

Л. П. Хорошун

**ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ СВОЙСТВА ЗЕРНИСТЫХ  
СТОХАСТИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ  
С ДЕФЕКТАМИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА КОМПОНЕНТОВ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина: e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A problem on effective elastic properties of the stochastic matrix composite is considered. The interface conditions are assumed in the form of presence of porous interphase layers between the matrix and quasispherical inclusions, which are accepted as the third component. An approach, is used in which the three-component material is reduced to a two-component one by replacing the inclusions with the interphase layer by the composite inclusions with equivalent or effective properties. The composite inclusions are modeled by a two-component matrix material, where the inclusions and the matrix have elastic moduli and volume fractions of the corresponding real inclusions and interphase layers. A dependence of bulk compression and shear effective moduli on the volume fractions of inclusions and porosity of the interphase layers is investigated.

**Key words:** stochastic composite, multicomponent material, effective elastic properties, equivalent properties, imperfect interface conditions, porous interphase layers.

**Введение.**

Эффективные свойства и напряженно-деформированное состояние (НДС) композитных материалов (КМ) при заданных нагрузках определяются соответствующими свойствами компонентов (фаз), геометрическими параметрами структуры и характером связи между компонентами. Объемное комбинирование различных материалов с определенными известными свойствами в виде тех или иных структур позволяет создавать КМ с требуемыми свойствами для изготовления ряда конструкций и сооружений на основе известных технологий. Для достижения высоких показателей жесткости и прочностных свойств КМ необходимо обеспечить максимальное нагружение армирующих элементов (дисперсных частиц и волокон). Это требует надлежащего сцепления (адгезии) их с матрицей, которое в идеальном варианте описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений при переходе через границу раздела фаз и носит название совершенных условий на межфазной границе [8, 15, 16]. Большинство работ по прогнозированию эффективных упругих свойств КМ исходят из этой идеальной модели контакта на межфазной границе.

В действительности условия на межфазной границе могут отличаться от совершенного контакта, описываемого непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений. Это связано с недостаточным и неравномерным сцеплением матрицы с армирующими частицами и волокнами. Для усиления сцепления и смачивания поверхности наполнителей связующим их покрывают аппретирующими веществами, свойства которых отличаются от соответствующих свойств матрицы и включений [3]. В зоне сцепления матрицы и наполнителя на некоторых участках возможно образование микротрещин и микропор вследствие недостаточного смачивания поверхности наполнителя связующим или аппретом, а также повреждаемости, вызываемой нагрузками в процессе эксплуатации. Эти факторы свидетельствуют о том, что два контактирующих компонента в реальном КМ разделены не поверхностью, а некоторым мате-

риальным слоем с дефектами в виде микротрещин и микропор. Поэтому моделирование сцепления компонентов совершенными (идеальными) условиями контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений на межфазной границе (поверхности) может приводить к серьезным погрешностям при прогнозировании эффективных упругих свойств КМ, что обусловило появление ряда работ с различными вариантами несовершенных условий контакта матрицы и включений [4 – 6, 9, 10, 12 – 14, 19 – 22].

Адекватная модель несовершенных условий контакта матрицы и включения базируется на представлении, что между матрицей и включением существует межфазный материальный слой с некоторыми свойствами, отличными от свойств матрицы и включения [6, 14], причем на поверхностях раздела слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Это дает основание рассматривать межфазный слой как третью фазу. Однако точные аналитические решения задачи о НДС и эффективных свойствах композитных материалов с такой моделью межфазного контакта возможны только в случае сферических и бесконечных цилиндрических невзаимодействующих включений или имеющих регулярное расположение. Поэтому проявился интерес к приближенным моделям [6, 13, 14], в которых межфазный слой заменяется межфазной поверхностью, разделяющей матрицу и включение и называемой «несовершенной межфазной поверхностью» ввиду несовершенности условий контакта в отличие от «совершенной межфазной поверхности» с совершенными условиями контакта. При этом постоянные, входящие в условия на «несовершенной межфазной поверхности» зависят от свойств межфазного слоя.

Здесь наметились чисто гипотетический подход [13], предполагающий существование скачка перемещений на «несовершенной границе» и его пропорциональность непрерывным поверхностным напряжениям, а также асимптотическое разложение по толщине межфазного слоя уравнений модели соответствующего контакта [6, 14]. Наличие аналитического обоснования, а также скачков как перемещений так и поверхностных напряжений на «несовершенной границе» во втором подходе дает основание считать его более адекватным приближением к исходной модели с межфазным слоем.

При прогнозировании эффективных свойств КМ, образованного матрицей и включениями с межфазным слоем, применяется подход, в котором трехфазный материал сводится к двухфазному путем замены включения с межфазным слоем эквивалентным включением, т.е. имеющим эквивалентные или эффективные свойства композитного включения [14]. Это дает возможность использовать известные результаты по вычислению эффективных свойств двухфазных материалов.

Если же исходить из приближенных моделей, где матрицу и включение разделяет межфазная поверхность с несовершенными условиями контакта, зависящими от свойств межфазного слоя, то понятие эквивалентного включения теряет смысл, так как оно тождественно исходному однородному включению с его свойствами.

Наличие дефектов в виде микротрещин и микропор в зонах контакта включений и матрицы подтверждает актуальность исследования НДС в окрестности как единичных трещин на границе раздела сред, так и систем трещин [7, 11, 18], а также исследование образования микротрещин и микропор вследствие повреждаемости и их влияния на эффективные свойства композитных материалов [17].

В данной работе рассмотрена задача об эффективных упругих свойствах зернистых композитных материалов стохастической структуры с дефектами на межфазной границе в виде микропор. Межфазная граница моделируется межфазным слоем, упругие свойства которого отличаются от свойств включений и матрицы. На поверхностях раздела слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Межфазные слои рассматриваются как третий компонент, состоящий из аппретирующих покрытий, приповерхностных частей матрицы и включений, а также дефектов в виде микротрещин и микропор. При этом микротрещины моделируются микропорами, так как некоторая часть материала в окрестности микротрещины не несет нагрузку.

