УДК 533.9 https://doi.org/10.15407/itm2019.03.045

Д. Н. ЛАЗУЧЕНКОВ, Н. М. ЛАЗУЧЕНКОВ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО ОБТЕКАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ПЛАЗМЫ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина, e-mail: lazuch.dn@gmail.com

На прикладі модельної задачі розглянуто вплив навколишніх провідних тіл на збирання заряджених частинок плазми провідним циліндром. Ціллю статті є дослідження впливу близько розташованого провідного тіла на збирання іонного струму зарядженим циліндром при поперечному обтіканні надзвуковим потоком беззіштовхувальної неізотермічної плазми. На основі двовимірної системи рівнянь Власова–Пуассона проведено моделювання поперечного обтікання надзвуковим вільномолекулярним потоком плазми системи нескінченно довгих тіл "циліндр – смуга". Задачу розв’язано кінчено-різницевим методом установлення з розщепленням за фізичними процесами на вкладених сітках. При розрахунку відштовхуючого електрони локально рівноважного самоузгодженого електричного поля використано наближення Пуассона–Больцмана з модельним розподілом концентрації електронів. Проведено аналіз картини вільномолекулярного обтікання неізотермічною плазмою системи провідних тіл "циліндр – смуга". Введено числові параметри, що визначають особливості обтікання розглянутої системи тіл і збирання струму циліндром. Розраховано іонні струми на заряджений циліндр, що обтікається поперечно, в залежності від його потенціалу, ступеня неізотермічності плазми та розташування циліндра відносно провідної поверхні, що знаходиться під потенціалом, близьким до плаваючого. За результатами числового моделювання отримано кількісні характеристики впливу провідної поверхні на збирання іонного струму зарядженим циліндром. Результати можуть бути використані при розробці взаємодіючих з потоком низькотемпературної розрідженої плазми наукових і технологічних діагностичних приладів, проектуванні елементів конструкцій перспективних космічних апаратів та систем.

Ключові слова: *потік розрідженої неізотермічної плазми, поперечне обтікання системи тіл "циліндр – смуга", система рівнянь Власова–Пуассона, метод розщеплення, вкладені сітки, розрахунки іонного струму на циліндр поблизу провідної поверхні.*

На примере модельной задачи рассмотрено влияние окружающих проводящих тел на собирание заряженных частиц плазмы проводящим цилиндром. Целью статьи является исследование влияния близко расположенного проводящего тела на собирание ионного тока заряженным цилиндром при поперечном обтекании сверхзвуковым потоком бесстолкновительной неизотермической плазмы. На основе двумерной системы уравнений Власова–Пуассона проведено моделирование поперечного обтекания сверхзвуковым свободномолекулярным потоком плазмы системы бесконечно длинных тел "цилиндр – полоса". Задача решена численно конечно-разностным методом установления с расщеплением по физическим процессам на вложенных сетках. При расчете отталкивающего электроны локально равновесного самосогласованного электрического поля использовано приближение Пуассона–Больцмана с модельным распределением концентрации электронов. Проведен анализ картины свбодномолекулярного обтекания неизотермической плазмой системы проводящих тел "цилиндр – полоса". Введены числовые параметры, определяющие особенности обтекания рассматриваемой системы тел и собирания тока цилиндром. Рассчитаны ионные токи на поперечно обтекаемый заряженный цилиндр в зависимости от его потенциала, степени неизотермичности плазмы и расположения цилиндра относительно проводящей поверхности, находящейся под потенциалом, близким к плавающему. По результатам численного моделирования получены количественные характеристики влияния проводящей поверхности на собирание ионного тока заряженным цилиндром. Результаты могут быть использованы при разработке взаимодействующих с потоком низкотемпературной разреженной плазмы научных и технологических диагностических приборов, проектировании элементов конструкций перспективных космических аппаратов и систем.

