УДК 533.9

Д. Н. ЛАЗУЧЕНКОВ, Н. М. ЛАЗУЧЕНКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: vashuvalov@ukr.net

Моделювання взаємодії провідного тіла з потоком плазми є важливим етапом розроблення наукових та технологічних діагностичних приладів, елементів конструкцій перспективних космічних апаратів і систем. Метою статті є обґрунтування розробленого авторами алгоритму числового моделювання взаємодії провідного зарядженого тіла з потоком розрідженої плазми. Описані ключові елементи алгоритму рішення двовимірної системи рівнянь Власова–Пуассона на прикладі задачі надзвукового поперечного обтікання провідного циліндра низькотемпературною неізотермічною розрідженою плазмою. В алгоритмі реалізовано можливість розв'язання рівнянь Власова скінчено-різницевими методами розщеплення або методом характеристик. При розрахунку локально рівноважного самоузгодженого електричного поля для електронної компоненти використані моделі Власова–Пуассона та Пуассона–Больцмана в наближенні локально рівноважних електронів і з урахуванням стоку електронів на поверхні тіла в наближенні центрального поля. Сформульовані критерії застосовності наближених моделей Пуассона–Больцмана поблизу обтічного тіла. Вірогідність одержуваних результатів підтверджена як проведенням тестових розрахунків відомих модельних задач, так і порівнянням результатів рішення однакових фізичних задач з використанням різних математичних моделей. Розраховані повні токи на поперечно обтічний заряджений циліндр в залежності від потенціалу, іонного швидкісного відношення та ступеня неізотермічності плазми. Використання в алгоритмі скінчено-різницевого метода розщеплення для розв'язання рівнянь Власова та вкладених сіток відкриває можливості розвитку алгоритму для урахування зіткнень у плазмі та включення у розрахункову схему джерел і стоків заряджених частинок. Результати можуть бути використані в діагностиці низькотемпературної розрідженої плазми та проектуванні елементів конструкції космічних апаратів і систем.

Моделирование взаимодействия проводящего тела с потоком плазмы является важным этапом разработки научных и технологических диагностических приборов, элементов конструкций перспективных космических аппаратов и систем. Целью статьи является обоснование разработанного авторами алгоритма численного моделирования взаимодействия проводящего заряженного тела с потоком разреженной плазмы. Описаны ключевые элементы алгоритма решения двумерной системы уравнений Власова–Пуассона на примере задачи сверхзвукового поперечного обтекания проводящего цилиндра низкотемпературной неизотермической разреженной плазмой. В алгоритме реализована возможность решения уравнений Власова конечно-разностными методами расщепления или методом характеристик. При расчете локально равновесного самосогласованного электрического поля для электронной компоненты использованы модели Власова–Пуассона и Пуассона–Больцмана в приближении локально равновесных электронов и с учетом стока электронов на поверхности тела в приближении центрального поля. Сформулированы критерии применимости приближенных моделей Пуассона–Больцмана в окрестности обтекаемого тела. Достоверность получаемых результатов подтверждена как проведением тестовых расчетов известных модельных задач, так и сравнением результатов решения одинаковых физических задач с использованием разных математических моделей. Рассчитаны полные токи на поперечно обтекаемый заряженный цилиндр в зависимости от потенциала, ионного скоростного отношения и степени неизотермичности плазмы. Использование в алгоритме конечно-разностного метода расщепления для решения уравнений Власова и вложенных сеток открывает возможности развития алгоритма для учета столкновений в плазме и включения в расчетную схему источников и стоков заряженных частиц. Результаты могут быть использованы в диагностике низкотемпературной разреженной плазмы и проектировании элементов конструкции космических аппаратов и систем.

Simulating the interaction of a conducting body with a plasma flow is an important stage in the development of scientific and technological diagnostic devices and structural elements of advanced spacecraft and space systems. The aim of this paper is to substantiate the authors' algorithm for numerical simulation of the interaction of a conducting charged body with a rarefied plasma flow. The paper describes the key elements of the algorithm for solving the two-dimensional Vlasov–Poisson system by the example of a supersonic cross flow of a low-temperature nonisothermal rarefied plasma around a conducting cylinder. The algorithm allows the Vlasov equations to be solved by finite-difference splitting methods or the method of characteristics. When calculating the local equilibrium self-consistent electric field, the Vlasov–Poisson and Poisson–Boltzmann models were used for the electron component in the approximation of local equilibrium electrons and taking into account an electron sink on the body surface in the central field approximation. Criteria of applicability of the approximate Poisson–Boltzmann models in the vicinity of a body in a flow are formulated. The results obtained were verified both by test calculations for known model problems and by comparing the results of the solution of the same physical problems with the use of different mathematical models. The total current to a charged cylinder in a cross flow was calculated as a function of the electric potential, the ion velocity ratio, and the degree of plasma nonisothermality. The use of nested grids and a finite-difference splitting method for solving the Vlasov equations in the algorithm opens up opportunities for its further development to take into account particle collisions and to include charged particle sources and sinks in the analytical model. The results may be used in low-temperature rarefied plasma diagnostics and in the design of structural elements of spacecraft and space systems..