В основу построения положены стохастические уравнения в перемещениях и напряжениях для многокомпонентного материала с изотропными компонентами, которые приводятся к стохастическим интегральным уравнениям, соответственно, отно-

сительно деформаций и напряжений. Методом условных моментов в пренебрежении флуктуациями деформаций и напряжений в пределах компонента задача сводится к системам алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций или напряжений. В случае статистической изотропии упругих свойств многокомпонентного КМ решение систем алгебраических уравнений определены в аналитическом виде. При этом эффективные упругие свойства являются изотропными и зависят от упругих свойств компонентов, их объемных содержаний и выбора упругого тела сравнения. Анализ решения задачи для двухкомпонентного матричного композита показывает, что упругие модули объемного сжатия и сдвига тела сравнения следует принимать в виде математических ожиданий соответствующих модулей упругости композита в случае более жесткой матрицы по сравнению с включениями. В противоположном случае следует принимать упругие податливости тела сравнения в виде математических ожиданий соответствующих податливостей компонентов.

На основе изложенной теории исследованы эффективные упругие свойства трехкомпонентного композитного материала, состоящего из матрицы, включений и межфазных пористых слоев. Используется подход, в котором трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному путем замены включений с межфазным слоем эффективными композитными включениями с эквивалентными или эффективными упругими свойствами. Композитные включения моделируются двухкомпонентным матричным материалом, где включения и матрица имеют упругие модули и объемные содержания, соответственно, реальных включений и межфазных слоев. Построены кривые зависимостей эффективных модулей объемного сжатия и сдвига от объемного содержания включений и пористости межфазных слоев.

### §1. Исходные уравнения.

Будем исходить из представления, что композитный материал состоит как минимум из трех компонентов – матрицы, включений и межфазных слоев между матрицей и включениями. При этом на поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта, обеспечивающие непрерывность перемещений и поверхностных напряжений [16]. Так как в реальных зернистых композитных материалах форма дисперсных включений отклоняется от идеально сферической, их пространственное расположение отклоняется от регулярного, а толщина и структура межфазных слоев не являются одинаковыми для каждого их участка, то макрообъем КМ можно моделировать микронеоднородным материалом стохастической структуры, где размеры микронеоднородностей структурных элементов пренебрежимо малы по сравнению с размерами макрообъема. Тогда физико-механические свойства КМ описываются статистически однородными случайными функциями координат, а основная задача сводится к определению эффективных (макроскопических) физико-механических свойств макрообъема КМ. Если макрообъем композитного материала находится в условиях однородных макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  или макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , определение эффективных упругих свойств композитного материала стохастической структуры [16] в линейной постановке сводится к уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.1)$$

соотношениям упругости

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (1.2)$$

и Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.3)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – соответственно, тензоры напряжений и деформаций;  $u_i$  – вектор перемещений;  $\lambda_{ijmn}$  – тензор модулей упругости, являющийся заданной случайной функцией координат. Тензорное поле модулей упругости  $\lambda_{ijmn}$  принимаем статистически

однородным, поэтому напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  также будут статистически однородными. Масштабы корреляции случайных полей  $\lambda_{ijmn}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  пренебрежимо малы по сравнению с макрообъемом, поэтому они удовлетворяют свойству эргодичности, т.е. усреднение случайных полей по области определения совпадает с усреднением по ансамблю реализаций.

Для  $N$ -компонентного КМ с объемным содержанием и тензором модулей упругости  $k$ -компонента, соответственно,  $c_k$  и  $\lambda_{ijmn}^k$  одноточечная плотность распределения модулей упругости имеет вид

$$f(\lambda_{ijmn}) = \sum_{k=1}^N c_k \delta(\lambda_{ijmn} - \lambda_{ijmn}^k), \quad (1.4)$$

а совместная плотность распределения модулей упругости и деформаций определяются согласно теореме умножения вероятностей равенством

$$f(\lambda_{ijmn}, \varepsilon_{pq}) = f(\lambda_{ijmn}) f(\varepsilon_{pq} | \lambda_{ijmn}), \quad (1.5)$$

где  $f(\varepsilon_{pq} | \lambda_{ijmn})$  – условная плотность распределения деформаций. С учетом (1.2), (1.4), (1.5) приходим к выражению

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^N c_k \lambda_{ijmn}^k \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle, \quad (1.6)$$

определяющему тензор эффективных модулей упругости при известных зависимостях средних по компонентам деформаций  $\langle \varepsilon_{mn}^k \rangle$  от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$  макрообъема.

Если вместо тензора модулей упругости компонентов задан тензор упругих податливостей  $s_{ijmn}^k = (\lambda_{ijmn}^k)^{-1}$ , то аналогично соотношениям (1.4) – (1.6) имеют место формулы

$$f(s_{ijmn}) = \sum_{k=1}^N c_k \delta(s_{ijmn} - s_{ijmn}^k); \quad f(s_{ijmn}, \sigma_{pq}) = f(s_{ijmn}) f(\sigma_{pq} | s_{ijmn});$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^N c_k s_{ijmn}^k \langle \sigma_{mn}^k \rangle, \quad (1.7)$$

которые определяют тензор эффективных упругих податливостей при известных зависимостях средних по компонентам напряжений  $\langle \sigma_{mn}^k \rangle$  от макронапряжений  $\langle \sigma_{mn} \rangle$  макрообъема.

Если заданы макродеформации  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  макрообъема композита, то, подставляя (1.3), (1.2) в (1.1), приходим к уравнениям равновесия в перемещениях

$$(\lambda_{ijmn} u_{m,n})_{,j} = 0. \quad (1.8)$$

и граничным условиям на поверхности макрообъема

$$u_i |_S = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j. \quad (1.9)$$

Если на границе макрообъема композита заданы макронапряжения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , то задача об эффективных упругих постоянных формулируется в напряжениях

$$e_{ikl} e_{jmn} (s_{lnpq} \sigma_{pq})_{,km} = 0, \quad (1.10)$$

которые следуют из уравнений совместности деформаций, где  $s_{ijmn} = \lambda_{ijmn}^{-1}$  – тензор упругих податливостей;  $e_{ikl}$  – единичный антисимметричный тензор Леви – Чивита. На границе макрообъема задаются поверхностные напряжения

$$\sigma_{ij} n_j |_s = \langle \sigma_{ij} \rangle n_j. \quad (1.11)$$

Исходя из представления напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0; \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0, \quad (1.12)$$

