

Е. И. Беспалова

**ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ АНИЗОТРОПНЫХ ПРИЗМ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

Abstract. A new approach to solving the 3D linear boundary problems of elliptic type with non-separating variables is elaborated. This approach is based on the ideology of finite integral transform methods. Its essence consists in construction of the coupled system of three integral transforms by the three pairs of independent variables of a domain, from which transforms and transform kernels are defined. This approach is realized on the static problems for anisotropic prisms with the low order of symmetry of elastic properties and the arbitrary conditions on bounding surfaces. A testing the approach is done and an analysis of deformation of specific bodies of the class under consideration is carried out.

Key words: finite integral transform method, new approach, 3D problems, anisotropic prism analysis.

Введение.

Многие классические задачи теории упругости, тепломассопереноса, распространения волн в однородных или неоднородных средах были решены известными методами интегральных преобразований в конечных или бесконечных пределах [2, 5, 9, 20, 21]. Суть этих методов состоит в упрощении исходной N -мерной задачи ($N \geq 2$) путем последовательного понижения ее размерности вплоть до алгебраических задач или одномерного случая ($N = 1$). Такое понижение реализуется в результате применения интегрального преобразования по всем N или $(N - 1)$ переменным области с некоторыми ядрами, определяемыми из решения соответствующих задач Штурма – Лиувилля. Библиография по этим вопросам содержится в цитируемой выше литературе.

Принято, что бесконечные интегральные преобразования впервые были применены Лэмбом в 1904 г. при исследовании распространения поверхностных возмущений в упругой среде [22]. Начало систематическому изложению основных положений методов конечных интегральных преобразований (КИП), как фундаментальных методов решения многомерных линейных задач математической физики, положено работами А.С. Еringen, Г.А. Гринберга, Н.С. Кошлякова и др. [1, 3, 16, 17, 27, 30]. За более чем полувековую историю их создания эти методы получили широкое распространение как при решении прикладных задач в различных областях физики, так и в плане их теоретического обобщения [14, 15, 18, 19, 23, 24, 26, 29]. Здесь следует выделить одно из перспективных направлений развития методов КИП в работах профессора Ю.Э. Сеицко и его учеников, связанное с решением многокомпонентных векторных задач Штурма – Лиувилля по определению ядер интегральных преобразований [6 – 8]. Сеицким Ю.Э. разработана векторно-матричная форма этих методов, позволяющая получить решения широкого класса задач упругого деформирования элементов конструкций. Рассмотрены, в частности, динамические задачи для пологих сферических оболочек и кольцевых пластин при различных видах нагружения и условий закрепле-

ния граничного контура, связанные задачи термоупругости для длинного цилиндра и сферы, ортотропного цилиндра конечной и бесконечной длины со степенным изменением упругих свойств по радиальной координате и др.

Этот и другие подходы по развитию и обобщению методов КИП [7, 10, 28] не коснулись основного их элемента – необходимости определения ядер интегрального преобразования. Решение данного вопроса связано с определенными требованиями, которые сводятся, фактически, к условиям разделения переменных в исходной задаче. Как показано во многих работах [3, 8], методы КИП по области своего применения эквивалентны методу собственных функций в том смысле, что построение КИП для данной области и данного типа краевых задач основано на возможности разложения искомого решения в ряды по ортогональным функциям соответствующей однородной задачи. Это требование изначально сужает класс решаемых задач, накладывая указанные ограничения на их операторы.

В связи со сложностью данного вопроса в некоторых работах функции ядра преобразования выбираются априори в зависимости от вида канонических областей, операторов дифференциальных уравнений и граничных условий (см. [10, 15, 28]).

В статье автора [13] сделана попытка распространить метод КИП на задачи с неразделяющимися переменными применительно к двумерной задаче изгиба неоднородных прямоугольных пластин при различных видах граничных условий и действующих нагрузках, не прибегая к априорному выбору ядер преобразования.

В данной работе предложен аналогичный подход для решения трехмерной задачи статики для прямоугольных анизотропных призм с низким порядком симметрии упругих свойств и произвольными условиями на ограничивающих поверхностях. К рассматриваемому классу задач теории упругости могут быть, естественно, применены и другие известные методы прикладной математики [25], что, однако, не исключает интерес к разработке новых подходов.

§1. Основные положения обобщенного метода КИП.

Основные положения разработанного варианта метода конечных интегральных преобразований (КИП*) были подробно изложены в [13] для двумерных линейных краевых задач математической физики и применены к исследованию изгиба неоднородных пластин. Здесь эти положения излагаются для трехмерного случая применительно к дифференциальному уравнению общего вида

$$Du = f \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (1.1)$$

при соответствующих граничных условиях

$$Ru = \varphi \quad (x, y, z) \in \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Задача рассматривается в области $\Omega + \partial\Omega = \{x, y, z : x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$, где

$$D = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2a_{13} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2a_{23} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} + a_0$$

– дифференциальный оператор 2-го порядка с переменными коэффициентами $a_{mn} = a_{mn}(x, y, z)$ ($m, n = 1, 2, 3$), $a_m = a_m(x, y, z)$ ($m = 0, 1, 2, 3$), определенный внутри Ω ; R – дифференциальный или алгебраический оператор граничных условий, определенный в точках границы $\partial\Omega$; $u = u(x, y, z)$ – искомое решение задачи; $f = f(x, y, z)$ и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – известные функции, заданные, соответственно, внутри области и на ее ограничивающих плоскостях.

Приведем вначале общую схему решения задачи (1.1) – (1.2) классическим методом КИП, изложенную в [3]. Как уже отмечалось, применение этого метода возможно при определенных ограничениях на оператор исходной задачи (1.1) – (1.2), допускающих разделение переменных [3, 8]. Так, если преобразования осуществляются по двум переменным (пусть для определенности по y и z), то задача (1.1) – (1.2) должна быть представима в виде

$$Du = (D_x + D_y + D_z)u = f \quad (x, y, z) \in \Omega; \quad (1.3)$$

$$Ru = (R_x + R_y + R_z)u = \varphi \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad (1.4)$$

где операторы D_y и D_z содержат операции дифференцирования только по переменным y и z , соответственно, а оператор D_x , наоборот – не содержит операций дифференцирования по этим переменным (отсутствуют смешанные производные) и коэффициенты $a_{11} = a_{11}(x)$, $a_1 = a_1(x)$, $a_0 = a_0(x)$ зависят только от переменной x . Условия, соответствующие требованиям разделения переменных, накладываются и на операторы R_x, R_y, R_z [3].

При этих ограничениях решение задачи (1.1) – (1.2) или (1.3) – (1.4) методом КИП сводится к выполнению следующих процедурных шагов.

1. К исходной задаче (1.1) – (1.2) применяется интегральное преобразование по переменным y и z в пределах их изменения $y \in [0, b]$, $z \in [0, c]$ с ядрами преобразований $K_y(y, \lambda)$ и $K_z(z, \mu)$

$$\int_0^b \int_0^c Du K_y(y, \lambda) K_z(z, \mu) dy dz = \tilde{f} \quad x \in (0, a); \quad (1.5)$$

$$\int_0^b \int_0^c R_{x0} u K_y(y, \lambda) K_z(z, \mu) dy dz = \tilde{\varphi}_{x0} \quad x = 0;$$

$$\int_0^b \int_0^c R_{xa} u K_y(y, \lambda) K_z(z, \mu) dy dz = \tilde{\varphi}_{xa} \quad x = a, \quad (1.6)$$

а вместо искомой функции $u = u(x, y, z)$ вводится ее изображение (трансформанта) с теми же ядрами $K_y(y, \lambda)$ и $K_z(z, \mu)$

$$\tilde{u}_x(x, \lambda, \mu) = \int_0^b \int_0^c u(x, y, z) K_y(y, \lambda) K_z(z, \mu) dy dz \quad (1.7)$$

(R_{x0}, R_{xa} – операторы граничных условий на гранях $x = 0$, $x = a$, соответственно;

$$\tilde{f} = \tilde{f}(x, \lambda, \mu) = \int_0^b \int_0^c f(x, y, z) K_y(y, \lambda) K_z(z, \mu) dy dz$$

$$\text{и } \tilde{\varphi}_{x0} = \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y, z) K_y(y, \lambda) K_z(z, \mu) dy dz \Big|_{x=0},$$

$$\tilde{\varphi}_{xa} = \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y, z) K_y(y, \lambda) K_z(z, \mu) dy dz \Big|_{x=a}$$

– трансформанты известных функций $f = f(x, y, z)$ и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ в пространстве изображений).