Ключевые слова: *поток разреженной неизотермической плазмы, поперечное обтекание системы тел "цилиндр – полоса", система уравнений Власова–Пуассона, метод расщепления, вложенные сетки, расчет ионного тока на цилиндр вблизи проводящей поверхности.*

By the example of a model problem, this paper considers the effect of neighboring conducting bodies on the collection of charged plasma particles by a conducting cylinder. The aim of the paper is to study the effect of a nearby conducting body on the collection of the ion current by a charged cylinder in a supersonic cross flow of a collisionless nonisothermal plasma. Based on the two-dimensional Vlasov–Poisson system, a supersonic free molecular plasma cross flow past an infinitely long cylinder–strip system was simulated. The problem was solved numerically by a finite-difference relaxation method with splitting by physical processes on nested grids. When calculating the electron-repulsing locally equilibrium self-consistent electric field, use was made of the Poisson–Boltzmann approximation with a model electron density distribution. The paper analyzes the pattern of free-molecular nonisothermal plasma flow past a conducting cylinder – conducting strip system and introduces numerical parameters that determine the features of flow past the body system under consideration and the current collection by the cylinder. The ion current to a charged cylinder in a cross flow was calculated as a function of the cylinder potential, the degree of plasma nonisothermality, and the position of the cylinder relative to a conducting surface whose potential is close to the floating one. The numerical simulation made it possible to find quantitative characteristics of the effect of a conducting surface on the collection of the ion current by a charged cylinder. The results may be used in the development of scientific and process diagnostic instruments that interact with a low-temperature rarefied plasma flow and in the design of structural elements for advanced spacecraft and space systems.

Keywords: *rarefied nonisothermal plasma flow, cross flow past a cylinder–strip system, Vlasov–Poisson system, splitting method, nested grids, calculation of the current to a cylinder near a conducting surface*.

Введение. Математическое моделирование взаимодействия системы проводящих тел с потоком низкотемпературной разреженной плазмы является важным этапом разработки диагностической зондовой аппаратуры, элементов конструкций перспективных космических аппаратов и систем [1]. Зарядовое состояние проводящих тел определяют токи заряженных частиц на контактирующие с плазмой поверхности. Особенностью собирания токов в плазме является сложный, нелинейный характер самосогласованного электрического поля, обусловленный различием движения в нем заряженных частиц противоположного знака с существенно разными тепловыми скоростями [1, 2]. На собирание токов в реальных условиях влияет ряд факторов, среди которых существенную роль играют направленная скорость потока, окружающие тела и степень неравновесности плазмы.

В работах [3 – 5], основываясь на модели Власова–Пуассона, рассчитаны ионные токи на поверхность при свободномолекулярном обтекании цилиндра потоком немагнитной плазмы. Влияние окружающих тел на собирание ионных токов в потоке разреженной плазмы рассмотрено в работах [5 – 7] на модели свободномолекулярного обтекания двух параллельных круглых цилиндров. Задача численного расчета на основе модели Власова–Пуассона токов на заряженный цилиндр вблизи проводящей поверхности в сверхзвуковом потоке разреженной плазмы до этого детально не рассматривалась.

В настоящей статье разработанный авторами подход к моделированию поперечного обтекания тел сверхзвуковым потоком бесстолкновительной неизотермической плазмы на основе двумерной системы уравнений Власова–Пуассона [8 – 10] адаптирован для исследования влияния проводящего тела на собирание ионного тока заряженным цилиндром. Моделирование влияния окружающих тел на собирание ионного тока выполнено на примере задачи поперечного обтекания цилиндра вблизи продольно обтекаемой поверхности, находящейся под потенциалом, близким к плавающему потенциалу.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечно длинные параллельно расположенные проводящий круговой цилиндр с радиусом направляющей окружности r_c и проводящую полосу шириной L ($L \gg r_c$) и толщиной H. Система рассматриваемых тел обтекается со скоростью V_0 поперечным потоком трехкомпонентной разреженной плазмы, состоящей из нейтралов, положительных однозарядных ионов и электронов. При этом полоса обтекается вдоль ширины. Плазма максвелловская, влияние магнитного поля пренебрежимо мало. Режим обтекания рассматриваемой системы проводящих тел полагаем бесстолкновительным, длины свободного пробега в плазме значительно превосходят характерные поперечные размеры цилиндра и полосы для всех компонент плазмы, и для чисел Кнудсена и Маха выполняются условия $Kn >> Ma >> 1$. Такие условия характерны для низкотемпературной разреженной лабораторной и ионосферной плазмы [2, 11].

Полоса находится под небольшим отрицательным потенциалом φ_s относительно потенциала невозмущенной плазмы. Скорость потока V_0, концентрации заряженных частиц $n_{i0} = n_{e0} = n_0$ в невозмущенном потоке, потенциалы цилиндра φ_c и проводящего тела (полосы) φ_s относительно потенциала невозмущенной плазмы известны. Потенциал невозмущенной плазмы принимаем равным нулю. Поверхности проводящих тел полностью поглощают попавшие на них заряды (электроны поглощаются, ионы нейтрализуются), электронная эмиссия отсутствует.

