-4,2763
	1	-13,2498	-8,0787	-6,6602	-5,6180
M_φ / q_0					
0,25	0	-0,5588	-0,4167	-0,3653	-0,3226
	0,2	-0,2334	-0,1584	-0,1237	-0,0913
	0,4	0,3152	0,4667	0,5256	0,5732
	0,6	0,3904	0,5088	0,5484	0,5781
	0,8	-0,0475	-0,1022	-0,1209	-0,1330
	1	-0,3362	-0,4906	-0,5399	-0,5727
0,75	0	-0,6923	-0,1967	-0,0428	0,0741
	0,2	0,1002	0,4610	0,5970	0,7067
	0,4	1,2685	1,4150	1,3946	1,3227
	0,6	0,9088	0,6066	3,4487	0,0315
	0,8	-0,8633	-1,7324	-2,2039	-2,6923
	1	-1,9008	-3,0307	-3,5813	-4,1279
1,0	0	-0,7591	-0,0867	0,1185	0,2724
	0,2	0,2669	0,7707	0,9573	1,1056
	0,4	1,7452	1,8892	1,8291	1,6975
	0,6	1,1680	0,6555	0,2431	-0,2418
	0,8	-1,2713	-2,5475	-3,2454	-3,9719
	1	-2,6830	-4,3007	-5,1019	-5,9054

Из данных таблицы следует, что для $\eta = 0,25$ при всех значениях α прогиб на конце большой полуоси эллипса ($\varphi = 0$) имеет знак «-», т.е. оболочка прогибается в направлении, противоположном действию нагрузки. Однако величина этого прогиба уменьшается с возрастанием α по сравнению со случаем $\alpha = 0$.

Увеличение параметра α также приводит к уменьшению максимального прогиба, который наблюдается в точке $\varphi = 0,6\pi / 2$.

При $\eta = 0,75$ в конце большой полуоси оболочка прогибается в направлении действия нагрузки и этот прогиб уменьшается с возрастанием α . Конец малой полуоси прогибается против действия нагрузки; этот прогиб также уменьшается с возрастанием α на 40%, 51% и 59% при $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0$, соответственно, по сравнению с прогибом при $\alpha = 0$.

При $\eta = 1$ наблюдаем такую же картину: прогиб оболочки в конце большой полуоси имеет знак «+» и уменьшается на 3%, 7% и 11% при $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0$, а прогиб оболочки в конце малой полуоси имеет знак «-» и уменьшается на 39%, 50% и 58% при $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0$, соответственно, по сравнению со случаем $\alpha = 0$.

Окружной момент при $\eta = 0,25$ как в окрестности конца большой, так и в окрестности конца малой полуоси, имеет знак «-», а в середине отрезка $[0, \pi / 2]$ – знак «+», причем, если в конце малой полуоси значение момента по модулю возрастает с увеличением параметра α на 46%, 61% и 70% при $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0$ по сравнению с моментом при $\alpha = 0$, соответственно, то в конце большой полуоси значения момента по модулю уменьшаются на 25%, 35% и 42% при $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0$, соответственно, по сравнению с моментом при $\alpha = 0$. Максимальное по модулю значение момента наблюдается при $\alpha = 0$ в конце большой полуоси $\varphi = 0$, а при $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0$ – в точке $\varphi = 0,6\pi / 2$.

При $\eta = 0,75$ момент в конце большой полуоси имеет знак «-» при $\alpha = 0; 0,5; 0,75$, уменьшается в 3,5 и 16 раз при $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 0,75$ по сравнению с моментом при $\alpha = 0$, соответственно, а при $\alpha = 0$ меняет знак на противоположный. В это же время в конце малой полуоси момент имеет знак «-» и возрастает по модулю с увеличением α в 1,6, 1,9 и 2,2 раза при $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0$ по сравнению с моментом при $\alpha = 0$. Момент в конце малой полуоси является максимальным.