2. Функции ядер преобразования $K_y(y, \lambda) = \{K_{y_i}(y)\}$ и $K_z(z, \mu) = \{K_{z_j}(z)\}$ ($i, j = 1, 2, \dots$) определяются как собственные функции следующих двух однородных одномерных задач Штурма – Лиувилля, выделенных из постановки (1.3) – (1.4):

$$[D_y - \lambda^2]K_y = 0 \quad y \in (0, b), \quad (1.8)$$

$$R_{y0}K_y = 0 \quad (y = 0), \quad R_{yb}K_y = 0 \quad (y = b); \quad (1.9)$$

$$[D_z - \mu^2]K_z = 0, \quad z \in (0, c), \quad (1.10)$$

$$R_{z0}K_z = 0 \quad (z = 0), \quad R_{zc}K_z = 0 \quad (z = c). \quad (1.11)$$

3. Трансформанта преобразования $\tilde{u}(x, \lambda, \mu)$ (1.7) определяется из решения неоднородной одномерной краевой задачи (1.5) – (1.6) с учетом ядер преобразования, полученных из (1.8) – (1.9), (1.10) – (1.11), и применения процедуры интегрирования по частям.

4. Искомое решения задачи $u(x, y, z)$ (оригинал) определяется по полученной трансформанте $\tilde{u}(x, \lambda, \mu) = \{\tilde{u}_{ij}(x)\}_{i,j=1,2,\dots}$ и функциям ядер $K_y(y, \lambda) = \{K_{yi}(y)\}$, $K_z(z, \mu) = \{K_{zj}(z)\}$ в результате обратного преобразования вида

$$u(x, y, z) = \sum_{i,j=1,2,\dots} \tilde{u}_{ij}(x) K_{yi}^*(y) K_{zj}^*(z) \quad (1.12)$$

($K_{yi}^*(y)$, $K_{zj}^*(z)$ – собственные функции ядер преобразования $K_{yi}(y)$, $K_{zj}(z)$ или функции, связанные с ними определенными соотношениями нормировки и веса [3]).

Таким образом, для задач, допускающих разделение переменных (1.3), (1.4), применение метода КИП сводится к следующему:

построение и решение двух однородных задач на собственные значения (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) для определения ядер преобразования;

построение и решение одной одномерной неоднородной задачи (1.5), (1.6) по определению трансформанты преобразования;

конструирование искомого решения $u(x, y, z)$ в результате обратного преобразования в виде ряда (1.12).

Основное отличие предлагаемого здесь варианта метода КИП* по сравнению с классическим связано с иным подходом к определению ядер преобразования $K_{yi}(y)$, $K_{zj}(z)$. Суть здесь в том, что кроме описанного интегрального преобразования (1.5) – (1.6) по переменным y и z относительно трансформанты $\tilde{u}_x = \{\tilde{u}_{xi}\}_{i=1,2,\dots,l}$ строятся еще два преобразования исходной задачи (1.1) – (1.2): по переменным x и z относительно трансформанты $\tilde{u}_y = \{\tilde{u}_{yi}(y)\}_{i=1,2,\dots,l}$ и по переменным x и y относительно трансформанты $\tilde{u}_z = \{\tilde{u}_{zi}(z)\}_{i=1,2,\dots,l}$. При этом ядра преобразований выбираются следующим образом: \tilde{u}_y , \tilde{u}_z для преобразования по y, z ; \tilde{u}_x , \tilde{u}_z для преобразования по x, z и \tilde{u}_x , \tilde{u}_y для преобразования по x, y , а искомое решение задачи определяется обратным преобразованием в виде конечного отрезка ряда (1.12)

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1,2,\dots,l} \tilde{u}_{xi}(x) \tilde{u}_{yi}(y) \tilde{u}_{zi}(z). \quad (1.13)$$

Таким образом, в предлагаемом варианте КИП* задача (1.1) – (1.2) с учетом (1.13) сводится к некоторой новой структуре – системе трех взаимосвязанных интегральных преобразований относительно неизвестных функций $\tilde{u}_x = \{\tilde{u}_{xi}\}_{i=1,2,\dots,l}$, $\tilde{u}_y = \{\tilde{u}_{yi}(y)\}_{i=1,2,\dots,l}$, $\tilde{u}_z = \{\tilde{u}_{zi}(z)\}_{i=1,2,\dots,l}$ следующего вида:

$$\int_0^b \int_0^c \left(D \sum_{i=1,2,\dots,l} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - f \right) \tilde{u}_{yk} \tilde{u}_{zk} dy dz = 0, \quad x \in (0, a); \quad (1.14)$$

$$\int_0^b \int_0^c \left(R \sum_{i=1,2,\dots,I} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - \varphi \right) \tilde{u}_{yk} \tilde{u}_{zk} dydz \Big|_{x=0} = 0, \quad x=0;$$

$$\int_0^b \int_0^c \left(R \sum_{i=1,2,\dots,I} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - \varphi \right) \tilde{u}_{yk} \tilde{u}_{zk} dydz \Big|_{x=a} = 0, \quad x=a; \quad (1.15)$$

$$\int_0^a \int_0^c \left(D \sum_{i=1,2,\dots,I} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - f \right) \tilde{u}_{xk} \tilde{u}_{zk} dx dz = 0, \quad y \in (0, b); \quad (1.16)$$

$$\int_0^a \int_0^c \left(R \sum_{i=1,2,\dots,I} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - \varphi \right) \tilde{u}_{xk} \tilde{u}_{zk} dx dz \Big|_{y=0} = 0, \quad y=0;$$

$$\int_0^a \int_0^c \left(R \sum_{i=1,2,\dots,I} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - \varphi \right) \tilde{u}_{xk} \tilde{u}_{zk} dx dz \Big|_{y=b} = 0, \quad y=b; \quad (1.17)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(D \sum_{i=1,2,\dots,I} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - f \right) \tilde{u}_{xk} \tilde{u}_{yk} dx dy = 0, \quad z \in (0, c); \quad (1.18)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(R \sum_{i=1,2,\dots,I} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - \varphi \right) \tilde{u}_{xk} \tilde{u}_{yk} dx dy \Big|_{z=0} = 0, \quad z=0;$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(R \sum_{i=1,2,\dots,I} \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} - \varphi \right) \tilde{u}_{xk} \tilde{u}_{yk} dx dy \Big|_{z=c} = 0, \quad z=c \quad (1.19)$$

$$(k = 1, 2, \dots, I).$$

Каждая из указанных неизвестных (пусть, для определенности, $\tilde{u}_x = \{\tilde{u}_{xi}(x)\}_{i=1,2,\dots,I}$) играет в полученной системе двоякую роль: в одном преобразовании (преобразовании (1.14) – (1.15)) она фигурирует как искомая трансформанта, а в двух других ((1.16) – (1.17), (1.18) – (1.19)) – как ядро преобразования по переменной x . Аналогичную роль играют и функции $\tilde{u}_y = \{\tilde{u}_{yi}\}_{i=1,2,\dots,I}$, $\tilde{u}_z = \{\tilde{u}_{zi}(z)\}_{i=1,2,\dots,I}$. С другой стороны, в каждом преобразовании (пусть, для определенности, (1.16) – (1.17)) содержатся все неизвестные функции $\tilde{u}_x = \{\tilde{u}_{xi}\}_{i=1,2,\dots,I}$, $\tilde{u}_y = \{\tilde{u}_{yi}(y)\}_{i=1,2,\dots,I}$, $\tilde{u}_z = \{\tilde{u}_{zi}(z)\}_{i=1,2,\dots,I}$, но одна из них $-\tilde{u}_y = \{\tilde{u}_{yi}\}_{i=1,2,\dots,I}$ – является искомой как трансформанта этого преобразования, а две другие $-\tilde{u}_x = \{\tilde{u}_{xi}(x)\}_{i=1,2,\dots,I}$, $\tilde{u}_z = \{\tilde{u}_{zi}(z)\}_{i=1,2,\dots,I}$ – фигурируют как ядра преобразований.