Моделирование обтекания потоком плазмы рассматриваемой системы тел проведем в безразмерных величинах. Концентрации ионов n_i и электронов n_e отнесем к их концентрации n_0 в невозмущенной плазме; время – к величине r_c/u_i; пространственные координаты – к радиусу цилиндра r_c; электрический потенциал φ относительно потенциала невозмущенной плазмы – к величине kT_e/e, где k – постоянная Больцмана, T_e – температура электронов, e – элементарный заряд; скорости компонент плазмы – к их тепловым скоростям $u_\alpha = \sqrt{2kT_\alpha/m_\alpha}$, где T_α – температура, m_α – масса частиц сорта α; скорость потока плазмы V_0 – к тепловой скорости ионов ($S = \mathrm{V}_0/u_i$ – ионное скоростное отношение). Здесь и далее индекс α определяет сорт частиц – $\alpha = i, e$: индекс i относит величину к ионам, индекс e – к электронам.

Введем в физическом пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, ось Oz которой направим вдоль оси цилиндра, а ось Ox – по направлению скорости потока. В рассматриваемом случае функции распределения заряженных частиц по скоростям пятимерные, определяются точкой в четырехмерном фазовом пространстве и временем. Точка фазового пространства определяется точкой x с координатами (x, y) двумерного физического пространства и точкой v с координатами (v_x, v_y) двумерного пространства скоростей. Значения функций распределения $f_\alpha(t, \mathrm{x}, \mathrm{v})$ заряженных частиц плазмы отнесем к соответствующим величинам n_0/u_α^2.

При сделанных допущениях пространственно-временная эволюция функций распределения заряженных компонент низкотемпературной бесстолкновительной плазмы в основном определяется самосогласованным электрическим полем и в безразмерных величинах описывается математической моделью Власова−Пуассона [2, 9]:

$$a_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathrm{x}} - b_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathrm{v}} = 0\,, \tag{1}$$

$$\Delta\varphi = -\xi^2 (n_i - n_e), \quad n_\alpha = \int\limits_{\Omega_{\mathrm{V}\alpha}} f_\alpha d\mathrm{v}\,, \tag{2}$$

где φ – электрический потенциал относительно невозмущенной плазмы; $\xi = r_c/\lambda_d$ – размер цилиндра относительно дебаевского радиуса экранирования λ_d; $\Omega_{\mathrm{V}\alpha}$ – расчетная область в простанстве безразмерных скоростей частиц сорта α. Коэффициенты a_α, b_α кинетических уравнений (1) для ионов и электронов определяются следующим образом

$$a_i = 1, \quad a_e = \sqrt{\mu/\beta}, \quad b_i = \beta/2, \quad b_e = -1/2,$$

где $\mu = m_e/m_i$, $\beta = T_e/T_i$ – отношение масс и температур заряженных частиц плазмы.

Искомые функции распределения частиц по скоростям f_α и потенциал φ удовлетворяют следующим краевым условиям: в невозмущенном потоке плазмы вдали от рассматриваемой системы проводящих тел заряженные частицы распределены по закону Максвелла–Больцмана, потенциал электрического поля стремится к нулю; на поверхности цилиндра и полосы определены условия поглощения заряженных частиц и поддержания соответствующего заданного потенциала [9, 10]; в начальный момент времени функция распределения ионов задается с использованием аналитической модели обтекания рассматриваемой системы тел нейтральным разреженным газом [2], электроны в начальный момент времени распределены по закону Максвелла–Больцмана.

Численное решение задачи. Поставленная задача (1) – (2) решается численно конечно-разностным методом установления с расщеплением по физическим процессам на вложенных сетках. В итерационном процессе для расчета самосогласованного электрического поля используется приближение Пуассона–Больцмана с модельным распределением концентрации электронов [8 – 10].

Расчетные области в физическом пространстве и в пространстве скоростей выбираются так, чтобы охватить область возмущения плазмы и электростатического поля при обтекании цилиндра и полосы. На границах расчетных областей задаются соответствующие физические краевые условия. При малых ξ (тонкий цилиндр) и при больших скоростях обтекания S, когда область возмущения плазмы и электростатического поля на отдельных участках выходит за границы расчетной области, использовались искусственные граничные условия [10].