приведем уравнение (1. 8) и граничное условие (1.9) соответственно к виду

$$\lambda_{ijmn}^c u_{m,nj}^0 + (\lambda'_{ijmn} \varepsilon_{mn})_{,j} = 0; \quad u_i^0 |_S = 0; \quad \lambda'_{ijmn} = \lambda_{ijmn} - \lambda_{ijmn}^c, \quad (1.13)$$

где  $\lambda_{ijmn}^c$  – тензор модулей упругости однородного тела сравнения. Пользуясь тензорной функцией Грина, удовлетворяющей уравнениям

$$\lambda_{ijmn}^c G_{mk,jn} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + \delta (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \delta_{ik} = 0, \quad G_{mk} |_{S^{(1)}} = 0, \quad (1.14)$$

краевую задачу (1.13) приведем к интегральному уравнению относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijpq} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \lambda'_{pqmn}{}^{(2)} \varepsilon_{mn}^{(2)}. \quad (1.15)$$

Здесь действие интегрального оператора  $K_{ijpq}$  определяется формулой

$$K_{ijpq} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \varphi^{(2)} = \int_{V^{(2)}} G_{(ip,j)q} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \varphi^{(2)} dV^{(2)} + \int_{S^{(2)}} G_{(ip,j)} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) n_q^{(2)} \varphi^{(2)} dS^{(2)} \quad (1.16)$$

причем индекс в круглых скобках сверху обозначает соответствующую точку пространства;  $n_q$  – направляющие косинусы нормали.

Усредним уравнение (1.15) по условной плотности  $f(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \lambda_{ijmn}^{(2)} |_{\nu}^{(1)})$  (плотность распределения деформаций в точках  $x_r^{(1)}, x_r^{(2)}$  и модулей упругости в точке  $x_r^{(2)}$  при условии, что точка  $x_r^{(1)}$  находится в  $\nu$ -компоненте). Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, приходим к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^N K_{ijpq}^{\nu k} \lambda'_{pqmn}{}^k \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (1.17)$$

Здесь матричный оператор  $K_{ijpq}^{\nu k}$  определяется формулой

$$K_{ijpq}^{\nu k} = K_{ijpq} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) p_{\nu k} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}), \quad (1.18)$$

где  $p_{\nu k} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) = f \left( \begin{smallmatrix} (2) \\ k \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} (1) \\ \nu \end{smallmatrix} \right)$  – вероятность перехода из  $\nu$ -компонента в точке  $x_r^{(1)}$  в  $k$ -компонент в точке  $x_r^{(2)}$ , которая удовлетворяет условиям

$$c_k p_{k\nu} (x_i) = c_{\nu} p_{\nu k} (x_i); \quad \sum_{k=1}^N p_{\nu k} (x_i) = 1; \quad p_{\nu k} (0) = \delta_{\nu k}; \quad p_{\nu k} (\infty) = c_k. \quad (1.19)$$

Отсюда следует представление

$$\begin{aligned}
p_{vk}(x_i) &= c_k + (\delta_{vk} - c_k)\varphi_{vk}(x_i); \quad \varphi_{vk}(x_i) = \varphi_{kv}(x_i); \\
\varphi_{vv}(x_i) &= \sum_{k=1}^N c_k \varphi_{vk}(x_i); \quad \varphi_{vk}(0) = 1; \quad \varphi_{vk}(\infty) = 0.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Для КМ с изотропными компонентами имеем

$$\lambda_{ijmn}^k = 3K_k V_{ijmn} + 2\mu_k D_{ijmn} \quad (k=1, \dots, N); \quad \lambda_{ijmn}^c = 3K_c V_{ijmn} + 2\mu_c D_{ijmn}, \tag{1.21}$$

где  $K_k, \mu_k, K_c, \mu_c$  – соответственно, модули объемного сжатия и сдвига  $k$ -компонента и тела сравнения,  $V_{ijmn}, D_{ijmn}$  – объемная и девиаторная составляющие единичного тензора  $I_{ijmn}$ , т.е.

$$\begin{aligned}
I_{ijmn} &= V_{ijmn} + D_{ijmn}; \quad V_{ijmn} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}; \quad D_{ijmn} = \frac{1}{2}\left(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}\right) \\
&\quad (i, j, m, n = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Если вероятности перехода  $p_{vk}(x_i)$  зависят только от модуля вектора  $x_i$ , то зернистый материал с изотропными компонентами будет изотропным в макрообъеме. В этом случае из (1.18), (1.19) получим

$$K_{ijpq}^{vk} = L_{ijpq}(\delta_{vk} - c_k); \quad L_{ijpq} = -\frac{1}{5\mu_c(3K_c + \mu_c)}[5\mu_c V_{ijpq} + 3(K_c + 2\mu_c)D_{ijpq}]. \tag{1.23}$$

С учетом (1.4), (1.5), (1.22) уравнение (1.17) можно представить в виде

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + L_{ijpq} \left( \lambda'_{pqmn}{}^v \langle \varepsilon_{mn}^v \rangle - \langle \lambda'_{pqmn} \varepsilon_{mn} \rangle \right), \tag{1.24}$$

откуда после некоторых преобразований находим решение

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle &= (I_{ijmn} - L_{ijmn} \lambda'_{mnpq}{}^v)^{-1} \left\langle (I_{pqrs} - L_{pq\alpha\beta} \lambda'_{\alpha\beta rs})^{-1} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{rs} \rangle \\
&\quad (v = 1, 2, \dots, N; \quad i, j, p, q, m, n, r, s, \alpha, \beta = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Вводя замену

$$\bar{\lambda}_{ijmn} = -(L_{ijmn}^{-1} + \lambda_{ijmn}^c), \tag{1.26}$$

приведем выражение (1.25) к окончательному виду

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = (\lambda_{ijmn}^v + \bar{\lambda}_{ijmn})^{-1} \left\langle (\lambda_{mnpq} + \bar{\lambda}_{mnpq})^{-1} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \tag{1.27}$$

Исходя из представления (1.12), приведем уравнение (1.10) и граничное условие (1.11) к виду

$$e_{ikl} e_{jmn} s_{lnpq}^c \sigma_{pq,km}^0 + e_{ikl} e_{jmn} (s'_{lnpq} \sigma_{pq})_{,km} = 0; \quad \sigma_{ij}^0 n_j |_S = 0; \quad s'_{lnpq} = s_{lnpq} - s_{lnpq}^c, \tag{1.28}$$