Ключевые слова: *поток разреженной неизотермической плазмы, поперечное обтекание цилиндра, система уравнений Власова–Пуассона, метод расщепления, уравнение Пуассона–Больцмана, модельные распределения электронов, вложенные сетки, расчет тока на цилиндр.*

Введение. Развитие космической техники сопровождается повышением требований к работоспособности, ресурсу бортового оборудования космических аппаратов. В ионосфере проводящее тело – отдельные элементы конструкции, космический аппарат в целом, космические системы – непрерывно обменивается зарядом с окружающей плазмой. Зарядовое состояние (равновесный потенциал) и токи, собираемые проводящим телом, определяются состоянием ионосферной плазмы, эмиссионными свойствами, освещенностью поверхностей тела и другими факторами, оказывающими влияние на работоспособность и ресурс.

В настоящее время физические процессы и явления, сопровождающие взаимодействие низкотемпературной плазмы с поверхностью тела, в целом известны и изучены. В связи с этим, возрастают возможности математического моделирования процессов на поверхности проводящего тела в ионосферной плазме для детального исследования комплексного и частичного воздействия множества определяющих факторов. Однако требуемые для решения таких задач вычислительные ресурсы не позволяют в ближайшее время рассматривать их как инструмент инженерных расчетов. Поэтому для практики актуальны упрощенные модели плазмы: кинетические уравнения Власова–Пуассона и уравнения Пуассона–Больцмана, использующие модельные распределения для заряженных компонент плазмы.

В настоящей статье описан алгоритм решения системы уравнений Власова–Пуассона в двумерной постановке, обосновывается достоверность результатов на примере задачи поперечного обтекания бесконечного цилиндра сверхзвуковым потоком бесстолкновительной плазмы. Такая модель обтекания цилиндра находит широкое применение в диагностике низкотемпературной плазмы (цилиндрический зонд Ленгмюра), в проектировании отдельных элементов конструкций научных приборов космических аппаратов (выносные штанги и т. п.) и перспективных космических систем (тросовые космические системы и др.).

Теория собирания тока в потоке разреженной плазмы при свободномолекулярном обтекании заряженного цилиндра впервые рассмотрена в работе [1]. Уточнение задачи для тонкого цилиндра приведено в работе [2]. Полученные асимптотические формулы применяются для интерпретации зондовых измерений при исследованиях сверхзвуковых потоков разреженной плазмы в лабораторных условиях, на ракетах и спутниках [3].

Оценки области применимости асимптотических формул для описания взаимодействия в системе «плазма – цилиндр» при свободномолекулярном обтекании тонкого цилиндра выполнены по результатам численных расчетов [4], проведенных в приближении симметричного поля электрического потенциала. Обтекание разреженной плазмой "большого" относительно дебаевского радиуса экранирования цилиндра, как правило, приводит к несимметричному пространственному распределению потенциала вокруг него, что усложняет расчет параметров потока плазмы [3]. В работе [5], основываясь на двумерной стационарной модели Власова–Пуассона в приближении больцмановских электронов, рассчитаны ионные токи на цилиндр при несимметричных полях потенциала. Расчеты ионных токов по двумерной модели Власова–Пуассона, включающей кинетическое уравнение для электронов, выполнены в [6]. По результатам этих расчетов уточнен диапазон применения асимптотических формул для токов на цилиндр в потоке бесстолкновительной немагнитной плазмы.

Постановка задачи. Моделируется взаимодействие проводящего кругового цилиндра длиной L, гораздо большей его радиуса основания r_0 ($L >> r_0$), с поперечным потоком трехкомпонентной разреженной плазмы, состоящей из нейтралов, положительных ионов и электронов. Плазма максвелловская, режим обтекания цилиндра бесстолкновительный, влияние магнитного поля пренебрежимо мало. Скорость потока V_0, концентрации заряженных частиц n_{i0}, n_{e0} в невозмущенном потоке и потенциал цилиндра φ_0 относительно потенциала невозмущенной плазмы известны. Поверхность тела полностью поглощает попавшие на нее заряды (электроны поглощаются, ионы нейтрализуются), электронная эмиссия отсутствует.