В окрестности системы "цилиндр – полоса" вложенные сетки локализуются вокруг областей с большими градиентами электрического поля и разрывами функции распределения. Для каждой из вложенных сеток шаг по времени конечно-разностного метода выбирается из условия устойчивости разностной схемы. Сопряжение данных в общих приграничных узлах вложенных сеток, допускающих счет при различных значениях шага по времени, выполняется в моменты времени, соответствующие большему значению временного шага. При решении уравнения Пуассона (2) угловые точки обтекаемой проводящей полосы считаются принадлежащими расчетной области.

Достоверность полученных результатов решения системы уравнений Власова–Пуассона подтверждена проведением тестовых расчетов ряда модельных задач, решения которых известны и проверены многочисленными экспериментами. Рассмотрены задачи поперечного обтекания потоком нейтрального разреженного газа бесконечного цилиндра и бесконечной полосы под нулевым углом атаки при условии "поглощения" частиц поверхностью тел. Система уравнений Власова–Пуассона (1) – (2) решена при параметрах $\xi = 0$, $\varphi_c = 0$ для цилиндра и $\xi = 0$, $\varphi_s = 0$ для полосы при значениях скоростного отношения S = 5, 10, 20. Полученные распределения плотности частиц в окрестности обтекаемых тел совпали с точностью аппроксимации уравнений Власова с аналитическими решениями соответствующих задач [2]. Отмечена сходимость результатов к точным решениям при сгущении сеток. Для проведения моделирования обтекания рассматриваемых тел разреженной плазмой на современном компьютере средней производительности выбраны сетки, позволяющие получать за приемлемое время решение системы уравнений Власова–Пуассона с точностью до процента всюду, кроме области ближнего следа, где значения плотности исчезающе малы.

По двумерной модели Власова–Пуассона (1) – (2) рассчитан ток ионов на цилиндр в поперечном потоке бесстолкновительной плазмы в зависимости от потенциала цилиндра [10]. Полученные результаты при ионном скоростном отношении $S > 2$ с точностью до долей процента совпали с результатами расчетов работ [3 – 5] и с известным приближенным асимптотическим решением для собирания ионного тока тонким цилиндрическим зондом [1]. Решена задача поперечного свободномолекулярного обтекания сверхзвуковым потоком плазмы бесконечной проводящей полосы под нулевым углом атаки при небольшом отрицательном потенциале поверхности относительно потенциала невозмущенной плазмы. Результаты расчетов плотности тока ионов на поверхность полосы при удалении от передней кромки вниз по потоку с точностью до процента совпали с теоретическим значением плотности тока на заряженную плоскую поверхность [1].

Кроме этого, достоверность полученных решений системы уравнений Власова–Пуассона подтверждена сравнением результатов решения одинаковых физических задач с использованием разных математических моделей и методов решения [8, 10]. Так, найденные конечно-разностным методом установления поля концентраций заряженных частиц сравнивались с результатами расчетов методом характеристик в полученном самосогласованном электрическом поле.

Особенности обтекания. Собирание тока проводящим цилиндром зависит от попадания его в возмущенную полосой зону потока плазмы и от электрического взаимодействия цилиндра с проводящей поверхностью полосы, приводящего к перестройке электрического поля. Пространственное расположение цилиндра относительно поверхности проводящей полосы определим безразмерными геометрическими величинами s_x, s_y (см. рис. 1). Проводящее тело (полоса) возмущает поток плазмы вблизи цилиндра. Схема обтекания рассматриваемой системы тел приведена на рис. 1, где условно показаны: 1 – проводящий цилиндр; 2 – проводящее тело (полоса шириной L и толщиной H); 3 – область невозмущенного потока плазмы; 4 – область по-

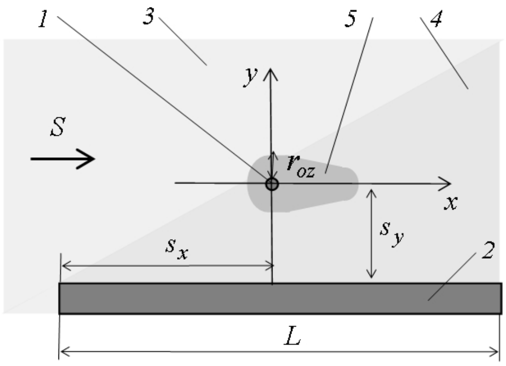

Рис. 1

тока плазмы, возмущенного полосой; 5 – область объемного заряда в окрестности проводящего цилиндра (r_{oz} – характерный размер области объемного заряда).