где  $s_{lnpq}^c$  – тензор упругих податливостей однородного тела сравнения. Пользуясь тензорной функцией Грина, удовлетворяющей уравнениям

$$e_{ikl} e_{jmn} s_{lnpq}^c G_{pq\alpha\beta,km}^0 (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + \delta (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) I_{ij\alpha\beta} = 0; \quad G_{pq\alpha\beta} |_{S^{(1)}} = 0, \tag{1.29}$$

краевую задачу (1.27) приведем к интегральному уравнению относительно напряжений

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \langle \sigma_{ij} \rangle + R_{ijln} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + s_{lnpq}^{(2)} \sigma_{pq}^{(2)}, \quad (1.30)$$

где действие интегрального оператора  $R_{ijln}$  определяется формулой

$$\begin{aligned} R_{ijln} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \varphi^{(2)} = & - \int_{V^{(2)}} G_{ij\alpha\beta, km} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) e_{\alpha kl} e_{\beta mn} \varphi^{(2)} dV^{(2)} - \\ & - \int_{S^{(2)}} G_{ij\alpha\beta, k} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) n_m^{(2)} e_{\alpha kl} e_{\beta mn} \varphi^{(2)} dS^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Усредним уравнение (1.30) по условной плотности  $f(\sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}, s_{ijmn}^{(2)} |_{\nu}^{(1)})$  (плотность распределения напряжений в точках  $x_r^{(1)}, x_r^{(2)}$  и упругих податливостей в точке  $x_r^{(2)}$  при условии, что точка  $x_r^{(1)}$  находится в  $\nu$ -компоненте). Тогда, пренебрегая флуктуациями напряжений в пределах компонента, получим систему алгебраических уравнений относительно средних по компонентам напряжений

$$\langle \sigma_{ij}^{\nu} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^N R_{ijln}^{\nu k} s_{lnpq}^{rk} \langle \sigma_{pq}^k \rangle, \quad (1.32)$$

где матричный оператор  $R_{ijln}^{\nu k}$  определяется формулой

$$R_{ijln}^{\nu k} = R_{ijln} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) p_{\nu k} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}). \quad (1.33)$$

Для композитного материала с изотропными компонентами тензоры упругих податливостей имеют вид

$$s_{ijmn}^k = 3p_k V_{ijmn} + 2r_k D_{ijmn} \quad (k=1, \dots, N); \quad s_{ijmn}^c = 3p_c V_{ijmn} + 2r_c D_{ijmn}, \quad (1.34)$$

где  $p_k, r_k, p_c, r_c$  – соответственно, упругие податливости объемного сжатия и сдвига  $k$ -компонента и тела сравнения, которые связаны с соответствующими модулями упругости соотношениями

$$3p_k = \frac{1}{3K_k}; \quad 2r_k = \frac{1}{2\mu_k}; \quad 3p_c = \frac{1}{3K_c}; \quad 2r_c = \frac{1}{2\mu_c}, \quad (1.35)$$

а тензорная функция Грина согласно (1.29) определяется формулой

$$\begin{aligned} G_{ij\alpha\beta} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) = & \frac{1}{32\pi r_c (s_c + r_c)} \left\{ 4(s_c + r_c) \frac{I_{ij\alpha\beta}}{R} - (s_c + 2r_c) \left[ \frac{\delta_{ij}}{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})}{R^3} \right] \delta_{\alpha\beta} \right\}; \quad R^2 = (x_r^{(1)} - x_r^{(2)})(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}); \quad s_c = p_c - \frac{2}{3}r_c. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Если вероятности перехода  $p_{\nu k}(x_i)$  в (1.33) зависят только от модуля вектора  $x_i$ , то зернистый материал с упругими податливостями (1.35) будет изотропным в макро-объеме. В этом случае из (1.19), (1.20), (1.33), (1.34) определим

$$R_{ijln}^{\nu k} = M_{ijln} (\delta_{\nu k} - c_k); \quad M_{ijln} = -\frac{1}{10r_c (3p_c + r_c)} [10r_c V_{ijln} + 3(2p_c + r_c) D_{ijln}]. \quad (1.37)$$

С учетом (1.7), (1.37) уравнение (1.32) можно представить в виде

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle + M_{ijpq} \left( s'^v_{pqmn} \langle \sigma_{mn}^v \rangle - \langle s'_{pqmn} \sigma_{mn} \rangle \right), \quad (1.38)$$

откуда после некоторых преобразований получим решение

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = \left( I_{ijmn} - M_{ijmn} s'^v_{mnpq} \right)^{-1} \left\langle \left( I_{pqrs} - M_{pq\alpha\beta} s'_{\alpha\beta rs} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \langle \sigma_{rs} \rangle \quad (1.39)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, N; \quad i, j, p, q, m, n, r, s, \alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Если ввести замену

$$\bar{s}_{ijmn} = - \left( M_{ijmn}^{-1} + s_{ijmn}^c \right), \quad (1.40)$$

то решение (1.39) можно представить в окончательном виде

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = \left( s_{ijmn}^v + \bar{s}_{ijmn} \right)^{-1} \left\langle \left( s_{mnpq} + \bar{s}_{mnpq} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \langle \sigma_{pq} \rangle. \quad (1.41)$$

## §2. Эффективные упругие постоянные.

При заданных макродеформациях  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  макрообъема КМ средние деформации компонентов (1.27), согласно (1.21), (1.23), (1.26), можно представить в виде

$$\langle \varepsilon_{ij}^k \rangle = \left( \frac{1}{K_\nu + \bar{K}} \left\langle \frac{1}{K + \bar{K}} \right\rangle^{-1} V_{ijpq} + \frac{1}{\mu_\nu + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle =$$

$$= \left[ \frac{1}{K_\nu + \bar{K}} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{K_k + \bar{K}} \right)^{-1} V_{ijpq} + \frac{1}{\mu_\nu + \bar{\mu}} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1} D_{ijpq} \right] \langle \varepsilon_{pq} \rangle \quad (\nu = 1, 2, \dots, N). \quad (2.1)$$

На основе (1.6), (2.1) находим зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \left( 3K^* V_{ijpq} + 2\mu^* D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle, \quad (2.2)$$