Моделирование ведется в двумерном физическом пространстве в прямоугольных декартовых координатах Oxy в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. При этом ось Ox параллельна вектору скорости потока плазмы. Поверхность цилиндра единичной длины моделируется окружностью с центром в начале координат. В рассматриваемом случае функции распределения заряженных компонент плазмы пятимерные.

В принятой системе координат в отсутствие внешнего магнитного поля система уравнений Власова–Пуассона имеет вид [7, 8]

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{x}} - \beta \frac{z}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{v}} = 0\,, \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\beta}}\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial f_e}{\partial \mathrm{x}} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial f_e}{\partial \mathrm{v}} = 0\,, \quad (2)$$

$$\Delta\varphi = -\xi^2\left(z n_i - n_e\right), \quad n_\alpha = \int\limits_{\Omega_{\mathrm{V}\alpha}} f_\alpha d\mathrm{v}\,, \quad \alpha = i, e\,. \quad (3)$$

Здесь безразмерные величины: $\mathrm{x} = \left(x, y\right)$ – координаты точки физического пространства, отнесены к радиусу цилиндра r_0; $\mathrm{v} = \left(v_x, v_y\right)$ – координаты точки пространства скоростей частиц сорта α, отнесены к соответствующим тепловым скоростям $u_\alpha = \sqrt{2kT_\alpha / m_\alpha}$; t – время, отнесено к величине r_0 / u_i; $\beta = T_e / T_i$, $\mu = m_e / m_i$ – отношения температур и масс заряженных частиц плазмы; $\xi = r_0 / \lambda_d$ – отношение радиуса цилиндра к дебаевскому радиусу экранирования $\lambda_d = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 k T_e}{e^2 n_{i0}}}$; φ – потенциал электрического поля, отнесенный к величине kT_e/e; e – элементарный заряд; ε_0 – электрическая постоянная; k – постоянная Больцмана; z – зарядовое число ионов; $f_\alpha(t,\mathrm{x},\mathrm{v})$, n_α, m_α, T_α, $\Omega_{\mathrm{V}_\alpha}$ – соответственно функция распределения по скоростям, концентрация, масса, температура и расчетная область в пространстве безразмерных скоростей частиц сорта α. Индекс $\alpha = i, e$: i относится к положительным ионам, e – к электронам. Концентрации n_α частиц сорта α отнесены к их концентрациям в невозмущенной плазме $n_{\alpha 0}$, в силу квазинейтральности – $n_{e0} = z \cdot n_{i0}$.

Искомые функции распределения частиц по скоростям f_α и потенциал φ удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$f_\alpha\big|_{t=0} = f_\alpha^0; \quad f_\alpha\big|_{|\mathrm{x}|\to\infty} = f_\alpha^\infty; \quad f_\alpha(t,\mathrm{x},\mathrm{v})\Big|_{\substack{\mathrm{x}\in\partial\Omega_0 \\ (\mathrm{v},\mathrm{n})>0}} = 0, \qquad (4)$$

$$\varphi\big|_{|\mathrm{x}|\to\infty} = 0, \quad \varphi\big|_{\partial\Omega_0} = \varphi_{\mathrm{w}}. \qquad (5)$$

Здесь $\varphi_{\mathrm{w}} = e\varphi_0/kT_e$ – безразмерный потенциал цилиндра; n – внешняя нормаль к поверхности тела $\partial\Omega_0$.

Заряженные частицы вдали от тела распределены по закону Максвелла–Больцмана

$$f_i^\infty = \frac{1}{\pi}\exp\left[-\left|\mathrm{v}-\mathrm{S}\right|^2 - \beta z\varphi\right], \quad f_e^\infty = \frac{1}{\pi}\exp\left[-\left|\mathrm{v}-\sqrt{\mu/\beta}\,\mathrm{S}\right|^2 + \varphi\right], \qquad (6)$$

где $\mathrm{S} = \mathrm{V}_0/u_i$ – ионное скоростное отношение.

В начальный момент времени функция распределения ионов $f_i^0(\mathrm{x},\mathrm{v})$ – максвелловская ($f_i^0 = f_i^\infty$) или задается с использованием аналитической модели обтекания тела (цилиндра) нейтральным разреженным газом [7, 9]. Электроны в начальный момент времени распределены по закону Максвелла–Больцмана (6).