Рис. 2 и 3 иллюстрируют распределение параметров ионов при обтекании цилиндра возле проводящей поверхности, когда цилиндр находится вне зоны возмущения потока плазмы полосой. Результаты получены при решении системы уравнений Власова–Пуассона (1) – (2) при следующих параметрах задачи: $s_x = 10$, $s_y = 15$, $S = 5$, $\xi = 0{,}1$, $\beta = 1$, $\varphi_c = -2$, $\varphi_s = -1$. На рис. 2 показано поле плотности (концентрации) ионов в системе "цилиндр – полоса". На рис. 3, б), в), г) показаны линии уровня функции распределения ионов по скоростям в окрестности цилиндра в точках пространства, изображенных на рис. 3, а) (обтекаемый цилиндр выделен штрихом): точке 1 соответствует функция распределения, представленная на рис. 3, б), точке 2 – 3, в), точке 3 – 3, г).

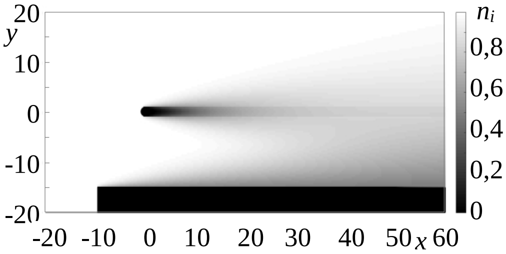

Рис. 2

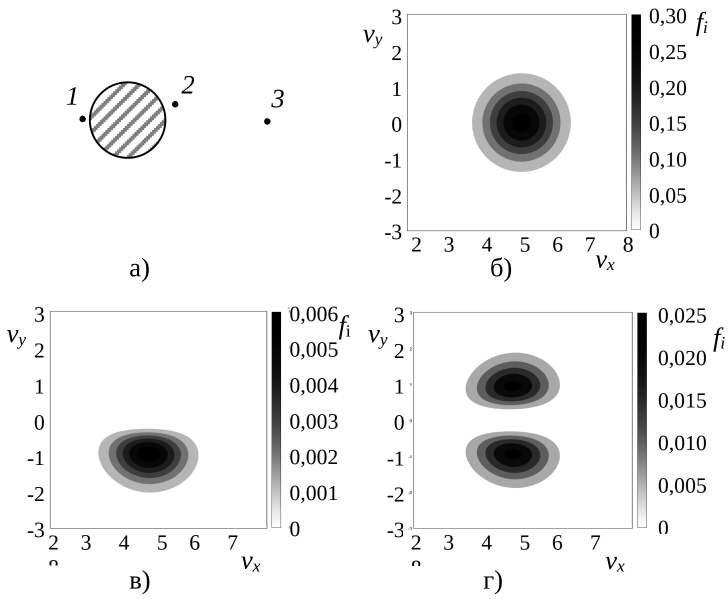

Рис. 3

Дополнительно к основным параметрам задачи S, ξ, φ_c, β, μ, определяющим газодинамическое и электрическое взаимодействие заряженного цилиндра с плазмой [10], в рассматриваемом случае обтекания системы "цилиндр – проводящая поверхность" можно ввести еще три параметра: безразмерный потенциал проводящей поверхности тела φ_s относительно потенциала плазмы и геометрические параметры $\eta_s = s_y / s_x \cdot S$ и $\xi_s = s_y \cdot \xi$.

Параметр η_s связывает безразмерные координаты (s_x, s_y) размещения цилиндра относительно продольно обтекаемой поверхности тела с областью возмущения сверхзвукового потока телом (позиция 4 на рис. 1), которая условно определяется при небольших потенциалах тела φ_s поверхностью Маха для ионов (условно, без учета электрического взаимодействия, цилиндр попадает в область возмущения потока телом при $\eta_s < 1$).

Параметр ξ_s определяется как отношение расстояния цилиндра от продольно обтекаемой поверхности тела к дебаевскому радиусу экранирования. Параметр ξ_s позволяет оценить, достигает ли область объемного заряда цилиндра поверхности обтекаемого тела (согласно расчетам [4, 5, 8 – 10, 12] в направлении поперек потока характерный размер области объемного заряда цилиндра $r_{oz} \sim 10/\xi$; условно область объемного заряда цилиндра охватывает часть поверхности тела при $\xi_s < 10$).

