

С. В. Босаков<sup>1</sup>, С. Генфуд<sup>2</sup>

### НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

<sup>1</sup>Белорусский научно-исследовательский институт строительства,  
ул. Ф.Скорины, 15-б, 220114, г. Минск, Беларусь; e-mail: sevibo@yahoo.com

<sup>2</sup>Лаборатория механики конструкций, Университет,  
г. Галма, Алжир; e-mail: znaio@yahoo.fr

**Abstract.** A solution of the contact problem for the circular plate of given stiffness on the elastic layer or the elastic semi-space is obtained by the Zhemochkin's method. The rotation angles of the circular stamp are tabled for action of the moment. A distribution of displacements and contact stresses in the diametral cross-section of circular plate is shown for the special case of loading by concentrated force.

**Key words:** circular plate, contact problem, half space, elastic foundation.

#### Введение.

Осесимметричным контактными задачам для кольцевого штампа посвящены многие работы [1 – 6, 11 и др.]. В [11] получены формулы для распределения контактных напряжений и перемещения кольцевого штампа на упругом полупространстве. В.М.Александров [2, 3] эту задачу решил для двух видов кольцевого штампа и получил распределение контактных напряжений в форме бесконечного ряда. Неосесимметричная контактная задача для кольцевого штампа на сложном виде упругого основания рассмотрена в статье [7]. Автором [5] осесимметричная контактная задача для кольцевой пластинки решена вариационным методом. Решения контактных задач для кольцевых пластинок рассмотрены также в [10, 17, 18].

В отечественных нормативных документах до настоящего времени отсутствуют указания по определению крена кольцевого фундамента от действия момента. В литературе имеются неподтвержденные теоретическими расчетами рекомендации [12] «... можно рекомендовать при определении крена кольцевого фундамента пользоваться при  $0 \leq a/b \leq 0,6$  формулой, полученной ранее для круга в виде  $\varphi = [3(1-\nu^2)M]/4Eb^3 \dots$ ». При расчете высотных сооружений с кольцевыми фундаментами на ветровую нагрузку по второй группе предельных состояний правильное определение крена фундамента может иметь решающее значение при проектировании.

Ниже эта контактная задача решается способом Б.Н.Жемочкина [13] при действии момента на круглый кольцевой штамп и сосредоточенной силы на круглую кольцевую пластинку конечной жесткости. При решении приняты следующие предпосылки: 1) для пластинки справедливы гипотезы технической теории изгиба [16]; 2) не учитываются касательные напряжения на контакте пластинки и упругого основания; 3) на пластинку действует только нормальная к срединной плоскости внешняя нагрузка.

#### §1. Определение перемещений границы упругого полупространства при действии единичной силы.

При использовании способа Б.Н.Жемочкина для решения рассматриваемой контактной задачи необходимо иметь выражение для определения перемещений поверхности упругого полупространства от действия единичной силы, распределенной по элементарному участку в полярных координатах (рис. 1). Это выражение получено

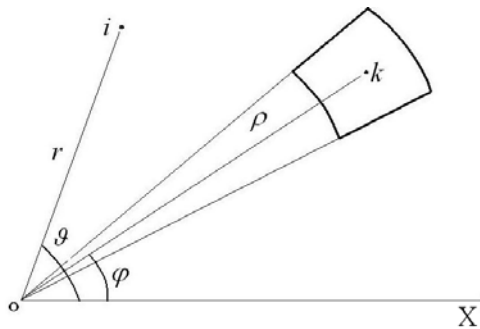


Рис. 1

путем интегрирования по площади элементарного участка известного представления решения Буссинеска в виде разложения несобственного интеграла в ряд по функциям Бесселя [9]

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos(\vartheta - \varphi) + \rho^2}} = \\
 & = \int_0^\infty J_0\left(\beta\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos(\vartheta - \varphi) + \rho^2}\right) d\beta = \\
 & = \int_0^\infty \left[ J_0(\beta r)J_0(\beta\rho) + 2\sum_{k=1}^\infty J_k(\beta r)J_k(\beta\rho)\cos k(\vartheta - \varphi) \right] d\beta. \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

Окончательное выражение для перемещений точки  $i$  поверхности упругого полупространства от действия единичной силы, распределенной по элементарному участку  $k$  границы полупространства в полярных координатах, можно записать в такой форме:

$$W(r_i, \vartheta_i) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E b} F(r_i, \vartheta_i, \rho_k, \varphi_k), \quad (1.2)$$

где  $F(r_i, \vartheta_i, \rho_k, \varphi_k)$  – безразмерная функция для определения перемещений точки  $i$  поверхности упругого полупространства от действия единичной силы, распределенной по элементарному участку  $k$  границы полупространства (выражается через Гамма-функции, эллиптические интегралы и гипергеометрические функции [9]; ( $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона полупространства;  $b$  – наружный радиус круглой кольцевой пластинки).