где эффективные упругие модули объемного сжатия и сдвига определяются соотношениями

$$K^* = \left\langle \frac{K}{K + \bar{K}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{K + \bar{K}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k K_k}{K_k + \bar{K}} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{K_k + \bar{K}} \right)^{-1};$$

$$\mu^* = \left\langle \frac{\mu}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k \mu_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1}. \quad (2.3)$$

Постоянные  $\bar{K}$ ,  $\bar{\mu}$  связаны с постоянными тела сравнения, согласно (1.23), (1.26), формулами

$$\bar{K} = \frac{4}{3} \mu_c; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_c (9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)}. \quad (2.4)$$

Если на границе макрообъема композитного материала заданы макронапряжения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , то согласно (1.34), (1.37), (1.41) средние напряжения в компонентах имеют представления

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = \left( \frac{1}{p_\nu + \bar{p}} \left\langle \frac{1}{p + \bar{p}} \right\rangle^{-1} V_{ijpq} + \frac{1}{r_\nu + \bar{r}} \left\langle \frac{1}{r + \bar{r}} \right\rangle^{-1} D_{ijpq} \right) \langle \sigma_{pq} \rangle =$$



$$= \left[ \frac{1}{p_v + \bar{p}} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{p_k + \bar{p}} \right)^{-1} V_{ijpq} + \frac{1}{r_v + \bar{r}} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{r_k + \bar{r}} \right)^{-1} \right] D_{ijpq} \langle \sigma_{pq} \rangle. \quad (2.5)$$

На основе (1.7), (2.5) находим зависимости между макродеформациями и макро-напряжениями

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = (3p^* V_{ijpq} + 2r^* D_{ijpq}) \langle \sigma_{pq} \rangle, \quad (2.6)$$

где эффективные упругие податливости объемного сжатия и сдвига определяются соотношениями

$$p^* = \left\langle \frac{p}{p + \bar{p}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{p + \bar{p}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k p_k}{p_k + \bar{p}} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{p_k + \bar{p}} \right)^{-1};$$

$$r^* = \left\langle \frac{r}{r + \bar{r}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{r + \bar{r}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k r_k}{r_k + \bar{r}} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{r_k + \bar{r}} \right)^{-1}. \quad (2.7)$$

Постоянные  $\bar{p}$ ,  $\bar{r}$  связаны с постоянными тела сравнения, согласно (1.37), (1.40), формулами

$$\bar{p} = \frac{r_c}{3}; \quad \bar{r} = \frac{r_c(9p_c + 2r_c)}{3(2p_c + r_c)}. \quad (2.8)$$

В случае двухкомпонентного композитного материала эффективные постоянные (2.3), (2.7) можно представить в виде

$$K^* = \frac{K_1 K_2 + \langle K \rangle \bar{K}}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + \bar{K}}; \quad \mu^* = \frac{\mu_1 \mu_2 + \langle \mu \rangle \bar{\mu}}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}};$$

$$p^* = \frac{p_1 p_2 + \langle p \rangle \bar{p}}{c_1 p_2 + c_2 p_1 + \bar{p}}; \quad r^* = \frac{r_1 r_2 + \langle r \rangle \bar{r}}{c_1 r_2 + c_2 r_1 + \bar{r}}. \quad (2.9)$$

Учитывая (1.35), (2.4), (2.8), легко установить, что между эффективными упругими модулями и податливостями (2.3), (2.7), (2.9) имеют место соотношения

$$3p^* = \frac{1}{3K^*}; \quad 2r^* = \frac{1}{2\mu^*}. \quad (2.10)$$

При этом они зависят от упругих постоянных компонентов и тела сравнения, а также объемного содержания компонентов. Другие геометрические параметры структуры для данного вида композитных материалов в решение задачи об эффективных свойствах не входят. Это значит, что достаточно ограничиться решением лишь одной задачи – в перемещениях или напряжениях. Вопрос сводится лишь к корректному выбору тела сравнения.

Проведем анализ влияния выбора тела сравнения для двухкомпонентного матричного материала. При решении статистически нелинейных задач (1.13), (1.28) упругие постоянные тела сравнения обычно принимаются в виде математических ожиданий соответственно упругих модулей и податливостей. Если при решении задачи (1.13) принять

$$K_c = \langle K \rangle = c_1 K_1 + c_2 K_2; \quad \mu_c = \langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, \quad (2.11)$$

то согласно (1.35) будем иметь

$$p_c = \left\langle \frac{1}{p} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} \right)^{-1}; \quad r_c = \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{r_1} + \frac{c_2}{r_2} \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Аналогично, приняв

$$P_c = \langle p \rangle = c_1 p_1 + c_2 p_2; \quad r_c = \langle r \rangle = c_1 r_1 + c_2 r_2, \quad (2.13)$$

согласно (1.34) получим

$$K_c = \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1}; \quad \mu_c = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}. \quad (2.14)$$

Формулы (2.4), (2.8), (2.9), (2.11) – (2.14) дают возможность определить эффективные упругие постоянные двухкомпонентного матричного композитного материала. Для случая более жесткой матрицы по отношению к включениям следует принять (2.11), (2.12) и для противоположного случая – (2.13), (2.14). Это подтверждается предельными случаями  $K_1 = \mu_1 = 0$  (закрытые поры),  $K_1 = \mu_1 = \infty$  (абсолютно жесткие включения), где включения и матрица обозначены, соответственно, индексами 1, 2. В случае многокомпонентного КМ выбор тела сравнения является более сложной задачей.

### §3. Эффективные упругие постоянные трехкомпонентного композитного материала.

Применение соотношений (2.3), (2.7) для определения упругих постоянных трехкомпонентного композитного материала, состоящего из матрицы, включений и межфазных слоев между ними, затруднено необходимостью корректного выбора тела сравнения, определяющего постоянные  $\bar{K}$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{r}$ . Поэтому воспользуемся подходом, в котором трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному путем замены включений с межфазным слоем эффективными композитными включениями с эквивалентными или эффективными свойствами по аналогии с [13]. Композитные включения моделируем двухкомпонентным матричным материалом на основе включений и матрицы, имеющих упругие модули и объемные содержания, соответственно, реальных включений и межфазных слоев. Здесь следует иметь в виду, что в пренебрежении флуктуаций деформаций и напряжений в пределах компонента эффективные упругие постоянные (2.3), (2.7), (2.9) зависят только от упругих постоянных и объемных содержаний компонентов. Другие геометрические параметры структуры полученные выражения не содержат.