Каждое из преобразований (1.14) – (1.19) представляет собой линейную краевую задачу $2I$ порядка относительно неизвестных функций «своей» трансформанты, так что (1.14) – (1.19) в целом может быть представлена в виде следующей системы 3-х одномерных неоднородных краевых задач:

$$\sum_{i=1,\dots,I} (L_x \tilde{u}_{xi} - \tilde{f}_{xk}) = 0, \quad x \in (0, a); \quad (1.20)$$

$$\sum_{i=1,\dots,I} (R_0 \tilde{u}_{xi} - \tilde{\varphi}_{0k}) = 0 \quad (x=0); \quad \sum_{i=1,\dots,I} (R_a \tilde{u}_{xi} - \tilde{\varphi}_{ak}) = 0 \quad (x=a); \quad (1.21)$$

$$\sum_{i=1,\dots,I} (L_y \tilde{u}_{yi} - \tilde{f}_{yk}) = 0, \quad y \in (0, b); \quad (1.22)$$

$$\sum_{i=1, \dots, I} (R_0 \tilde{u}_{yi} - \tilde{\varphi}_{0k}) = 0 \quad (y=0); \quad \sum_{i=1, \dots, I} (R_b \tilde{u}_{yi} - \tilde{\varphi}_{bk}) = 0 \quad (y=b); \quad (1.23)$$

$$\sum_{i=1, \dots, I} (L_z \tilde{u}_{zi} - \tilde{f}_{zk}) = 0, \quad z \in (0, c); \quad (1.24)$$

$$\sum_{i=1, \dots, I} (R_0 \tilde{u}_{zi} - \tilde{\varphi}_{0k}) = 0 \quad (z=0); \quad \sum_{i=1, \dots, I} (R_c \tilde{u}_{zi} - \tilde{\varphi}_{ck}) = 0 \quad (z=c); \quad (1.25)$$

$$((k=1, 2, \dots, I).$$

Здесь $L_x = \{L_{xik}\}$ ($i, k = \overline{1, I}$) – матричный дифференциальный оператор по переменной x , элементы которого имеют вид

$$L_{xik} = A_{2ik}^{(x)} \frac{d^2}{dx^2} + A_{1ik}^{(x)} \frac{d}{dx} + A_{0ik}^{(x)}, \quad \text{где } A_{2ik}^{(x)} = \int_0^b \int_0^c a_{11}(x, y, z) \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi} \tilde{u}_{yk} \tilde{u}_{zk} dy dz;$$

$$A_{1ik}^{(x)} = \int_0^b \int_0^c (2a_{12}(x, y, z) \tilde{u}'_{yi} \tilde{u}_{zi} + 2a_{13}(x, y, z) \tilde{u}_{yi} \tilde{u}'_{zi} + a_1(x, y, z) \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi}) \tilde{u}_{yk} \tilde{u}_{zk} dy dz;$$

$$A_{0ik}^{(x)} = \int_0^b \int_0^c (a_{22}(x, y, z) \tilde{u}''_{yi} \tilde{u}_{zi} + 2a_{23}(x, y, z) \tilde{u}'_{yi} \tilde{u}'_{zi} + a_{33}(x, y, z) \tilde{u}_{yi} \tilde{u}''_{zi} +$$

$$+ a_2(x, y, z) \tilde{u}'_{yi} \tilde{u}'_{zi} + a_3(x, y, z) \tilde{u}_{yi} \tilde{u}'_{zi} + a_0(x, y, z) \tilde{u}_{yi} \tilde{u}_{zi}) \tilde{u}_{yk} \tilde{u}_{zk} dy dz;$$

$\tilde{f}_{xk} = \tilde{f}_{xk}(x)$ – трансформанта функции $f(x, y, z)$ по переменным y и z , содержащая информацию из граничных условий по этим переменным согласно процедуре интегрирования по частям; $\tilde{\varphi}_{0k}$, $\tilde{\varphi}_{ak}$ – трансформанты функции $\varphi(x, y, z)$, заданной на гранях $x=0$ и $x=a$; операторы граничных условий преобразуются соответствующим образом; обозначения «'» и «''» означают производные первого и второго порядков от указанных функций одной переменной.

Аналогичный вид имеют операторы $L_y = \left\{ L_{yik} = A_{2ik}^{(y)} \frac{d^2}{dy^2} + A_{1ik}^{(y)} \frac{d}{dy} + A_{0ik}^{(y)} \right\}$ и $L_z = \left\{ L_{zik} = A_{2ik}^{(z)} \frac{d^2}{dz^2} + A_{1ik}^{(z)} \frac{d}{dz} + A_{0ik}^{(z)} \right\}$ в одномерных краевых задачах (1.16), (1.17) и (1.18), (1.19).

Система типа (1.20) – (1.25) из двух одномерных задач, соответствующая двум интегральным преобразованиям вида (1.14) – (1.19), была получена в [13] при применении КИП* к двумерной задаче изгиба неоднородных пластин. Там же подробно обсуждался итерационный метод ее решения. Заметим также, что к подобным структурам из систем взаимосвязанных одномерных задач сводилось применение обобщенного метода Канторовича – Власова (другое название – метод полных систем) в [11, 12], где также обсуждались особенности решения таких систем. В следующем параграфе этот вопрос будет рассмотрен применительно к задаче статики анизотропных призм.

Подводя итог вышеизложенному, отметим следующее.

В предлагаемом варианте обобщенного метода КИП* функции $\tilde{u}_x = \{\tilde{u}_{xi}\}_{i=1,2,\dots,I}$, $\tilde{u}_y = \{\tilde{u}_{yi}(y)\}_{i=1,2,\dots,I}$, $\tilde{u}_z = \{\tilde{u}_{zi}(z)\}_{i=1,2,\dots,I}$, как составляющие обратного преобразования (1.13), попеременно играют роль трансформант и ядер преобразований. В построенных для их определения трех интегральных преобразованиях (1.14) – (1.19) равнозначно учтена исходная информация по всем трем переменным области x , y и z , содержащаяся в коэффициентах и правых частях дифференциального уравнения и

граничных условий исходной задачи (1.1) – (1.2). При таком подходе не накладываются какие-либо ограничения типа (1.3) – (1.4), необходимые для применения классического метода КИП. Класс решаемых задач существенно расширяется за счет снятия требования построения собственных функций задачи, как ядер преобразования, так что этот вариант метода КИП может быть применен к задачам с неразделяющимися переменными.