Процесс обтекания цилиндра определяется ионным характерным временем, существенно превосходящим электронное характерное время. Поэтому при расчете локально равновесного самосогласованного электростатического поля используется приближение "замороженных" ионов $n_i = n_i(\mathrm{x})$. При некотором модельном распределении концентрации электронов $n_e = n_e(\mathrm{x},\varphi)$ самосогласованное электростатическое поле определяется уравнением Пуассона–Больцмана [7]

$$\Delta\varphi = -\xi^2\left(z n_i(\mathrm{x}) - n_e(\mathrm{x},\varphi)\right). \qquad (7)$$

В невозмущенной плазме вдали от тела существенно более легкие по сравнению с другими компонентами электроны являются локально равновесными, а их концентрация описывается распределением Больцмана

$$n_e = \exp(\varphi). \qquad (8)$$

В окрестности цилиндра в качестве модельных распределений электронов $n_e = n_e(\mathrm{x}, \Phi)$ использованы решения кинетических уравнений Власова в приближении центрального поля [8, 10]. При таких допущениях задача обтекания заряженного цилиндра сводится к решению системы уравнений Власова–Пуассона (1), (7) с соответствующими краевыми условиями.

Алгоритм решения задачи. Кинетические уравнения Власова (1), (2), уравнения Пуассона (3) и Пуассона–Больцмана (7) решаются конечно-разностным методом [8, 10, 11] в прямоугольных системах координат физического пространства и пространства скоростей. В физическом пространстве использовались равномерные вложенные сетки [8], в пространстве скоростей – равномерная сетка с шагом, обеспечивающим необходимую точность аппроксимации функции распределения. В приграничных узлах около криволинейных поверхностей твердых тел в физическом пространстве использовались неравномерные сетки. В пространстве скоростей также использовались неравномерные (сгущающиеся) сетки вблизи поверхностей разрыва функции распределения. Положение поверхности разрыва функции распределения в пространстве скоростей корректировалось методом характеристик [12].

Расчетные области в физическом пространстве и в пространстве скоростей выбираем так, чтобы охватить область возмущения плазмы и электростатического поля при обтекании цилиндра. На границах расчетных областей задаются соответствующие искусственные физические краевые условия, обусловленные уравнениями (4) – (5).

В физическом пространстве расчетная область $\Omega = \{(x, y) \in [x_0, x_k; y_0, y_k]\}$. В пространстве скоростей для ионов расчетная область

$$\Omega_\mathrm{V} = \{(v_x, v_y) \in [S - v_m, S + v_m; -v_m, v_m]\},$$

для электронов –

$$\Omega_\mathrm{V} = \{(v_x, v_y) \in [\sqrt{\mu/\beta} S - v_m, \sqrt{\mu/\beta} S + v_m; -v_m, v_m]\},$$

где v_m – наибольшее значение безразмерной тепловой скорости частиц в расчетах. В притягивающем поле для положительных ионов ($\varphi_\mathrm{w} \le 0$) – $v_m = \sqrt{u_m^2 - z\beta\varphi_\mathrm{w}}$, для электронов ($\varphi_\mathrm{w} \ge 0$) – $v_m = \sqrt{u_m^2 + \varphi_\mathrm{w}}$. В отталкивающем поле для ионов и электронов – $v_m = u_m$. Здесь u_m – наибольшая безразмерная тепловая скорость частиц невозмущенной плазмы (в расчетах u_m равнялась 5).

В случае малых ξ на границе расчетной области физического пространства $\partial\Omega$ задаем асимптотические условия для потенциала [13]

$$[\varphi'_r + \varphi/r]_{\partial\Omega} = 0;$$

при больших скоростях потока S на участках выхода следа за границы расчетной области используем условия квазинейтральности плазмы [7]

$$[\varphi - \ln(n_i)]_{\partial\Omega} = 0.$$

Для функции распределения частиц сорта α на границах пространственной расчетной области $\partial\Omega$ для вылетающих из расчетной области частиц задаем условие свободного вытекания – граничный узел является расчетным. Для влетающих в расчетную область частиц задаем равновесное распределение Максвелла–Больцмана

$$f_\alpha(t, \mathrm{x}, \mathrm{v})\Big|_{\substack{\mathrm{x}\in\partial\Omega \\ (\mathrm{v},\mathrm{n})>0}} = f_\alpha^{\ \infty},$$

где n – внутренняя нормаль к границе расчетной области $\partial\Omega$.

Дискретизация кинетических уравнений. При аппроксимации кинетических членов уравнения Власова использованы односторонние разности против потока [14], аппроксимация градиентов потенциала в физическом пространстве выполнена центральными разностями. Величина шага по времени Δt выбиралась из условий Куранта–Фридрихса–Леви

$$\Delta t \le \Delta x / v_{\max}, \quad \Delta t \le \Delta v / 2F_{\max},$$

где Δx – наименьший шаг пространственной сетки, $v_{\max}$ – наибольшая скорость частиц, Δv – наименьший шаг сетки пространства скоростей, $F_{\max}$ – наибольшая сила в рассматриваемой точке физического пространства, действующая на частицу, для ионов $F_{\max} = \beta z/2 \cdot \|\partial\varphi/\partial\mathrm{x}\|_C$. Задача решается методом установления.