## §2. Определение перемещений кольцевой пластинки с защемленной нормалью от сосредоточенной единичной силы.

При использовании способа Б.Н.Жемочкина для решения рассматриваемой контактной задачи также необходимо иметь выражение для определения перемещений (прогибов) точки  $i$  круглой кольцевой пластинки с защемленной нормалью от действия сосредоточенной силы, приложенной к точке  $k$  кольцевой пластинки (рис. 2).

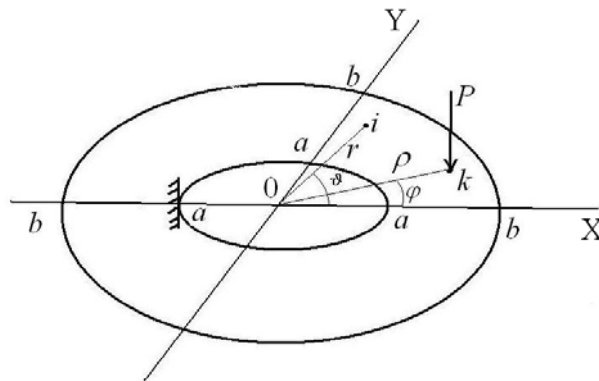


Рис. 2

Представим прогибы указанной выше кольцевой пластинки с защемленной нормалью в виде суммы прогибов бесконечной пластинки с защемленной нормалью [6] и двух частных решений Клебша [16], т.е.

$$\begin{aligned}
W(r_i, \theta_i, \rho_k, \varphi_k) = \frac{Pb^2}{8\pi D} & \left[ \frac{\rho_k^2 - 2\rho_k r_i \cos(\vartheta_i - \varphi_k) + r_i^2}{b^2} \ln \frac{\rho_k^2 - 2\rho_k r_i \cos(\vartheta_i - \varphi_k) + r_i^2}{b^2} + \right. \\
& + \frac{2\rho_k r_i \cos(\vartheta_i - \varphi_k)}{b^2} \ln \frac{\rho_k^2 r_i^2}{b^4} - 2 \frac{\rho_k r_i}{b^2} \cos(\vartheta_i - \varphi_k) - \frac{\rho_k^2}{b^2} \ln \frac{\rho_k^2}{b^2} - \frac{r_i^2}{b} \ln \frac{r_i^2}{b^2} \left. \right] + \\
& + A \frac{r_i^3}{b^3} \cos \vartheta_i + B \frac{r_i^3}{b^3} \sin \vartheta_i.
\end{aligned} \quad (2.1)$$

Определим функционал полной энергии  $\Phi$  кольцевой пластинки с защемленной нормалью в виде энергии ее изгиба  $U$  и работы действующей на пластинку внешней нагрузки  $\Pi$  [1]:

$$\Phi = U + \Pi; \quad \Pi = -PW(r_k, \vartheta_k, \rho_k, \varphi_k); \quad (2.2)$$

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \left( W_{rr} + \frac{W_r}{r} + \frac{W_{\vartheta\vartheta}}{r^2} \right)^2 - 2(1-\nu_p) \left[ W_{rr} \left( \frac{W_r}{r} + \frac{W_{\vartheta\vartheta}}{r^2} \right) - W_{r\vartheta}^2 \right] \right\} r dr d\vartheta;$$

$$R_1 = 2a \cos \vartheta; \quad R_2 = a \cos \vartheta + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \vartheta},$$

где  $D, \nu_p$  – цилиндрическая жесткость кольцевой пластинки и коэффициент Пуассона ее материала;  $a$  – внутренний радиус кругового отверстия кольцевой пластинки.