§2. Постановка задачи о деформировании анизотропной призмы и алгоритм ее решения обобщенным методом КИП*

Рассмотрим упругое анизотропное тело в форме прямоугольной призмы, занимающее в декартовой системе координат область $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y, z : |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}$. Внутри области на тело действует вектор объемных сил $\bar{q} = \{q_p\}$ ($p = 1, 2, 3$), а в каждой точке поверхности $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_g$ могут быть заданы вектор перемещений \bar{u}^* (на $\partial\Omega_u$) или вектор напряжений $\bar{g}_n = \{g_{pn}\}$ ($p = 1, 2, 3$) (на $\partial\Omega_g$) (n – внешняя нормаль к поверхности; индексы 1, 2, 3 соответствуют направлениям по координатным осям x, y, z).

Определение напряженно-деформированного (НДС) такой призмы сводится к решению следующей трехмерной краевой задачи:

$$L\bar{U} + \bar{q} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega; \quad (2.1)$$

$$R\bar{U} + \bar{\varphi} = 0, \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad (2.2)$$

где $L = D^T CD$ – матричный дифференциальный оператор, построенный по основным соотношениям теории упругости анизотропного тела [4], $C = \{c_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) – матрица упругих постоянных обобщенного закона Гука в форме $\bar{\sigma} = C\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ и $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\}$ – векторы напряжений и деформаций, формально составленные из компонент соответствующих тензоров с учетом их симметрии; $\bar{U} = \{u_p(x, y, z)\}$ ($p = 1, 2, 3$) – искомый вектор перемещений точек тела, R – матричный дифференциальный ($R = D_{\partial\Omega}^T \bar{\sigma}$) или алгебраический оператор граничных условий, $D_{\partial\Omega}$ – матрица направляющих косинусов внешней нормали n к поверхности $\partial\Omega$,

$$D_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} \cos(n, x) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(n, y) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n, z) \\ 0 & \cos(n, z) & \cos(n, y) \\ \cos(n, z) & 0 & \cos(n, x) \\ \cos(n, y) \cos(n, x) & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\varphi} = \begin{cases} \bar{g}_n, & (x, y, z) \in \partial\Omega_g \\ -\bar{u}^*, & (x, y, z) \in \partial\Omega_u \end{cases};$$

все векторы предполагаются вектор-столбцами.

Согласно предложенному обобщенному методу КИП* искомое решение задачи, как обратное преобразование этого метода, имеет вид (1.13) для каждой компоненты вектора перемещений $\bar{U} = \{u_p(x, y, z)\}$ ($p = 1, 2, 3$), т.е.

$$\bar{U} = \{u_p(x, y, z) = f_{pi}(x, y, z) = \sum_{i=1}^l X_{pi}(x) Y_{pi}(y) Z_{pi}(z)\}, \quad (2.3)$$

где функции $X_{pi}(x)$ являются трансформантами преобразования по переменным u и z , а также ядрами в преобразованиях по x, z и x, y ; аналогично, функции $Y_{pi}(y)$ являются трансформантами преобразования по переменным x и z , а также ядрами в преобразованиях по y, z и x, y , а функции $Z_{pi}(z)$ являются трансформантами преобразования по переменным x и y , а также ядрами в преобразованиях по x, z и y, z .

Для удобства дальнейшего изложения введем условные вектор-функции, состоящие из трансформант-ядер одной и той же переменной, в виде $\bar{X} = \{X_{pi}(x)\}$, $\bar{Y} = \{Y_{pi}(y)\}$, $\bar{Z} = \{Z_{pi}(z)\}$ ($p=1,2,3; i=\overline{1, I}$), а для искомого вектора перемещений, в силу ограниченности отрезка рядов (2.3), примем его I -е приближение в виде $\bar{U} \approx \bar{F}_I = \{f_{pi}\}$, ($p=1,2,3$). Тогда все трансформанты-ядра в (2.3) определяются из системы трех интегральных преобразований, каждое из которых представляет собой одномерную краевую задачу по «своей» переменной относительно «своей» трансформанты. Эта новая структура может быть записана в следующем виде:

$$\int_{-b}^b \int_{-c}^c (L\bar{F}_I + \bar{q}) Y_{pk} Z_{pk} dy dz = 0 \rightarrow L_x \bar{X} + \bar{q}_x = 0, \quad x \in (-a, a); \quad (2.4)$$

$$\int_{-b}^b \int_{-c}^c (R_x \bar{F}_I + \bar{\varphi}_x) Y_{pk} Z_{pk} dy dz = 0 \rightarrow R_x \bar{X} + \bar{\varphi}_x = 0, \quad x = \mp a; \quad (2.5)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-c}^c (L\bar{F}_I + \bar{q}) X_{pk} Z_{pk} dx dz = 0 \rightarrow L_y \bar{Y} + \bar{q}_y = 0, \quad y \in (-b, b); \quad (2.6)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-c}^c (R_y \bar{F}_I + \bar{\varphi}_y) X_{pk} Z_{pk} dx dz = 0 \rightarrow R_y \bar{Y} + \bar{\varphi}_y = 0, \quad y = \mp b; \quad (2.7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b (L\bar{F}_I + \bar{q}) X_{pk} Y_{pk} dx dy = 0 \rightarrow L_z \bar{Z} + \bar{q}_z = 0, \quad z \in (-c, c); \quad (2.8)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b (R_z \bar{F}_I + \bar{\varphi}_z) X_{pk} Y_{pk} dx dy = 0 \rightarrow R_z \bar{Z} + \bar{\varphi}_z = 0, \quad z = \mp c. \quad (2.9)$$

Здесь $L_x = \{l_{sp}\}$ ($s, p=1, 2, 3$) – блочная матрица, каждый блок которой $l_{sp} = \{l_{ik}^{(sp)}\}_{i,k=\overline{1, I}}$ есть матричный дифференциальный оператор второго порядка по переменной x вида

$$l_{ik}^{(sp)} = A_{2ik}^{(sp)} \frac{d^2}{dx^2} + A_{1ik}^{(sp)} \frac{d}{dx} + A_{0ik}^{(sp)}. \quad (2.10)$$

Соответствующим образом записываем матричный оператор граничных условий:

$$R_x = \left\{ r_{xik}^{(sp)} = r_{x1ik}^{(sp)} \frac{d}{dx} + r_{x0ik}^{(sp)} \right\}. \quad (2.11)$$

В системе (2.4), (2.5) $\bar{q}_x = \{q_{xp,k}\}$ и $\bar{\varphi}_x = \{\varphi_{xp,k}\}$ – векторы свободных членов системы дифференциальных уравнений и граничных условий. Коэффициенты в операторах (2.10), (2.11) и компоненты векторов \bar{q}_x и $\bar{\varphi}_x$ зависят от функций $Y_{pk}(y)$ и $Z_{pk}(z)$. Для наглядности приведем выражения для некоторых коэффициентов этих операторов в случае однородного тела с прямолинейной анизотропией общего вида:

$$\begin{aligned}
A_{2ik}^{(11)} &= c_{11} \int_{-b-c}^b \int_{-c}^c Y_{li} Y_{lk} Z_{li} Z_{lk} dy dz ; \\
A_{1ik}^{(11)} &= c_{15} \int_{-b}^b Y_{li} Y_{lk} dy \int_{-c}^c (Z'_{li} Z_{lk} - Z_{li} Z'_{lk}) dz + c_{16} \int_{-c}^c Z_{li} Z_{lk} dz \int_{-b}^b (Y'_{li} Y_{lk} - Y_{li} Y'_{lk}) dy ; \\
A_{0ik}^{(11)} &= \\
&= -c_{66} \int_{-b-c}^b \int_{-c}^c Y'_{li} Y'_{lk} Z_{li} Z_{lk} dy dz - c_{55} \int_{-b-c}^b \int_{-c}^c Y_{li} Y_{lk} Z'_{li} Z'_{lk} dy dz - c_{56} \int_{-b-c}^b \int_{-c}^c (Y'_{li} Y_{lk} Z_{li} Z'_{lk} + Y_{li} Y'_{lk} Z'_{li} Z_{lk}) dy dz ; \\
q_{x1,k} &= \int_{-b-c}^b \int_{-c}^c q_1(x, y, z) Y_{lk} Z_{lk} dy dz + Z_{lk} \Big|_c \cdot \int_{-b}^b g_{1z}^+ Y_{lk} dy - Z_{lk} \Big|_{-c} \cdot \int_{-b}^b g_{1z}^- Y_{lk} dy + \\
&+ Y_{lk} \Big|_b \cdot \int_{-c}^c g_{1y}^+ Z_{lk} dz - Y_{lk} \Big|_{-b} \cdot \int_{-c}^c g_{1y}^- Z_{lk} dz . \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Аналогичную структуру имеют операторы с индексами y и z в задачах (2.6), (2.7) и (2.8), (2.9) с тем лишь отличием, что дифференцирование ведется по переменной y в L_y , R_y и по переменной z в L_z , R_z , а коэффициенты в дифференциальных операторах зависят от функций $X_{pk}(x)$ и $Z_{pk}(z)$ в задаче (2.6), (2.7) и от функций $X_{pk}(x)$ и $Y_{pk}(y)$ в задаче (2.8), (2.9).

Например, в задаче (2.6) имеем

$$\begin{aligned}
A_{2ik}^{(11)} &= c_{66} \int_{-a-c}^a \int_{-c}^c X_{li} X_{lk} Z_{li} Z_{lk} dx dz ; \\
&\dots\dots\dots \\
A_{0ik}^{(33)} &= -c_{33} \int_{-a-c}^a \int_{-c}^c X_{3i} X_{3k} Z'_{3i} Z'_{3k} dx dz - c_{55} \int_{-a-c}^a \int_{-c}^c X'_{3i} X'_{3k} Z_{3i} Z_{3k} dx dz - \\
&- c_{35} \int_{-a-c}^a \int_{-c}^c (X_{3i} X'_{3k} Z'_{3i} Z_{3k} + X'_{3i} X_{3k} Z_{3i} Z'_{3k}) dx dz , \tag{2.13}
\end{aligned}$$

а в задаче (2.8) –

$$\begin{aligned}
A_{2ik}^{(11)} &= c_{55} \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b X_{li} X_{lk} Y_{li} Y_{lk} dx dy , \\
&\dots\dots\dots \\
A_{0ik}^{(33)} &= -c_{44} \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b X_{3i} X_{3k} Y'_{3i} Y'_{3k} dx dy - c_{55} \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b X'_{3i} X'_{3k} Y_{3i} Y_{3k} dx dy - \\
&- c_{45} \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b (X'_{3i} X_{3k} Y_{3i} Y'_{3k} + X_{3i} X'_{3k} Y'_{3i} Y_{3k}) dx dy . \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Таким образом, каждая одномерная задача в (2.4) – (2.9) представляет собой систему $3I$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $3I$ функций одной переменной с соответствующими граничными условиями. Взаимосвязь между одномерными задачами по разным переменным области осуществляется посредством коэффициентов вида (2.12) – (2.14).

Для решения системы (2.4) – (2.9) в работе используется итерационный процесс типа Гаусса – Зейделя по следующей схеме (j – параметр итерации):

$$L_x^{(j-1)}\bar{X}^{(j)} + \bar{q}_x^{(j-1)} = 0, \quad x \in (-a, a); \quad (2.15)$$

$$R_x^{(j-1)}\bar{X}^{(j)} + \bar{\varphi}_x^{(j-1)} = 0, \quad x = \mp a; \quad (2.16)$$

$$L_y^{(j-1)}\bar{Y}^{(j)} + \bar{q}_y^{(j-1)} = 0, \quad y \in (-b, b); \quad (2.17)$$

$$R_y^{(j-1)}\bar{Y}^{(j)} + \bar{\varphi}_y^{(j-1)} = 0, \quad y = \pm b; \quad (2.18)$$

$$L_z^{(j)}\bar{Z}^{(j)} + \bar{q}_z^{(j)} = 0, \quad z \in (-c, c); \quad (2.19)$$

$$R_z^{(j)}\bar{Z}^{(j)} + \bar{\varphi}_z^{(j)} = 0, \quad z = \pm c \quad (2.20)$$

$$(j = 1, 2, \dots).$$

На j -ом шаге процесса индекс $(j-1)$ при операторах $L_x^{(j-1)}$, $R_x^{(j-1)}$ и векторах свободных членов $q_x^{(j-1)}$, $\bar{\varphi}_x^{(j-1)}$ означает, что функции $Y_{pk}(y)$ и $Z_{pk}(z)$ для вычисления коэффициентов по формулам (2.12) используем с предыдущего $(j-1)$ -го шага приближения. Эти индексы имеют аналогичный смысл в остальных операторах и векторах системы (2.17) – (2.20). В качестве начального приближения $Y_{pi}^{(0)}$, $Z_{pi}^{(0)}$ ($p = 1, 2, 3$; $i = \overline{1, I}$) могут быть использованы любые линейно независимые по i функции. Решение отдельной одномерной краевой задачи, в общем случае, находим численно (здесь используем метод ортогональной прогонки). Завершение итерационного процесса решения системы (2.15) – (2.20) при фиксированном числе членов обратного преобразования $I = fixed$ в (2.3) проводим по обычному критерию прикладной математики

$$\left| 1 - \frac{\gamma^j}{\gamma^{j-1}} \right| \leq \varepsilon \quad (\gamma^j = \max \{ \gamma_p^j \} \quad (p = 1, 2, 3)), \quad (2.21)$$

где γ_p^j – максимальное или среднеквадратичное значение функций f_{pi}^j по (2.3), ε – заданная точность вычислений трансформант-ядер $\bar{X} = \{X_{pi}(x)\}$, $\bar{Y} = \{Y_{pi}(y)\}$, $\bar{Z} = \{Z_{pi}(z)\}$ ($p = 1, 2, 3$; $i = \overline{1, I}$).

Заданная точность определения искомого перемещения $\bar{U} = \{u_p(x, y, z)\}$ ($p = 1, 2, 3$) достигается путем увеличения числа членов I в обратном преобразовании (2.3). Контроль за ее достижением осуществляем аналогично условию (2.21) для I и $I+1$.

§3. Тестирование разработанного подхода.

Исходя из представленного выше алгоритма решения трехмерных линейных краевых задач, обязательными условиями получения решения по КИП* являются два следующие:

- сходимость итерационного процесса определения трансформант-ядер (2.15) – (2.20) при фиксированном числе членов I обратного преобразования (2.3);
- устойчивость (сходимость) обратного преобразования (2.3) с возрастанием числа удерживаемых в нем членов I .

К настоящему времени не получено, к сожалению, теоретического обоснования предложенного подхода с дедуктивной оценкой погрешности решения, его сходимости, существования и т.п. Для оценки работоспособности метода КИП* в данной работе используем практическое обоснование, основанное на индуктивных приемах прикладной математики, в частности, сравнении с решениями тестовых задач. В каче-

стве тестовых выбираем частные задачи рассматриваемого класса, имеющие точное решение или решение, полученное на принципиально иной теоретической основе. Здесь для такого сравнения выбрана одна из простейших задач теории упругости – задача о растяжении анизотропного стержня осевой силой, приложенной к его концу [4].