Дискретизация уравнений Пуассона и Пуассона–Больцмана. Двумерный оператор Лапласа в уравнениях Пуассона и Пуассона–Больцмана аппроксимируется на пятиточечном шаблоне. В приграничных расчетных узлах около криволинейной поверхности цилиндра использованы неравномерные сетки. Стационарные задачи для уравнений (3) и (7) с соответствующими граничными условиями Дирихле решаются на вложенных сетках методом простых итераций или методом установления с использованием параболизации задачи. В нелинейном уравнении Пуассона–Больцмана (7) модельное распределение электронов $n_e = n_e(\mathrm{x}, \varphi)$ линеаризуется в окрестности некоторого "опорного" потенциала, значение которого периодически корректируется [10].

Решение задачи на вложенных сетках ведется последовательными приближениями по сеткам [8]. Итерации при расчетах на каждой из вложенных сеток перерываются либо при достижении заданной точности вычислений, либо при достижении минимума энергии электрического поля в расчетной области.

Алгоритм решения задачи (1) – (3) сводится к двум итерационным процессам [8]: 1) решение кинетического уравнения для ионов (1) при заданном поле электрического потенциала; 2) решение кинетического уравнения для электронов (2) в самосогласованном электрическом поле (3) при заданном поле концентрации ионов. Второй итерационный процесс является внутренним для первого. В каждом итерационном процессе для сглаживания нефизических изменений параметров задачи используются простейшие регуляризирующие операторы [6, 11], основанные на физических особенностях задачи: неотрицательность функции распределения, минимум энергии самосогласованного электрического поля, области монотонности электрического потенциала [8, 10].

Системы уравнений Власова–Пуассона (1) – (3) и (1), (7) по ионной компоненте (первый итерационный процесс) решаются методом установления с расщеплением по физическим процессам [8, 15], по электронной компоненте (второй итерационный процесс) – итерационным методом в самосогласованном электростатическом поле. При решении кинетических уравнений используется также метод характеристик [7].

Характеристиками кинетических уравнений Власова (1), (2) являются траектории частиц, описываемые уравнениями движения:

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{v}\,, \quad \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \gamma_\alpha \mathrm{E}\,, \quad \gamma_\alpha = \begin{cases} \beta z/2 & \text{для ионов } (\alpha = i); \\ -1/2 & \text{для электронов } (\alpha = e) \end{cases}.$$

Здесь $\mathrm{E} = -\partial\varphi/\partial\mathrm{x}$ – вектор напряженности электрического поля. Поскольку нас интересуют стационарные решения уравнений Власова, множитель $\sqrt{\beta/\mu}$ для времени в уравнениях движения электронов опущен. Уравнения движения интегрируются разностным методом с перешагиванием [16]. Вдоль траектории контролируется сохранение энергии частицы, пересчет параметров в пределах расчетной ячейки выполняется с помощью линейной интерполяции. Финитные траектории идентифицируются по числу оборотов траектории вокруг цилиндра (больше двух оборотов) и длиной траектории (больше периметра пространственной расчетной области). При расчете макропараметров финитные траектории не учитываются.

Вычисление макропараметров (концентраций, плотности потоков частиц и энергии) сводится к вычислению моментов функций распределения, полученных в результате решения системы уравнений Власова–Пуассона (1) – (3) [8].

Тестовые расчеты. Рассмотрены задачи поперечного обтекания бесконечного цилиндра потоком нейтрального разреженного газа и взаимодействия заряженного цилиндра с покоящейся разреженной плазмой. Результаты с точностью до долей процента для нейтрального газа и нескольких процентов для плазмы совпали с известными решениями соответствующих задач [3, 7, 9, 13].

Основными параметрами задачи, определяющими режим обтекания проводящего тела, являются: S – ионное скоростное отношение, ξ – отношение характерного размера тела к дебаевскому радиусу экранирования, φ_w – безразмерный потенциал поверхности тела относительно потенциала невозмущенной плазмы, степень неизотермичности плазмы $\beta = T_e/T_i$ и отношение масс заряженных компонентов плазмы $\mu = m_e/m_i$.

Проведены параметрические исследования влияния параметров ξ, S и φ_w на формирование полей концентрации заряженных частиц и электрического поля в окрестности цилиндра, обтекаемого сверхзвуковым потоком разреженной плазмы. Расчеты выполнены для диапзонов значений параметров – $S = 1...20$; $\xi = 0{,}1...100$; $\varphi_w = –50...25$. Полученные результаты качественно и количественно совпали с данными работ по исследованию электростатического следа [7, 17] и токов на цилиндр [1, 2, 4 – 6].