Подставим (2.1) в (2.2) и выполним интегрирование; согласно метода Ритца [1] продифференцируем полную энергию  $\Phi$  по каждому из неизвестных коэффициентов  $A$  и  $B$ . Из полученных уравнений определим их в таком виде:

$$A = \frac{S_A - r_k^3/b^3 \cos \vartheta_k}{4\pi(13+7\nu_p)} \frac{b^4}{a^4}; \quad B = \frac{S_B - r_k^3/b^3 \sin \vartheta_k}{4\pi(5-\nu_p)} \frac{b^4}{a^4}. \quad (2.3)$$

Выражения  $S_A, S_B$  представляют часть энергии изгиба (2.2), зависящей от прогибов бесконечной пластинки с защемленной нормалью (2.1). Вычислены численно для каждого положения единичной силы на кольцевой пластинке. Выражения (2.3) позволяют определять прогибы любой точки кольцевой пластинки с защемленной нормалью от действия единичной сосредоточенной силы, приложенной к этой пластинке.

### §3. Расчет кольцевой пластинки на упругом полупространстве способом Б.Н.Жемочкина.

Концентрическими окружностями и радиально расходящимися лучами разобьем кольцевую пластинку на участки Б.Н. Жемочкина (рис. 3).

В центре каждого участка поставим жесткую связь, соединяющую пластинку с полупространством. Примем, что усилие в каждой связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений по участку. Полученную статически неопределимую систему рассчитываем смешанным методом строительной механики [15], приняв за неизвестные усилия  $X_k$  во введенных связях, линейное  $u_0$  и угловые  $\theta_{ox}, \theta_{oy}$  перемещения введенного защемления (рис. 3). Система канонических уравнений для определения неизвестных имеет вид

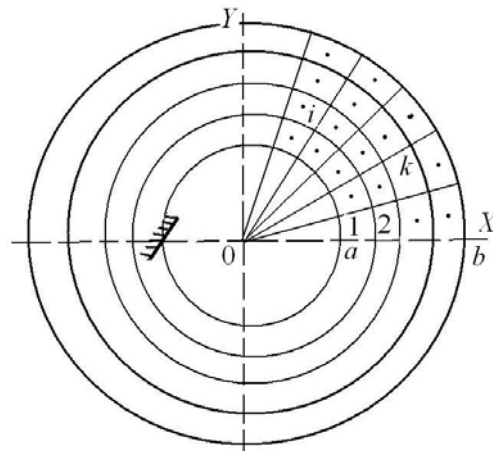


Рис. 3

$$\sum_{k=1} \delta_{ik} X_k + \theta_{ox} r_i \sin \mathcal{G}_i + \theta_{oy} r_i \cos \mathcal{G}_i + u_0 + \Delta_{ip} = 0, \quad i=1, 2, \dots; \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1} X_k r_k \cos \mathcal{G}_k + M_{py} = 0; \quad \sum_{k=1} X_k r_k \sin \mathcal{G}_k + M_{px} = 0; \quad \sum_{k=1} X_k + P = 0,$$

где  $P, M_{px}, M_{py}$  – равнодействующая внешней нагрузки на кольцевую пластинку и ее моменты относительно осей  $OX, OY$  (рис. 3);  $\delta_{ik} = \frac{1-\nu^2}{\pi E b} (F_{ik} + \beta W_{ik})$ ;  $\beta = \frac{\pi E b^3}{D(1-\nu^2)}$  – показатель гибкости по [8];

$$W_{ik} = W(r_i, \mathcal{G}_i, \rho_k, \varphi_k). \quad (3.2)$$

Свободные члены системы (3.1)  $\Delta_{ip}$  представляют прогибы точки  $i$  кольцевой пластинки с заземленной нормалью от действия внешней нагрузки и определяются с помощью формулы (2.1).

После определения всех неизвестных усилий и перемещений из системы (3.1) определяются контактные напряжения на каждом участке и перемещения точек кольцевой пластинки на упругом полупространстве по следующим формулам:

$$\sigma_i = \frac{X_i}{r_i \Delta r \Delta \varphi}; \quad Y_i = \frac{1-\nu^2}{\pi E b} \sum_{k=1} F_{ik} X_k \quad (3.3)$$

и по известным формулам [16] определим усилия в кольцевой пластинке.

#### §4. Результаты расчета кольцевой пластинки на упругом полупространстве.

Вначале исследованы перемещения кольцевого штампа (показатель гибкости  $\beta = 0$ ) от действия момента. При этом кольцевой штамп был разбит на 175 участков Б.Н.Жемочкина (рис. 3). Его угловые перемещения по результатам расчетов можно представить в виде формулы

$$\theta = k_{\theta M} \frac{M(1-\nu^2)}{E b^3}, \quad (4.1)$$

где значения безразмерного коэффициента  $k_{\theta M}$  приведены на рис. 4 в зависимости от отношения  $a/b$ .