При $\eta = 1$ момент в конце большой полуоси имеет знак «-» при $\alpha = 0; 0,5$ и уменьшается при $\alpha = 0,5$ в 8,8 раз по сравнению с моментом при $\alpha = 0$, а при $\alpha = 0,75; 1,0$ меняет знак на «+» и возрастает с увеличением α в 2,3 раза при $\alpha = 1$ по сравнению с моментом при $\alpha = 0,75$.

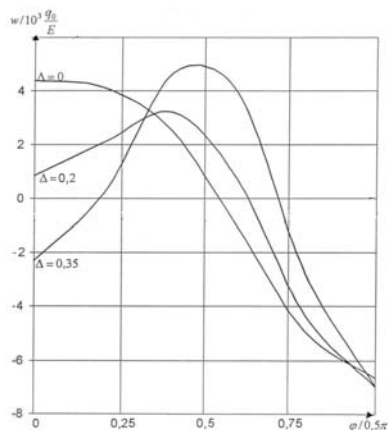


Рис. 4

Максимальный по модулю момент наблюдается в точке $\varphi = \pi / 2$ и имеет знак «-», возрастая по модулю с увеличением α в 1,6, 1,9 и 2,2 раза при $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0$, соответственно, по сравнению с моментом при $\alpha = 0$.

На рис. 4 приведены графики зависимости прогиба w от степени эллиптичности Δ при $\alpha = 0,75$ и $\eta = 1$. Видно, что максимальный по модулю прогиб практически совпадает при всех значениях Δ . С увеличением степени эллиптичности уменьшается прогиб при $\varphi = 0$ и возрастает при $\varphi = \pi / 4$.

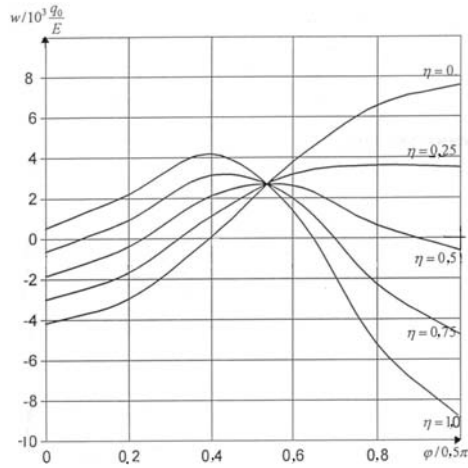


Рис. 5

На рис. 5 приведены графики зависимости прогиба w от изменения нагрузки при $\alpha = 0,5$ и $\Delta = 0,2$. Из этих данных следует, что увеличение параметра η ведет к уменьшению прогиба в точке $\varphi = 0,5\pi$ и его возрастанию при $\varphi = 0$. При $\varphi = \pi/4$ прогиб совпадает при всех значениях η .

На рис. 6 приведены графики распределения окружного усилия N_φ вдоль направляющей в сечении $s = L/2$ при $\eta = 1$, $\alpha = 1$ в зависимости от изменения степени эллиптичности Δ . Полученные данные свидетельствуют, что с увеличением эллиптичности уменьшается максимальное значение окружного усилия в 1,9 и 1,3 раза при $\Delta = 0,35$ и $\Delta = 0,2$, соответственно, по сравнению с максимальным значением при $\Delta = 0,1$. Наибольшее положительное значение усилия наблюдается в точке $\varphi = 0$, а отрицательное – в точке $\varphi = 0,5\pi$.

Исследуем задачу о достижении (за счет выбора параметров переменности нагрузки и толщины) наиболее равномерного распределения по направляющей прогиба w в эллипсоидальной жестко закрепленной цилиндрической оболочке.

На рис. 7 приведено распределение прогиба по направляющей в сечении $s = L/2$ на отрезке $[0, \pi/2]$ при $\Delta = 0,005$. Наиболее равномерное распределение прогиба достигается при $\alpha = 0,82$ для $\eta = 0$. Максимальная разность между величинами прогиба не превышает 1,2%.