Структура электростатического следа при обтекании заряженного тела в основном определяется параметрами ξ, S и φ_w [7, 17]. Для отталкивающих и малых притягивающих электроны потенциалов тела можно выделить следующие характерные случаи [10]: симметричное ($S \sim 0$), несимметричное монотонное ($S > 0$, $\varphi_m \geq \varphi_0$) и несимметричное немонотонное ($S \gg 1$, $\varphi_m < \varphi_0$) распределение потенциала самосогласованного электрического поля. Здесь φ_m – наименьшее значение потенциала в окрестности обтекаемого тела (в силу симметрии рассматриваемой задачи $\varphi_m = \varphi(x_m, 0)$: $\varphi_m \leq \varphi(x, 0)$, $\forall x \geq 1$).

На рис. 1 показана характерная структура монотонного (а) и немонотонного (б) распределения потенциала несимметричного самосогласованного электростатического поля в окрестности обтекаемого цилиндра. Расчеты, представленные на рис. 1, а), получены при $S = 10$, $\xi = 3$, $\varphi_w = -5$, а на рис. 1, б) – при $S = 10$, $\xi = 10$, $\varphi_w = -2$.

При параметрических исследованиях для каждого сочетания параметров задачи S, ξ, β пространственное распределение концентрации электронов в самосогласованном электрическом поле рассчитывалось на основе моделей Власова–Пуассона (2) – (3) и Пуассона–Больцмана (7) с модельными распределениями в приближении локально равновесных электронов (8) и с учетом стока электронов на поверхности тела в приближении центрального поля [10].

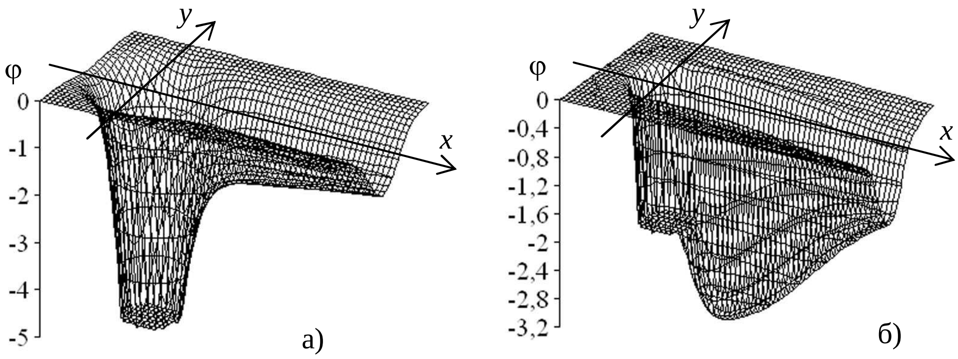

Рис. 1

Сравнение результатов позволило выделить области применимости модели Пуассона–Больцмана с модельными распределениями электронов. Показано, что при монотонном распределении электрического потенциала (рис. 1, а)) использование модельных распределений электронов в приближении центрального поля позволяет получать достоверные решения задачи всюду вплоть до поверхности тела в области следа. В случае немонотонного электростатического следа (рис. 1, б)) "провал" потенциала в следе выступает барьером, отделяющим электроны от поглощающей поверхности тела. При $x \geq x_m$ электроны остаются равновесными. В ближней области немонотонного следа ($x < x_m$) модель Пуассона–Больцмана приводит к большим относительным погрешностям расчета как потенциала, так и концентрации электронов.

Априори определить, к какому из выделенных случаев (симметричное, несимметричное монотонное или несимметричное немонотонное электрическое поле) принадлежит структура следа при обтекании заряженного тела, можно из анализа модельной задачи гиперзвукового обтекания [10], когда ионный след представляется вырезанной полуполосой, обедненной ионами до некоторого значения n_i^{sl} ($n_i = 1$ при $|y| \geq 1$ и $n_i = n_i^{sl}$ при $|y| < 1$). При удалении от тела устанавливается равновесное распределение электронов (8) и в результате задача становится одномерной. В этом случае потенциал в следе определяется только значением ξ, а его минимум φ^*_m достигается на плоскости симметрии $y = 0$. На рис. 2 показано изменение электрического потенциала на плоскости симметрии этой модельной задачи в зависимости от параметров ξ и n_i^{sl}. Кривые на рис. 2 соответствуют следующим значениям концентрации n_i^{sl}: 1 – n_i^{sl} = 0; 2 – n_i^{sl} = 0,00001; 3 – n_i^{sl} = 0,0001; 4 – n_i^{sl} = 0,001; 5 – n_i^{sl} = 0,01; 6 – n_i^{sl} = 0,1; 7 – n_i^{sl} = 0,2; 8 – n_i^{sl} = 0,3.