Обозначим объемные содержания, модули объемного сжатия и сдвига включений, матрицы и межфазных слоев, соответственно,  $c_1, K_1, \mu_1, c_2, K_2, \mu_2$  и  $c_3, K_3, \mu_3$ . Тогда, согласно (2.4), (2.8), (2.11) – (2.14), эффективные (эквивалентные) модули объемного сжатия и сдвига включений с межфазным слоем определяются формулами

$$K_1^* = \frac{K_1 K_3 + (s_1 K_1 + s_3 K_3) \bar{K}_{13}}{s_1 K_3 + s_3 K_1 + \bar{K}_{13}}; \quad \mu_1^* = \frac{\mu_1 \mu_3 + (s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3) \bar{\mu}_{13}}{s_1 \mu_3 + s_3 \mu_1 + \bar{\mu}_{13}}; \quad s_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_3}; \quad s_3 = \frac{c_3}{c_1 + c_3};$$

$$\bar{K}_{13} = \frac{4}{3} \mu_{13}^c; \quad \bar{\mu}_{13} = \frac{\mu_{13}^c (9K_{13}^c + 8\mu_{13}^c)}{6(K_{13}^c + 2\mu_{13}^c)}; \quad K_{13}^c = \begin{cases} s_1 K_1 + s_3 K_3, & K_1 \leq K_3; \\ \left( \frac{s_1}{K_1} + \frac{s_3}{K_3} \right)^{-1}, & K_1 \geq K_3; \end{cases}$$

$$\mu_{13}^c = \begin{cases} s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3, & \mu_1 \leq \mu_3; \\ \left( \frac{s_1}{\mu_1} + \frac{s_3}{\mu_3} \right)^{-1}, & \mu_1 \geq \mu_3. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь принимается модель двухкомпонентного матричного материала, где включение тождественно реальному включению, а межфазный слой образует матрицу.

На основе (2.4), (2.9), (3.1) определим эффективные упругие постоянные трехкомпонентного КМ, образованного матрицей, включениями и межфазными слоями

$$K^* = \frac{K_1^* K_2 + [(c_1 + c_3) K_1^* + c_2 K_2] \bar{K}_{12}^*}{(c_1 + c_3) K_2 + c_2 K_1^* + \bar{K}_{12}^*}; \quad \mu^* = \frac{\mu_1^* \mu_2 + [(c_1 + c_3) \mu_1^* + c_2 \mu_2] \bar{\mu}_{12}^*}{(c_1 + c_3) \mu_2 + c_2 \mu_1^* + \bar{\mu}_{12}^*};$$

$$\bar{K}_{12}^* = \frac{4}{3} \mu_{12}^{*c}; \quad \bar{\mu}_{12}^* = \frac{\mu_{12}^{*c} (9K_{12}^{*c} + 8\mu_{12}^{*c})}{6(K_{12}^{*c} + 2\mu_{12}^{*c})}; \quad K_{12}^{*c} = \begin{cases} (c_1 + c_3) K_1^* + c_2 K_2, & K_1^* \leq K_2; \\ \left( \frac{c_1 + c_3}{K_1^*} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1}, & K_1^* \geq K_2; \end{cases}$$

$$\mu_{12}^{*c} = \begin{cases} (c_1 + c_3) \mu_1^* + c_2 \mu_2, & \mu_1^* \leq \mu_2; \\ \left( \frac{c_1 + c_3}{\mu_1^*} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}, & \mu_1^* \geq \mu_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Объемные содержания включений, матрицы и межфазных слоев  $c_1, c_2, c_3$  определяются формулами

$$c_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2 + v_3}; \quad c_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2 + v_3}; \quad c_3 = \frac{v_3}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad (3.3)$$

где  $v_1, v_2, v_3$  – объемы, соответственно, включений, матрицы и межфазных слоев в некотором макрообъеме КМ. Если предположить, что макрообъем содержит  $n$  сферических включений радиуса  $r_0$ , а толщина межфазного слоя равна  $h$ , то приходим к выражениям

$$v_1 = \frac{4}{3} \pi n r_0^3; \quad v_3 = 4\pi n h r_0^2. \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) следует зависимость

$$c_3 = 3 \frac{h}{r_0} c_1. \quad (3.5)$$

Соотношения (3.1), (3.2), (3.5) позволяют вычислить зависимость эффективных модулей объемного сжатия и сдвига от объемного содержания включений  $c_1$  при заданных толщине  $h$  межфазного слоя и радиусе  $r_0$  сферических включений.

#### §4. Эффективные упругие постоянные композитных материалов с дефектами на межфазной границе.

Рассмотрим матричный КМ зернистой структуры в предположении наличия в межфазном слое дефектов в виде микропор. Учитывая, что часть материала в окрестности трещины не несет нагрузку, микротрещины будем моделировать микропорами. Тогда, принимая равными нулю модули упругости микропор, на основе (2.4), (2.9), (2.11) получим выражения эффективных модулей объемного сжатия и сдвига пористого межфазного слоя

$$K_3^* = \frac{4K_3\mu_3(1-p)^2}{4\mu_3 + (3K_3 - 4\mu_3)p}; \quad \mu_3^* = \frac{\mu_3(9K_3 + 8\mu_3)(1-p)^2}{9K_3 + 8\mu_3 - (3K_3 - 4\mu_3)p}, \quad (4.1)$$

где  $p$  – пористость межфазного слоя.