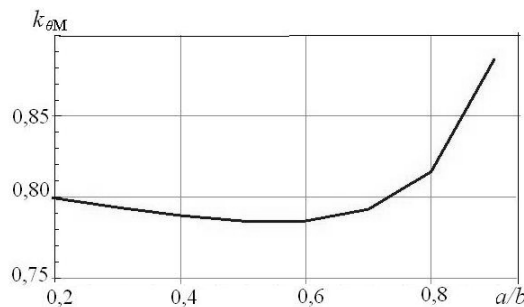
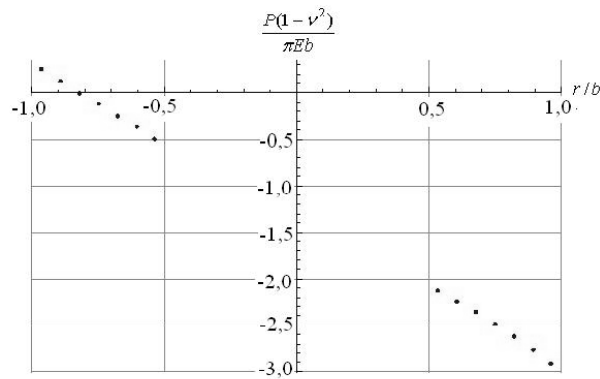
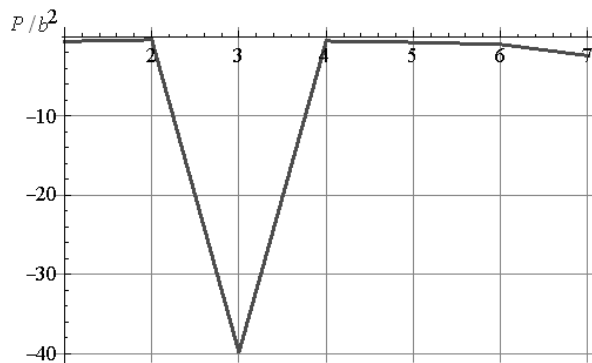


Рис. 4

Анализ графика (рис. 4) показывает, что рекомендация  $k_{\theta M} = 0,75$ , отмеченная выше во введении, дает заниженное значение угла поворота кольцевого штампа от действия момента.



a



б

Рис. 5

В качестве примера рассмотрим действие сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в точке с координатами  $r = 0,677b$ ;  $\vartheta = 0,126$  рад кольцевой пластинки с  $a = 0,5b$  и  $\beta = 10$ . На рис. 5 приведены графики вертикальных перемещений (5, а) и контактных напряжений (5, б) по половине диаметрального сечения пластинки, проходящего через точку приложения силы, действующей на пластинку.

### §5. Контактная задача для кольцевой пластинки на упругом слое.

Перемещения точки  $i$  граничной поверхности упругого слоя толщиной  $h > 0$  от действия вертикальной сосредоточенной силы, приложенной в точке  $k$  граничной поверхности, определяются выражением [6]

$$W(r_i, \vartheta_i) = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{(4+R^2/h^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left( \frac{2}{\sqrt{4+R^2/h^2}} \right) \right]; \quad (5.1)$$

$$R = \sqrt{r_i^2 - 2r_i \rho_k \cos(\vartheta_i - \varphi_k) + \rho_k^2},$$

где  $P_n(z)$  – полином Лежандра;  $\Gamma(z)$  – Гамма-функция [9].

Величины  $a_n$  зависят от условий контакта слоя с недеформируемым основанием и для шарнирно опертого слоя они равны [6]:  $a_0 = -1$ ;  $a_1 = -3/2$ ;  $a_2 = -1$ ;  $a_3 = -1/3$ ;  $a_4 = 0$ ;  $a_5 = 1/18$ ; ... .

При решении контактной задачи для кольцевой пластинки на упругом слое канонические уравнения (3.1) сохраняют свой вид, но меняется выражение для  $F_{ik}$  в соответствии с результатами интегрирования (5.1) по площади элементарного участка (рис. 1). При выполнении численных расчетов при определении  $\delta_{ik}$  и  $\Delta_{ip}$  первое слагаемое в (5.1), содержащее особенность, интегрировано точно в соответствии с формулой (1.2). В остальном последовательность расчета, описанная выше для кольцевой пластинки на упругом полупространстве, не изменилась.