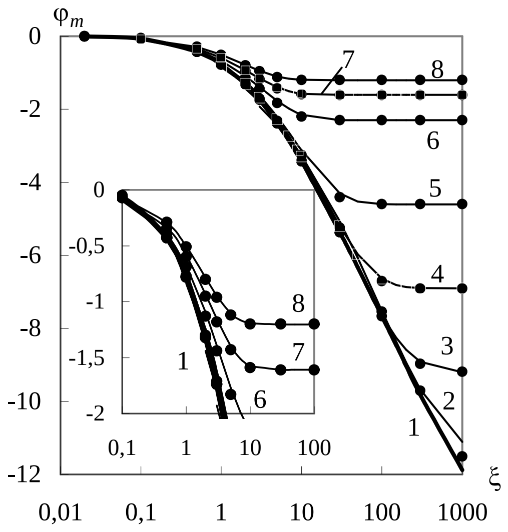

Рис. 2

При заданном распределении концентрации ионов $n_i(x, y)$ в окрестности цилиндра, минимальное значение потенциала электрического поля φ^*_m в следе можно оценить по формуле

$$\varphi^*_m\left(\xi, n_i^*\right) = \left[1 - \exp\left(-a\xi^b\right)\right]\ln\left(n_i^*\right), \quad n_i^* \approx n_i\left(x_m, 0\right), \quad x_m = c + d/\xi + g/\xi^{0,112}, \quad (9)$$

где $a = 0{,}102 + \sqrt{n_i^*}$, $b = 1 + 0{,}0433\ln\left(n_i^*\right)$, $c = 0{,}48\ln(S+5) + 0{,}084$, $d = 2{,}45\ln(S+5) - 3{,}46$, $g = 0{,}93\ln(S+5) - 1{,}16$.

Аппроксимация величины x_m получена по результатам проведенных параметрических исследований.

Таким образом, получив из (9) оценку минимального значения потенциала $\varphi_m \approx \varphi^*_m\left(\xi, n_i^{sl}\right)$ и проверив условие $\varphi_m < \varphi_w$, можем априори судить о монотонности изменения потенциала в следе при сверхзвуковом свободномолекулярном обтекании цилиндра разреженной плазмой. Полученные соотношения позволяют определить области применимости модельных распределений электронов для модели Пуассона–Больцмана (7) при расчете самосогласованного электрического поля. В случае немонотонного распределения потенциала в следе $\varphi_m < \varphi_w$ область применимости модельного распределения концентрации электронов (8) в области следа определяется условием $x > x_m$.

Результаты расчетов. Численно по двумерной модели Власова–Пуассона с использованием модельных распределений электронов рассчитаны токи однозарядных ионов на проводящий цилиндр в поперечном потоке бесстолкновительной плазмы. Результаты расчетов ионных токов, отнесенных к хаотическому ионному току с множителем $1/2\sqrt{\pi}$, при различных значениях параметров задачи S, ξ, β в зависимости от потенциала цилиндра относительно невозмущенной плазмы приведены в работе авторов [11].

Полученные результаты для $\xi = 1$, $\beta = 1$ при различных значениях S вместе с результатами работ [4, 5, 6] показаны на рис. 3. Ионный ток $\bar{I}_i$ отнесен к хаотическому ионному току. Кривые 1 на рисунке соответствуют $S = 1$; кривые 2 – $S = 3$; кривые 3 – $S = 5$; кривые 4 – $S = 7$; штриховые кривые – расчеты: 5 – Godard, Laframboise [4], 6 – Xu [5], 7 – Choiniere [6], 8 – авторы. Рассчитанные значения тока при $S > 1$ с удовлетворительной точностью совпали с приближенным асимптотическим решением для тонкого цилиндра (сплошные кривые на рис. 3), полученным Langmuir и Mott-Smith [1] и уточненным Hoegy и Wharton [2]

$$\bar{I}_i(\varphi) = 2/\sqrt{\pi}\,\sqrt{1/2 + S^2 - \beta\varphi}, \quad \varphi < S^2/\beta, \; S > 1.$$

При скорости потока $S > 1$ полученные значения ионных токов на цилиндр с удовлетворительной точностью совпали с результатами численных расчетов работы [4], проведенных в приближении симметричного поля электрического потенциала, при скорости $S > 2$ получено хорошее совпадение и с результатами расчетов по двумерной модели Власова–Пуассона в приближении больцмановских электронов [5], и с использованием кинетического уравнения для электронов [6].