Рассмотрим призматический стержень квадратного сечения $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y, z : |x| \leq a, |y| \leq b, z \in [0, l]\}$, один конец которого $z = 0$ – жестко защемлен, а на другом $z = l$ приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности p , приводящая к равнодействующей силе $P = p \cdot s$, направленной по оси стержня (s – площадь поперечного сечения стержня). В этом случае задача имеет точное аналитическое решение такого вида:

$$u_x(x, y, z) = \frac{P}{s}(a_{13}x + 0,5a_{36}y); \quad u_y(x, y, z) = \frac{P}{s}(a_{23}y + 0,5a_{36}x);$$

$$u_z(x, y, z) = \frac{P}{s}(a_{35}x + a_{34}y + a_{33}z),$$

где u_x, u_y, u_z – перемещения по соответствующим координатным осям, a_{ik} – упругие постоянные (коэффициенты деформации) в обобщенном законе Гука $\bar{\varepsilon} = A\bar{\sigma}$, $A = \{a_{ik}\}$ ($i, k = \overline{1, 6}$). Тестирование проведено для ортотропного материала (три плоскости упругой симметрии), материала с одной плоскостью упругой симметрии разной ориентации и материала общего типа. Для иллюстрации вычислительных аспектов метода результаты решения задачи приводятся для двух случаев – ортотропного материала (I) и анизотропного материала общего вида (II). Расчеты представлены для следующих значений исходных данных: $a = 5$; $l/a = 20$.

$$\text{I} - \tilde{a}_{11} = 0,4739; \tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{13} = -0,1185; \tilde{a}_{22} = 18,87; \tilde{a}_{23} = -4,717; \tilde{a}_{44} = 76,92;$$

$$\tilde{a}_{55} = \tilde{a}_{66} = 38,46;$$

$$\text{II} - \tilde{a}_{11} = 18,82; \tilde{a}_{12} = -3,88; \tilde{a}_{13} = -1,51; \tilde{a}_{14} = -2,83; \tilde{a}_{15} = 0,49; \tilde{a}_{16} = -4,76;$$

$$\tilde{a}_{22} = 18,95; \tilde{a}_{23} = 2,61; \tilde{a}_{24} = 16,75; \tilde{a}_{25} = -4,45; \tilde{a}_{26} = -6,56;$$

$$\tilde{a}_{33} = 5,11; \tilde{a}_{34} = 10,68; \tilde{a}_{35} = 8,30; \tilde{a}_{36} = 4,49;$$

$$\tilde{a}_{44} = 44,70; \tilde{a}_{45} = 0,27; \tilde{a}_{46} = 7,17; \tilde{a}_{55} = 36,46; \tilde{a}_{56} = 25,76; \tilde{a}_{66} = 72,26.$$

Структура матрицы A в случае II является триклинной (triclinic materials), а приведенные значения коэффициентов соответствуют случаю волокнистого композита с характеристиками

$$E_1 = 2,11E_0; E_2 = E_3 = 0,053E_0; G_{12} = G_{13} = 0,026; G_{23} = 0,013; \nu = 0,25, \quad (3.1)$$

оси упругости которого повернуты по отношению к геометрическим осям $0x, 0y, 0z$ на угол $\psi = 15^\circ$ относительно оси $0y$ и на угол $\theta = 75^\circ$ относительно оси $0x$; в случае I ортотропный материал ориентирован по осям стержня; $\tilde{a}_{ik} = a_{ik}E_0$.

Сходимость итерационного процесса (2.15) – (2.20) по определению трансформант-ядер в зависимости от шага итерации j ($j = 1, 2, \dots$) для фиксированного количества членов в обратном преобразовании (2.3) иллюстрируется данными табл. 1 (материал I) и табл. 2 (материал II), а сходимость (установление) обратного преобразования (2.3) в зависимости от числа членов $I = 1, 2, \dots$ для случая анизотропии общего вида иллюстрируется табл. 3. В таблицах приведены значения тангенциальных ($\tilde{u}_x(\tilde{x}, \tilde{y})$,

$\tilde{u}_y(\tilde{x}, \tilde{y})$) и осевых ($\tilde{u}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$) перемещений в разных точках плоскости $\tilde{z} = z/l = 1, 0$, где эти функции имеют наибольшие значения ($\tilde{u}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) = u_x(-0,5a; 0,5a) \cdot 10^{-3} E_0 / p$, $\tilde{u}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) = u_y(-0,5a; -0,5a) \cdot 10^{-3} E_0 / p$, $\tilde{u}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) = u_z(0,5a; 0,5a) \cdot 10^{-3} E_0 / p$, $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{y} = y/a$). В последней строке каждой таблицы содержатся значения точного аналитического решения по [4].

Таблица 1

j	$I = 1$			$I = 2$		
	$\tilde{u}_x \cdot 10^2$	$\tilde{u}_y \cdot 10$	\tilde{u}_z	$\tilde{u}_x \cdot 10^2$	$\tilde{u}_y \cdot 10$	\tilde{u}_z
1	0,031	0,121	1,490	0,020	0,017	1,885
2	0,204	0,509	1,841	0,061	0,213	1,885
3	0,062	0,236	1,885	0,059	0,236	1,885
4	0,059	0,236	1,885	0,059	0,236	1,885
5	0,059	0,236	1,885	0,059	0,236	1,885
[4]	0,059	0,236	1,887	0,059	0,236	1,887

Таблица 2

j	$I = 1$			$I = 4$		
	\tilde{u}_x	\tilde{u}_y	\tilde{u}_z	\tilde{u}_x	\tilde{u}_y	\tilde{u}_z
1	0,002	0,007	0,107	0,017	0,015	0,127
2	0,011	0,026	0,126	0,018	0,026	0,143
3	0,024	0,026	0,137	0,019	0,024	0,144
4	0,025	0,027	0,141	0,019	0,024	0,144
5	0,025	0,027	0,143	0,019	0,024	0,144
6	0,025	0,027	0,143			
[4]	0,019	0,024	0,146	0,019	0,024	0,146

Таблица 3

I	\tilde{u}_x	\tilde{u}_y	\tilde{u}_z
1	0,025	0,027	0,145
2	0,019	0,024	0,144
3	0,019	0,024	0,144
4	0,019	0,024	0,144
[4]	0,019	0,024	0,146

Как видно из приведенных данных, итерационный процесс решения системы взаимосвязанных интегральных преобразований (2.15) – (2.20) устанавливается в данной задаче достаточно быстро для разного числа членов I в (2,3); (3 – 5 итераций). При этом искомое решения (2.3) для максимального значения осевого перемещения устанавливается, начиная с $I = 2$ с погрешностью порядка 0,1% и 1% для ортотропного и анизотропного случаев, соответственно.

Для наглядности сравнения с точным решением для анизотропного материала II на рис. 1 приведено распределение тангенциальных и осевых перемещений на ребре $\tilde{y} = 0,5; \tilde{z} = 1,0$ по переменной $\tilde{x} \in [-0,5; 0,5]$ (а) и на ребре $\tilde{x} = 0,5; \tilde{z} = 1,0$ по переменной $\tilde{y} \in [-0,5; 0,5]$ (б). Черными точками нанесены точные значения функций-перемещений (в аналитическом решении задачи и в решении по КИП* имеется некоторое различие в реализации условий закрепления грани $z = 0$, которые учтены при сравнении результатов).

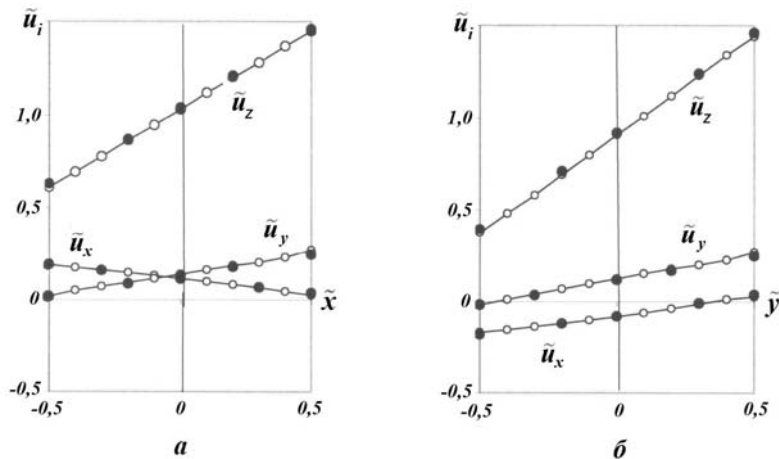


Рис. 1

Приведенные примеры подтверждают, что полученные по методу КИП* результаты являются качественно правильными и количественно достаточно точными.