Известно [2, 13, 14], что проводящее тело под плавающим потенциалом $\varphi_s = \varphi_f$, который обычно отрицателен и для проводящей сферы оценивается соотношением $\varphi_f \approx \ln\left(\sqrt{\pi\mu/\beta}\, S/2\right)$ [2], практически не нарушает равновесное распределение электронов. Электрическое возмущение потока плазмы распространяется на расстояние до нескольких дебаевских радиусов от его поверхности (за исключением области следа при сверхзвуковом обтекании) [6, 8, 12]. Поэтому для цилиндра, находящегося вблизи имеющего плавающий потенциал тела на расстоянии, большем нескольких дебаевских радиусов от него, влияние поглощающей заряд поверхности на электронный ток несущественно.

Результаты моделирования. Выполнено численное моделирование обтекания потоком плазмы рассматриваемой системы тел и собирания токов цилиндром при значении потенциала пластины $\varphi_s = -1$, скорости обтекания $S = 5$, изменении параметра ξ от 0,1 до 1, степени неизотермичности плазмы β – от 1 до 4. Результаты расчета ионного тока на поперечно обтекаемый цилиндр в зоне и вне зоны возмущения потока поглощающим заряд телом, находящимся под плавающим потенциалом, показаны на рис. 4 и 5.

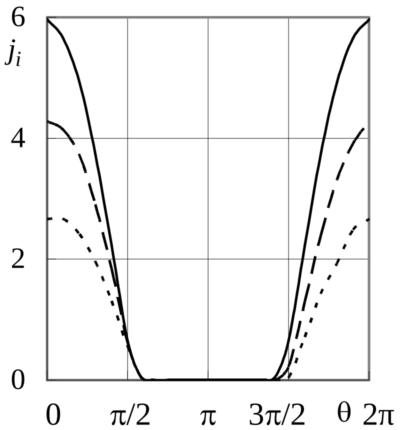

Рис. 4

На рис. 4 представлены распределения безразмерной плотности ионного тока вдоль поверхности цилиндра вблизи проводящей поверхности для разных значений параметра η_s: сплошная кривая соответствует значению $\eta_s = 5$, штриховая – $\eta_s = 0{,}75$, пунктирная – $\eta_s = 0{,}2$. Расчеты выполнены при параметрах $\beta = 1$, $\xi = 0{,}2$ и безразмерном потенциале цилиндра $\varphi_c = -10$. Угловая координата θ точки поверхности цилиндра отсчитывается по часовой стрелке от направления на поток. Плотности токов отнесены к плотности хаотического ионного тока. Уменьшение параметра η_s, соответствующее "погружению" цилиндра в область возмущения потока плазмы обтекаемой полосой, сопровождается снижением уровня плотности ионного тока и некоторым смещением максимума плотности тока ионов на угол ~ $0{,}04/\eta_s$ вследствие незначительного поворота вектора массовой скорости в сторону пластины.

На рис. 5 приведены зависимости собираемых вблизи проводящей поверхности ионных токов от безразмерного потенциала цилиндра для разных значений параметра η_s. Расчеты выполнены при параметрах $\beta = 4$, $\xi = 0{,}2$, $s_y = 15$. Ионный ток отнесен к хаотическому ионному току. В данном случае область объемного заряда в окрестности цилиндра искажается проводящим телом незначительно и плавная монотонная зависимость ионного тока от потенциала сохраняется для всех значений параметра η_s.

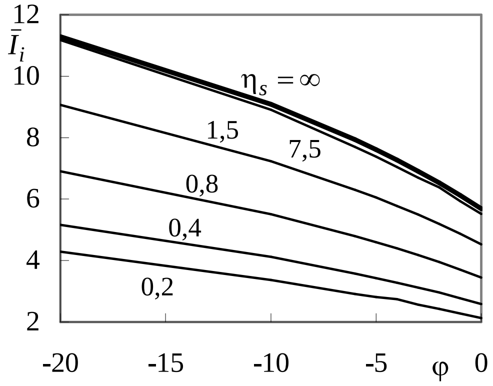

Рис. 5

Рис. 6 иллюстрирует влияние параметра ξ_s на собирание цилиндром ионных токов вблизи продольно обтекаемой проводящей поверхности для изотермической плазмы ($\beta = 1$). Результаты расчетов показывают, что при $\xi_s < 2$, когда область объемного заряда в окрестности цилиндра существенно искажается проводящим телом, выпуклость кривых зависимости ионного тока от потенциала цилиндра может изменяться.