Эффективные модули объемного сжатия и сдвига композитных включений на основе реальных включений и пористых межфазных слоев согласно (3.1), (4.1) определяются формулами

$$K_1^* = \frac{K_1 K_3^* + (s_1 K_1 + s_3 K_3^*) \bar{K}_{13}^*}{s_1 K_3^* + s_3 K_1 + \bar{K}_{13}^*}; \quad \mu_1^* = \frac{\mu_1 \mu_3^* + (s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3^*) \bar{\mu}_{13}^*}{s_1 \mu_3^* + s_3 \mu_1 + \bar{\mu}_{13}^*};$$

$$s_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_3}; \quad s_3 = \frac{c_3}{c_1 + c_3}; \quad \bar{K}_{13}^* = \frac{4}{3} \mu_{13}^{*c}; \quad \bar{\mu}_{13}^* = \frac{\mu_{13}^{*c} (9K_{13}^{*c} + 8\mu_{13}^{*c})}{6(K_{13}^{*c} + 2\mu_{13}^{*c})}; \quad (4.2)$$

$$K_{13}^* = \begin{cases} s_1 K_1 + s_3 K_3^*, & K_1 \leq K_3^*; \\ \left( \frac{s_1}{K_1} + \frac{s_3}{K_3^*} \right)^{-1}, & K_1 \geq K_3^*; \end{cases} \quad \mu_{13}^* = \begin{cases} s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3^*, & \mu_1 \leq \mu_3^*; \\ \left( \frac{s_1}{\mu_1} + \frac{s_3}{\mu_3^*} \right)^{-1}, & \mu_1 \geq \mu_3^*. \end{cases}$$

На основе (2.4), (2.9), (4.2) находим эффективные модули объемного сжатия и сдвига композитного материала, состоящего из матрицы, включений и пористых межфазных слоев

$$K^* = \frac{K_1^* K_2 + [(c_1 + c_3) K_1^* + c_2 K_2] \bar{K}_{12}^*}{(c_1 + c_3) K_2 + c_2 K_1^* + \bar{K}_{12}^*}; \quad \mu^* = \frac{\mu_1^* \mu_2 + [(c_1 + c_3) \mu_1^* + c_2 \mu_2] \bar{\mu}_{12}^*}{(c_1 + c_3) \mu_2 + c_2 \mu_1^* + \bar{\mu}_{12}^*};$$

$$\bar{K}_{12}^* = \frac{4}{3} \mu_{12}^{*c}; \quad \bar{\mu}_{12}^* = \frac{\mu_{12}^{*c} (9K_{12}^{*c} + 8\mu_{12}^{*c})}{6(K_{12}^{*c} + 2\mu_{12}^{*c})}; \quad (4.3)$$

$$K_{12}^{*c} = \begin{cases} (c_1 + c_3) K_1^* + c_2 K_2, & K_1^* \leq K_2; \\ \left( \frac{c_1 + c_3}{K_1^*} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1}, & K_1^* \geq K_2; \end{cases} \quad \mu_{12}^{*c} = \begin{cases} (c_1 + c_3) \mu_1^* + c_2 \mu_2, & \mu_1^* \leq \mu_2; \\ \left( \frac{c_1 + c_3}{\mu_1^*} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}, & \mu_1^* \geq \mu_2. \end{cases}$$

При  $p = 0$  из (4.3) следует соотношения (3.2).

### §5. Численные результаты.

Численное исследование влияния несовершенных условий контакта компонентов на эффективные упругие свойства стохастического КМ проведено для изотропных квазисферических включений алюмоборосиликатного стекла и матрицы из отвержденного эпоксидного связующего с упругими модулями объемного сжатия и сдвига соответственно [2]

$$K_c = 33,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_c = 25 \text{ ГПа}; \quad K_s = 3,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_s = 1,111 \text{ ГПа}. \quad (5.1)$$

Вычисления проведены для несовершенных условий контакта компонентов в виде наличия межфазных пористых слоев между матрицей и включениями, рассматриваемых как третий компонент КМ. Аппретирующее покрытие включений целесообразно принимать с упругими модулями, промежуточными между модулями матрицы и включений, что обеспечивает максимальную эффективность передачи усилий от матрицы к включениям. В безразмерных единицах, представляющих отношения соответствующих модулей к модулю сдвига эпоксидной матрицы  $\mu_s$ , принимаем их, согласно (5.1), следующими:

$$K_1 = 30; \quad \mu_1 = 22,5; \quad K_2 = 3; \quad \mu_2 = 1; \quad K_3 = 16,5; \quad \mu_3 = 11,75. \quad (5.2)$$

Объемное содержание третьего компонента определяется формулой (3.5), где отношение толщины межфазного слоя  $h$  к радиусу сферического включения  $r_0$  принято равным 0,01.

На рис. 1 – 4 приведены зависимости эффективных модулей объемного сжатия  $K^*$  и сдвига  $\mu^*$  от объемного содержания включений  $c_1$  при заданных пористостях  $p$  межфазного слоя, а также от пористости  $p$  при заданных объемных содержаниях  $c_1$  включений, вычисленных согласно формул (4.1) – (4.3) и значений (5.2). Здесь объемное содержание включений  $c_1$  находится в допустимом интервале  $0 \leq c_1 < 0,97$ . Нетрудно проверить, что существуют предельные значения пористости межфазного слоя

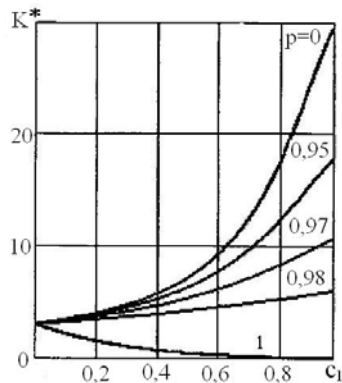


Рис. 1

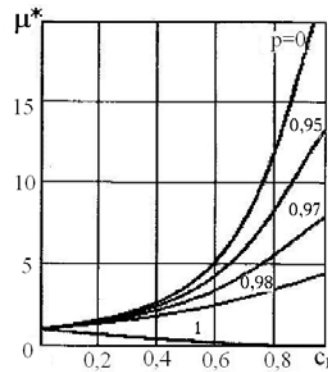


Рис. 2

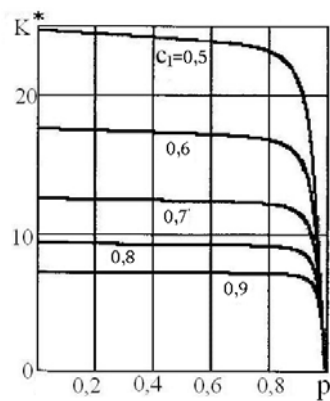


Рис. 3

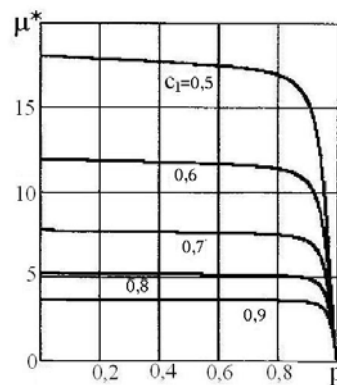


Рис. 4

$$p_1 = 0,986589; \quad p_2 = 0,991334, \quad (5.3)$$

для которых выполняются равенства

$$K^*(c_1, p_1) = 3, \quad \mu^*(c_1, p_2) = 1. \quad (5.4)$$

Это значит, что при более высоких пористостях межфазного слоя по сравнению с (5.3) увеличение объемного содержания включений приводит к уменьшению соответствующих эффективных постоянных композитного материала. Значения предельных пористостей межфазного слоя зависят от отношения  $h/r_0$ .