§4. Анализ деформирования анизотропной призмы.

Применение разработанного варианта КИП* проиллюстрируем на задаче о деформировании анизотропной прямоугольной призмы $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y, z : x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$ с двумя жестко защемленными смежными боковыми гранями $x = 0, y = 0$, свободными противоположными гранями $x = a, y = b$ при действии на верхней лицевой грани $z = c$ нормального равномерно распределенного давления интенсивности p_0 . На нижней лицевой поверхности $z = 0$ имеется упругая опора, локализованная в подобласти $\Omega_0 \cup \partial\Omega_0 = \{x, y : |x - x_0| \leq dx, |y - y_0| \leq dy\}$, которая моделируется упругим винклеровским основанием с кусочно однородным коэффициентом постели $K_p(x, y)$:

$$K_p(x, y) = \begin{cases} C_p, & (x, y) \in \Omega_0; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_0; \end{cases}$$

(x_0, y_0 – координаты центра опоры, $2dx, 2dy$ – ее размеры по соответствующим осям, C_p – жесткость основания).

Принятые граничные условия записываем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0 & \text{ при } x = 0, y = 0; \\ \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{xx} = 0 & \text{ при } x = a \text{ и } \sigma_{yx} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{yy} = 0 \text{ при } y = b; \\ \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} + K_p(x, y)u_z = 0 & \text{ при } z = 0; \\ \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = -p_0 & \text{ при } z = c. \end{aligned}$$

Материалом призмы является волокнистый композит с характеристиками (3.1), лежащий в плоскости $z = \text{const}$ и ориентированный под углом $\varphi \in [0, \pi/2]$ к оси $0x$ по всей ее высоте. При $\varphi \neq 0, \varphi \neq \pi/2$ материал призмы в геометрических осях выбранной системы координат может трактоваться как анизотропный с одной плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной к оси $0z$.

Исследуем деформирование призмы при разном расположении упругой опоры в зависимости от свойств материала, определяемых углом φ .

Сложность постановки задачи, не допускающей разделение переменных, связана со следующими ее особенностями: наличием неоднородности в виде локализованной упругой опоры на грани $z = 0$, типом граничных условий, наличием смешанных производных ввиду анизотропии материала при $\varphi \neq 0, \varphi \neq \pi/2$.

Решение задачи приведем для квадратной в плане призмы ($a = b$), двух вариантов расположения опор – центрального ($x_0 = y_0 = a/2$) и углового ($x_0 = y_0 = 0,9a$), углов ориентации композита $\varphi = 0, \varphi = \pi/4, \varphi = \pi/2$ при $a = b = 1l_0, c/a = 0,5; dx = dy = 0,1a; \Omega_0/\Omega = 0,04; C_p = 2l_0/E_0$ (l_0 – характерный линейный размер).

Результаты решения представлены на рис. 2 в виде распределения нормальных перемещений $u_z^* = [u_z(x, y, c)]/[u_z(a, b, c)|_{C_p=0, \varphi=\pi/4}]$ на верхней лицевой грани $z = c$ по ребру $y = a; z = c$ (рис. 2 а, б, в) и в центральном сечении и $y = a/2; z = c$ (рис. 2, г, д, е) при отсутствии опоры (I), центральной (II) и угловой (III) опорах для $\varphi = 0$ (рис. 2 а, г), $\varphi = \pi/4$ (рис. 2, б, д) и $\varphi = \pi/2$ (рис. 2, в, е) ($u_z(a, b, c)|_{C_p=0, \varphi=\pi/4}$ – перемещение угловой точки $x = a, y = a, z = c$ при отсутствии опоры и $\varphi = \pi/4$). Случаи $\varphi = 0$ (рис. 2, а, г) и $\varphi = \pi/2$ (рис. 2, в, е) соответствуют двум ортогонально ориентированным ортотропным материалам, при $\varphi = \pi/4$ (рис. 2, б, д) и заданных граничных условиях призма характеризуется диагональной симметрией относительно плоскости $x = y$.

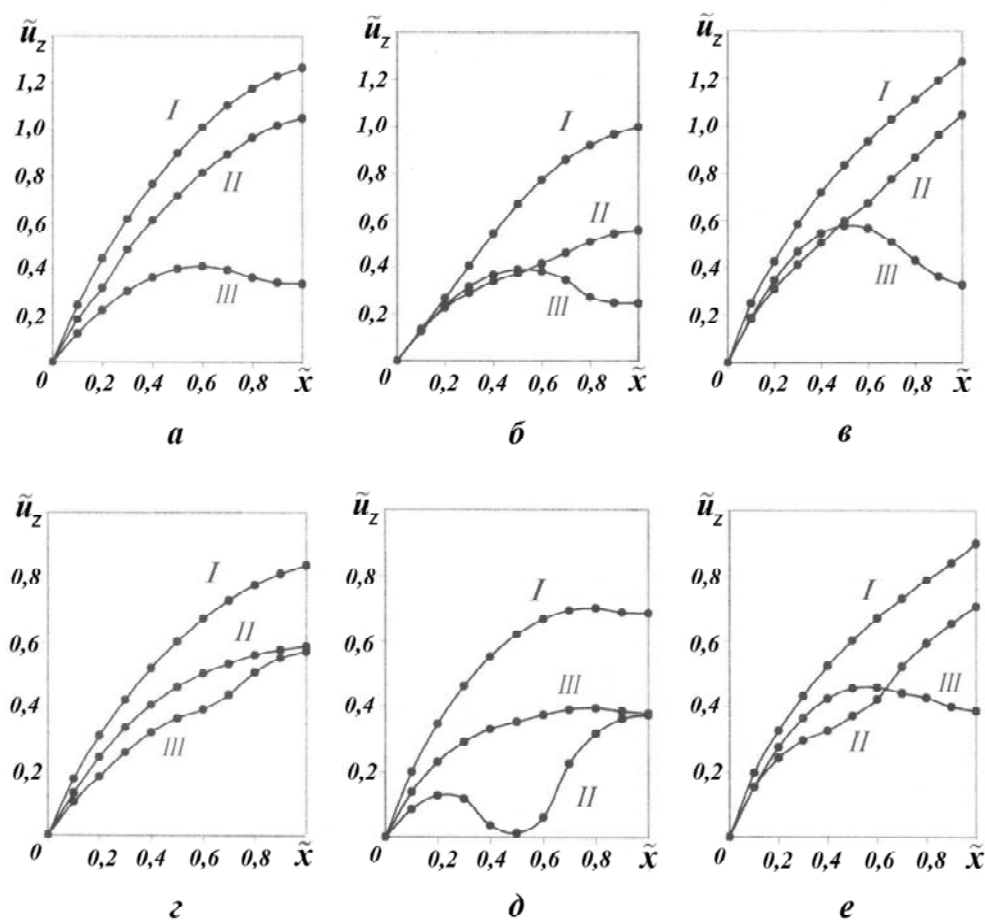


Рис. 2

При отсутствии опоры (I) рассматриваемые перемещения практически во всех случаях представлены монотонно возрастающими функциями. При этом анизотропия материала ($\varphi = \pi/4$) и наличие диагональной симметрии снижает их максимальные значения, примерно на 20% по сравнению с ортотропными случаями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$.