В таблице даны значения безразмерного коэффициента  $k_{\theta M}$  для определения углов поворота кольцевого штампа на упругом слое по формуле (4.1) от действия момента в зависимости от отношений внутреннего и внешнего радиусов  $a/b$  кольцевой пластинки и толщины слоя  $h/b$  к величине внешнего радиуса кольцевой пластинки  $h/b$ . Как и следует ожидать, угловые перемещения кольцевого штампа на упругом слое меньше его угловых перемещений кольцевого штампа на упругом полупространстве.

$h/b$	$a/b$			
	0,2	0,4	0,6	0,8
0,5	0,6745	0,6654	0,6656	0,7036
1,0	0,7608	0,7504	0,7478	0,7799
2,0	0,7915	0,7808	0,7775	0,8081
...	...	...	...	...
$\infty$	0,8011	0,7962	0,7852	0,8092

Распределение контактных напряжений по диаметральному сечению кольцевой пластинки (исходные данные рис. 5) при отношении  $h/b = 1,0$  практически совпадает с распределением контактных напряжений по этому сечению для полупространства ( $h/b = \infty$ ).

#### Выводы.

Проведенные исследования позволяют сформулировать такие результаты:

- 1) способом Б.Н.Жемочкина решены контактные задачи для кольцевой пластинки на упругом полупространстве и упругом слое конечной толщины, лежащем на недеформируемом основании;
- 2) получены новые результаты для угловых перемещений кольцевого штампа на упругом полупространстве и слое при действии момента. Эти результаты могут быть использованы для определения кренов высотных сооружений от ветровой нагрузки;
- 3) предлагаемый подход может быть использован при решении контактной задачи для кольцевой пластинки при других моделях упругого основания. В этом случае изменится только выражение для  $F_{ik}$  (1.3) в соответствии с выбранной моделью упругого основания.

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок контактної задачі для кільцевої пластинки заданої жорсткості на пружному шарі і пружному півпросторі. Розрахунок виконано методом Б.М.Жемочкина. Для кільцевого штампа складено таблицю його кутів повороту при дії моменту. Наведено розподіл переміщень і контактних напружень по діаметральному перерізу кільцевої пластинки для окремого випадку навантаження її зосередженою силою.

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 400с.
2. Александров В.М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. – 1967. – № 4. – С. 108 – 116.
3. Александров В.М. Взаимодействие плоского наклонного кольцевого штампа с упругим полупространством // ПММ. – 1996. – 60.–№ 1. – С.132 – 139.

4. *Бородачев Н.М., Бородачева Ф.Н.* Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство // Инж. журн. МТГ.– 1966. – № 4. – С.158 – 161.
5. *Босаков С.В.* Метод Ритца в контактных задачах теории упругости. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2006. – 108с.
6. *Босаков С.В.* Статические расчеты плит на упругом основании. – Минск: Изд-во БНТУ, 2002. – 128с.
7. *Генералова Н.В., Коваленко Е.В.* О вдавлении кольцевого в плане штампа в упругий слой с тонким усиливающим покрытием // Изв. РАН. МТГ. – 1999. – № 3. – С.27 – 33.
8. *Горбунов–Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.* Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1984. – 680с.
9. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: ФМ, 1963. – 1100 с.
10. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
11. *Егоров К.Е.* К вопросу расчета оснований под фундаментом кольцевой формы / К расчету деформаций оснований. – М.: ФГУП «ВНИИНТПИ», 2002.– С.187 – 209.
12. *Егоров К.Е.* Расчет оснований под фундаментом с подошвой кольцевой формы / К расчету деформаций оснований. – М.: ФГУП «ВНИИНТПИ», 2002. – С.290 – 298.
13. *Жемочкин Б.Н., Сеницын А.П.* Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1962. –239с.
14. *Моссаковский В.П., Губенко В.С.* О давлении кольцевого штампа на упругое полупространство // Научные зап. Днепропетровск. гос. ун-та. – 1956. – **45**. – С. 171 – 175.
15. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.
16. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 536с.
17. *Asim R.* Finite element modeling of contact problems. – Lincoping: Lincoping University Electronic Press, 2016. – 34 p.
18. *Kumar S. S., Gupta A., Kumar D.* Development of design charts for the deflections of a loaded circular plate resting on the Pasternak foundation // Int. J. Eng. Inv. – 2012. – **1**, N 5.– P. 56 – 59.

Поступила 10.04.1917

Утверждена в печать 30.05.2017