#### Заключение.

Необходимые свойства КМ достигаются как выбором компонентов и геометрических параметров структуры, так и осуществлением надлежащего сцепления компонентов на границе их раздела, идеальным вариантом которого являются совершенные условия контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Реальные условия контакта отличаются от совершенных, что обусловлено недостаточным и неравномерным сцеплением матрицы с наполнителем, нанесением на поверхность наполнителей аппретирующих веществ для усиления их химических связей с матрицей, возможностью образования микропустот вследствие недостаточного смачивания поверхности наполнителя связующим или аппретом, а также повреждаемости, обусловленной нагрузками и химическими реакциями в процессе эксплуатации. Поэтому адекватная модель несовершенных условий контакта матрицы и частиц наполнителя сводится к наличию между ними межфазных слоев, рассматриваемых как третий компонент, состоящий из аппретирующих покрытий, приповерхностных частей матрицы и включений, а также дефектов в виде микропустот, ослабляющих сопротивление нагрузкам. При этом на поверхностях раздела межфазных слоев с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Нерегулярность структуры трехкомпонентного КМ дает основание положить в основу стохастические уравнения в перемещениях или напряжениях для многокомпонентного материала с изотропными

компонентами, которые приводятся к стохастическим интегральным уравнениям, соответственно, относительно деформаций и напряжений. Методом условных моментов задача сводится к системам алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций или напряжений, решение которых получено в аналитическом виде в случае статистической изотропии упругих модулей. При этом эффективные упругие свойства являются изотропными и зависят от упругих свойств компонентов, их объемного содержания и упругих постоянных тела сравнения. Исследованы закономерности зависимостей упругих модулей объемного сжатия и сдвига от объемного содержания включений и пористости межфазных слоев.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто задачу про ефективні пружні властивості матричного композитного матеріалу з недосконалими умовами контакту матриці і квазісферичних включень у вигляді наявності міжфазних пористих шарів, які розглядаються як третій компонент. В основу покладено стохастичні рівняння пружності для багатокомпонентного матеріалу. Використано підхід, де трикомпонентний матеріал зводиться до двокомпонентного заміною включень з міжфазним шаром ефективними композитними включеннями з еквівалентними чи ефективними пружними властивостями. Композитні включення моделюються двокомпонентним матричним матеріалом, де включення і матриця мають пружні модулі і об'ємний вміст відповідно реальних включень і міжфазних шарів. Досліджено залежність ефективних модулів об'ємного стиску і зсуву від об'ємного вмісту включень і пористості міжфазних шарів.

1. *Ингленд А.* Трещина между двумя разными средами // Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – **32**, № 2. – С. 165 – 168.
2. *Крегерс А.Ф.* Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композит. материалов. – 1988. – №3. – С.433 – 441.
3. *Современные композиционные материалы* / Под редакцией Л.Браутмана и Р.Крока. – М.: Мир, 1970. – 672 с.
4. *Achenbach J.D., Zhu H.* Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites // J. Mech. Phys. Solids. – 1989. – **37**. – P. 381 – 393.
5. *Benveniste Y.* The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents // Mech. Mater. – 1985. – **4**. – P. 197 – 208.
6. *Benveniste Y., Miloh T.* Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // Mech. Mater. – 2001. – **33**. – P. 309 – 323.
7. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Nonclassical Problems in the Fracture Mechanics of Composites with Interacting Cracks // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 64 – 84.
8. *Eshelby J.D.* The determination of the Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems // Proc. Roy. Soc. London. – 1957. – **A241**. – P. 376 – 396.
9. *Gu S.T., He Q.C.* Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphase as imperfect interfaces // J. Mech. Phys. Solids. – 2011. – **59**. – P. 1413 – 1426.
10. *Gu S.T., Liu J.T., He Q.C.* Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities // Int. J. Solids Struct. – 2014. – **51**. – P. 2283 – 2296.
11. *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Material with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1. – P. 1 – 61.
12. *Hashin Z.* Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface // Mech. Mater. – 1990. – **8**. – P. 333 – 348.
13. *Hashin Z.* The spherical inclusion with imperfect interface // J. Appl. Mech. – 1991 – **58**. – P. 444 – 449.
14. *Hashin Z.* Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // J. Mech. Phys. Solids. – 2002. – **50**. – P. 2509 – 2537.
15. *Hill R.* Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles // J. Mech. Phys. Solids. – 1963. – **11**. – P. 357 – 372.
16. *Khoroshun L.P.* Mathematical Models and Methods of the Mechanics of Stochastic Composites (Review) // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 10. – P. 1284 – 1316.
17. *Khoroshun L.P.* Deformation and Short-Term Damage of a Physically Nonlinear Unidirectional Fibrous Composite // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 272 – 281.
18. *Khoroshun L.P.* Discretization and Numerical Solution of a Plane Problem in the Mechanics of Interfacial Cracks // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 76 – 88.
19. *Nazarenko L., Bargmann S., Stolarski H.* Lurie solution for spherical particle and spring layer model of interphases: Its application in analysis of effective properties of composites // Mech. Mater. 2016. – **96**. – P.39 – 52.
20. *Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H.* A model of cylindrical inhomogeneity with spring layer interface and its application to analysis of short-fiber composites // Composite Structures. – 2017. – **160**. – P. 635 – 652.
21. *Sangani A.S., Mo G.* Elastic interactions in particulate composites with perfect as well as imperfect interfaces // J. Mech. Phys. Solids. – 1997. – **45**. – P. 2001 – 2031.
22. *Shen L., Li J.* Homogenization of a fibre /sphere with an inhomogeneous interphase for the effective elastic moduli of composites // Proc. Roy. Soc. London. – 2005. – **A-461**. – P. 1475 – 1504.

Поступила 15.12.2016

Утверждена в печать 30.05.2017