Выводы.

1. В работе получено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины под действием переменной нагрузки при различных способах закрепления контуров оболочки.

2. Решены задачи статики открытых и замкнутых эллипсоидальных оболочек переменной по направляющей толщины под действием переменной нагрузки. Полученные результаты представлены в виде графиков и в таблице. Проведен анализ влияния переменности толщины и нагрузки на напряженно-деформированное состояние открытых и замкнутых оболочек при различной степени эллиптичности их поперечного сечения.

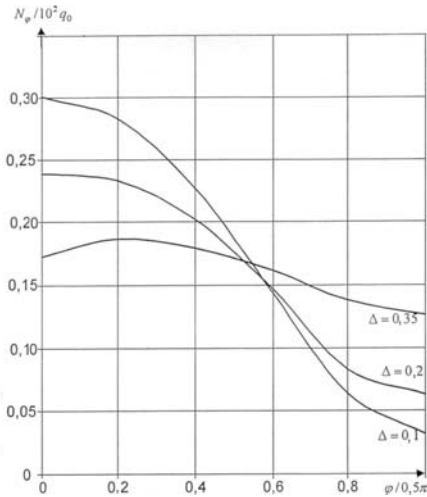


Рис. 6

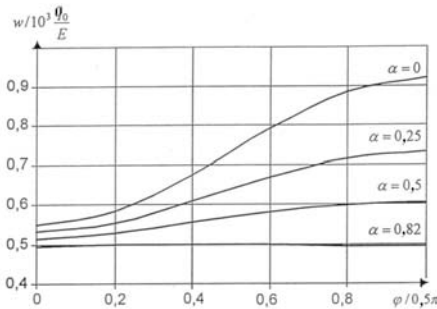


Рис. 7

РЕЗЮМЕ. Досліджено напружено-деформований стан відкритих та замкнених некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом. Розглянуто випадок, коли товщина оболонки є змінною величиною. Задачу розв'язано на основі оболонкової моделі Муштарі – Донелла – Власова. При цьому застосовано чисельно-аналітичний підхід, який базується на методах сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. Виконано розрахунки для різних типів граничних умов та змінного навантаження, проведено аналіз впливу характеру змінних та навантаження товщини на розподіл компонент переміщень та напружень відповідних некругових оболонок.

1. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.:Наука, 1980. 352с.
2. Муштарі Х.М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия // Прикл. математика и механика. – 1939. – 2, № 14. – С. 439 – 456.
3. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 40 – 52.
4. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariichenko L.I. Stress-Strain Solutions for Circumferentially Corrugated Elliptic Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 9. –P. 1021 – 1028.
5. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N. Solution of Problems of the Theory of Plates and Shells with Spline Function (survey) // Int. Appl. Mech. – 1995. – 31, N 9. – P. 413 – 434.
6. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. – 1. – Berlin: Springer, 2016. – 115 p.
7. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N2. – P.105 – 127.
8. Grigorenko Ya.M., Zakhariichenko L.I. Solution of the Problem of the Stress State of Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, N 12. – P.1196 – 1206.
9. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw – Hill, 1961. – 720 p.
10. Soldatos K.P. Mechanics of Cylindrical Shells with Noncircular Cross-Section. A survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, N 8. – P.237 – 274.
11. Viswanathan K.K., Kim K.S., Lee J.H., Koh H.S., Lee J.B. Free vibration of multi-layered circular cylindrical shell with cross-ply walls, including shear deformation by using spline function method // J. of Mechanical Science and Technology. – 2008. – 22, N11. – P. 2062 – 2075.
12. Vlasov V.Z. General Theory of Shells and Its Applications in Engineering. – Washington: NASA TTF-99, 1964. – 913p.
13. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure // Russian Aeronautics (Iz VUZ) – 2014. – 57, N2. – P.118 – 126.

Поступила 06.09.2016

Утверждена в печать 10.10.2017