Наличие центральной опоры (II) существенно влияет также в случае анизотропного материала, снижая величины максимальных перемещений на ребре практически вдвое, в то время, как для ортотропных случаев различия составляют порядка $\approx 15\%$ (рис. 2, а, в) для ребра и $\approx 25\% - 30\%$ – для центрального сечения (рис. 2, г, е). Сложный характер перемещений при центральной опоре наблюдается, естественно, в центральном сечении, особенно для анизотропного материала (рис. 2, д, II).

Наличие угловой опоры влияет наиболее существенно на ребре призмы $y = a$; $z = c$ (рис. 2 а, б, в). Для всех материалов это немонотонные кривые, причем наибольшее снижение перемещений (3,5 – 4,5 раза) по сравнению с отсутствием опоры имеет место в угловой точке (а, а, с).

Полученная картина распределения перемещения по оси Oz на внешней грани призмы $z = a$ при наличии опор и разных свойствах материала не противоречит интуитивным физическим представлениям.

Заключение.

В работе предложен новый вариант метода КИП для решения трехмерных линейных краевых задач эллиптического типа, реализованный применительно к исследованию деформирования анизотропной призмы с низким порядком симметрии упругих свойств и любыми условиями на ограничивающих поверхностях.

Отметим основные особенности предложенного варианта по сравнению с классическим методом КИП.

Классический метод КИП позволяет получить точное аналитическое решение задачи в виде бесконечного ряда при определенных ограничениях на ее постановку. Ограничения связаны с требованием выбора ядер преобразования в виде собственных функций задач Штурма – Лиувилля по переменным преобразования. Это, с одной стороны, позволяет достаточно просто получить функции трансформанты из распавшейся системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а с другой – существенно сужает класс решаемых задач.

Предлагаемый обобщенный вариант метода КИП дает приближенное решение задачи в виде конечного отрезка ряда, не накладывая указанные ограничения на ее постановку. И трансформанта, и ядра в этом варианте метода определяются из взаимосвязанной системы трех идентичных интегральных преобразований по разным комбинациям пар независимых переменных области. Такой подход, с одной стороны, связан с дополнительными принципиальными трудностями решения полученной системы интегральных преобразований, а с другой, существенно расширяет класс задач, доступных решению классическим методом КИП. Таким образом, основным недостатком подхода является относительная сложность определения составляющих обратного преобразования, основным достоинством – возможность решения задач без каких-либо ограничений на операторы дифференциальных уравнений и граничных условий.

Тестирование разработанного подхода, проведенное путем сравнения с точными решениями частных задач, подтвердило правомерность его использования в рассматриваемом классе анизотропных упругих тел.

РЕЗЮМЕ. На основі ідеології методів скінченних інтегральних перетворень розроблено новий підхід до розв'язання тривимірних лінійних крайових задач еліптичного типу з нероздільними змінними. Його суть полягає в побудові зв'язаної системи трьох інтегральних перетворень за трьома парами незалежних змінних області, з якої визначаються трансформанти та ядра перетворень. Підхід реалізовано в задачах статки анізотропних призм з низьким порядком симетрії пружних властивостей та будь-якими умовами на обмежуючих поверхнях. Проведено тестування підходу та аналіз деформування конкретних тіл даного класу.

1. Гринберг Г.А. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных // Изв. АН СССР, серия физ. – 1946. – № 10. – С. 141 – 168.
2. Дыхта В.В. Метод интегральных преобразований в волновых задачах гидроакустики. – К.: Наук. думка, 1981. – 285 с.

3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962. – 767 с.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1977. – 416 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая шк., 1967. – 599 с.
6. Сеицкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1985. – 176с.
7. Сеицкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований. Его перспективы в исследовании краевых задач механики (обзор) // Вестник СамГТУ Серия: Математическая, 2003. – вып. 22. – С. 10 – 39.
8. Сеицкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Известия Саратовского университета. Новая серия. Матем., механ., информатика. – 2011. – № 3(1). – С. 61 – 89.
9. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 403 с.
10. Чибиряков В.К., Смоляр А.М. Об одном обобщении метода конечных интегральных преобразований в теории толстых пластин // Сопротивление материалов и теория сооружений : респ. межвед. науч. сб. – Киев : Будівельник, 1983. – Вып. 42. – С. 80 – 86.
11. Bepalova E.I., Kitaygorodskii A.B. Advanced Kantorovich's method for biharmonic problems // J. Engng. Math. – 2003. – 46. – P. 213 – 226.
12. Bepalova E., Urusova G. Solution of the Lamé Problem by the Complete Systems Method // Int. J. for Computation Methods in Engineering Science and Mechanics. – 2013. – 14, N 2. – P. 159 – 167.
13. Bepalova E.I. On the Method of Finite Integral Transforms in Problems of Statics of Inhomogeneous Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 6. – P. 651 – 663.
14. Bidgoli A. M., Daneshmehr A. R., Kolahchi R. Analytical bending solution of full clamped orthotropic rectangular plates resting on elastic foundations by the finite integral transform method // J. of Applied and Computational Mechanics. – 2015. – 1, N 2. – P. 52 – 58.
15. Dernek N. On the solution of the e.p.d. equation using finite integral transformations // Turkish J. of Mathematics. – 1997. – 21. – P. 317 – 324.
16. Eringen A.C. The finite Sturm-Liouville transform // Quart. J. of Math. – 1954. – 2, N 5. – P. 120 – 131.
17. Eringen A.C. Transform technique for boundary value problems in fourth-order partial differential equations // Quart. J. of Math. – 1955. – 6, N 24. – P. 241 – 249.
18. Fabrikant V.I. Application of generalized images method to contact problems for a transversely isotropic elastic layer on a smooth half – space // Archive of Applied Mechanics. – 2011. – 81, N 7. – P. 957 – 974.
19. Gasymov E.A. Application of the finite integral transform method to solving a mixed problem with integrodifferential conditions for a nonclassical equation // Differential Equations. – 2011. – 47, N 3. – P. 319 – 332.
20. Kubenko V.D. A Non-stationary Problem for Elastic Half-plane under Mixed Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 2. – P. 105 – 118.
21. Kubenko V.D. Nonstationary Deformation of an Elastic Layer with Mixed Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P. 563 – 580.
22. Lamb H. On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid // Phil. Trans. Roy. Soc. of London, Ser. A. – 1904. – 203. – P. 1 – 42.
23. Li R., Zhong Y., Tian B., Liu Y. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates // Applied Mathematics Letters. – 2009. – 22. – P. 1821 – 1827.
24. Ruan J., Feng X., Zhang G., Wang Y., Fang D. Dynamic Thermoelastic Analysis of a Slab Using Finite Integral Transformation Method // AIAA Journal. – 2010. – 48, N 8. – P. 1833 – 1839.
25. Shevchenko Yu.N., Savchenko V.G. 3-D problems of Thermoviscoplasticity: Focus on Ukrainian Studies // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 3. – P. 217 – 271.
26. Singh S., Jain P.K. Finite integral transform method to solve asymmetric heat conduction in a multilayer annulus with time-dependent boundary conditions // Nuclear Engineering and Design. – 2011. – 241, is.1. – P. 144 – 154.
27. Sneddon I.N. Fourier Transforms. – New York: McGraw–Hill Book Company Inc., 1951. – 542 p.
28. Sneddon, I. N. The Use of Integral Transforms. – New York: McGraw-Hill, 1972. – 539 p.
29. Sneddon, I. N., Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1975. – 426p.
30. Tranter C.J. Integral transforms in mathematical physics. – New York: Wiley, 1951. – 204 p.

Поступила 20.03.2017

Утверждена в печать 10.10.2017