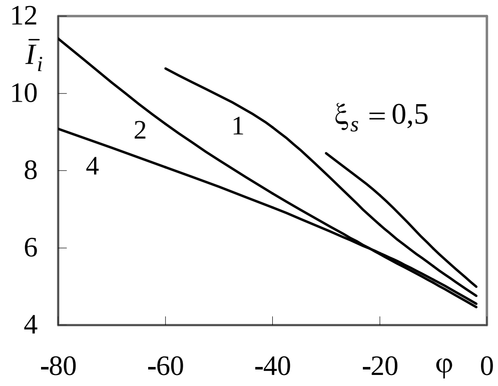

Рис. 6

Выводы. На основе численного решения системы уравнений Власова–Пуассона рассчитаны ионные токи на поперечно обтекаемый потоком бесстолкновительной неравновесной плазмы цилиндр в зависимости от степени неравновесности плазмы и влияния проводящей поверхности, находящейся под плавающим потенциалом. Показано, что собираемый цилиндром ионный ток вблизи проводящей поверхности существенно зависит от попадания цилиндра в зону возмущения потока проводящим телом (продольно обтекаемой полосой). При расстоянии до поверхности, меньшем дебаевского радиуса экранирования, ионная ветвь вольтамперной характеристики цилиндра становится существенно нелинейной. Получены количественные характеристики влияния проводящей поверхности на собирание ионного тока заряженным цилиндром.

1. *Чан П., Толбот Л., Турян К.* Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. М.: Мир, 1978. 201 с.
2. *Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* Искусственные спутники в разреженной плазме. М.: Наука, 1964. 382 с.

3. *Godard R., Laframboise J.* Total current to cylindrical collectors in collision less plasma flow. Planetary Space Science. 1983. V. 31, № 3. P. 275–283. https://doi.org/10.1016/0032-0633(83)90077-6
4. *Xu G. Z.* The interaction of a moving spacecraft with the ionosphere: Current collection and wake structure: Ph.D. dissertation. York University, 1992. 258 p.
5. *Choiniere E.* Theory and experimental evaluation of a consistent steady-state kinetic model for two-dimensional conductive structures in ionospheric plasmas with application to bare electrodynamic tethers in space : Ph.D. dissertation. University of Michigan, 2004. 288 p.
6. *Котельников В. А., Ульданов С. В., Котельников М. В.* Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы. М.: Наука, 2004. 422 с.
7. *Гаранин С. Б.* Взаимодействие заряженных тел в плазме: дис. … канд. физ.-мат. наук. Москва, 2010. 165 с.
8. *Лазученков Д. Н.* Расчет отталкивающего электроны самосогласованного электрического поля вблизи обтекаемого потоком разреженной плазмы цилиндра. Техническая механика. 2012. №4. С. 27–35.
9. *Лазученков Д. Н., Лазученков Н. М.* Моделирование взаимодействия потока разреженной плазмы с обтекаемым заряженным проводящим цилиндром вблизи проводящей поверхности. Техническая механика. 2014. №2. С. 63–72.
10. *Лазученков Д. Н., Лазученков Н. М.* Математическое моделирование обтекания проводящего цилиндра сверхзвуковым потоком бесстолкновительной плазмы. Технічна механіка. 2019. №1. С. 63–74. https://doi.org/10.15407/itm2019.01.063
11. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П., Смирнова В. В.* Ионосферная аэродинамика. Успехи физических наук. 1969. Т. 99, № 1. С. 3–49. https://doi.org/10.3367/UFNr.0099.196909a.0003
12. *Latramboise J. G.* Theory of Spherical and Cylindrical Langmuir Probes in a Collisionless Maxwellian Plasma at Rest. Report, No. 100. Univ. of Toronto, Institute of Aerospace Studies. 1966. 210 c. https://doi.org/10.21236/AD0634596
13. *Алексеев Б. В., Котельников В. А.* Зондовый метод диагностики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.
14. *Грановский В. Л.* Электрический ток в газе. В 2 т. Т. 1. Общие вопросы электродинамики газов. М.: Гостехиздат, 1952. 432 с.

Получено 21.05.2019,
в окончательном варианте 17.09.2019