В отличие от [4], в данной работе рассмотрено несимметричное самосогласованное электрическое поле вблизи цилиндра при использовании формул распределения электронов в центральном поле. В работах [5], [6] стационарные уравнения Власова для ионов решались методом характеристик с организацией итерационного процесса по стационарным полям концентраций ионов и потенциала. В данной работе решены нестационарные кинетические уравнения конечно-разностным методом расщепления для ионов с использованием метода характеристик и модельных распределений для электронов в самосогласованном электрическом поле. Использование вложенных сеток позволяет достаточно просто включать в расчетную схему дополнительные элементы, моделирующие окружение: тела простой формы, источники массы и т. п.

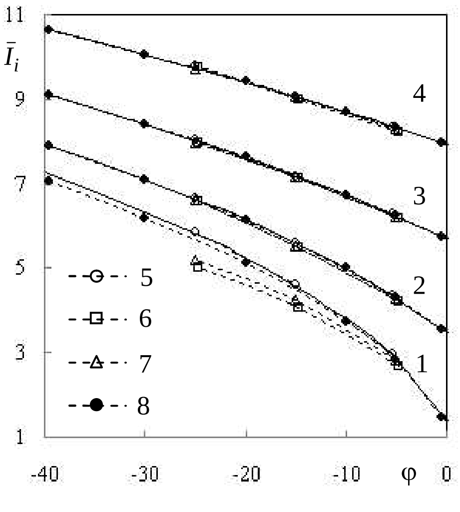

Рис. 3

Проведены расчеты полного тока на поперечно обтекаемый бесстолкновительной плазмой цилиндр при отталкивающих электроны потенциалах. Суммарный ток $\bar{I}$ заряженных частиц отнесен к хаотическому току электронов. Ионы полагались однозарядными. За положительный принят электронный ток на цилиндр. На рис. 4 представлены результаты расчета тока $\bar{I}$ при различных значениях параметра β и ионного скоростного отношения S в зависимости от безразмерного потенциала поверхности цилиндра φ для $\xi = 1$ и $\mu = 0{,}0000392$ (атомарный азот). Кривые 1 на рисунке соответствуют $S = 3$, кривые 2 – $S = 5$, кривые 3 – $S = 7$; сплошные кривые – $\beta = 1$, пунктирные – $\beta = 1{,}5$, штриховые – $\beta = 2$.

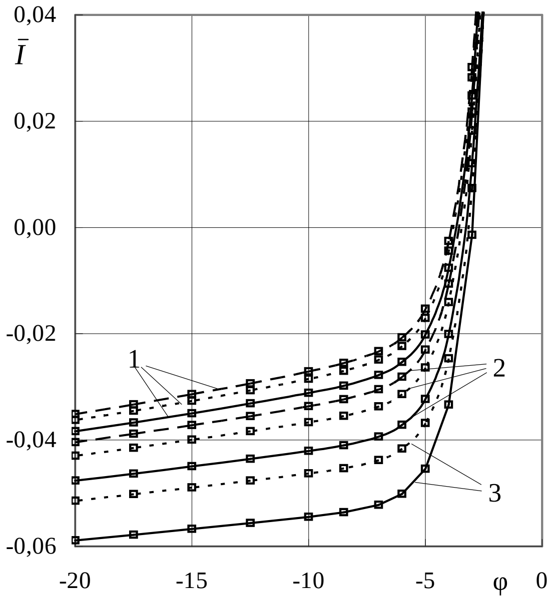

Рис. 4

Приведенные на рис. 4 данные наглядно демонстрируют влияние кинетических параметров S, β потока плазмы на собирание тока заряженным цилиндром. Полученные решения согласуются с результатами работ [6, 18].

Заключение. На примере решения задачи для кругового цилиндра обоснована эффективность численного двумерного моделирования взаимодействия бесстолкновительной плазмы с поперечно обтекаемым проводящим телом. Алгоритм моделирования включает возможность решения уравнений Власова конечноразностными методами расщепления или методом характеристик, позволяет вести расчет локально равновесного самосогласованного электрического поля на основе системы уравнений Власова–Пуассона для электронов или уравнения Пуассона–Больцмана с использованием модельных распределений концентрации электронов. Для исходных параметров задачи получены соотношения, позволяющие априори локализовать области применимости наиболее простых моделей, а использование расчетов на вложенных сетках дает возможность легко организовать вычисления на основе оптимальной модели для каждой из таких областей. Использование метода расщепления и вложенных сеток открывает возможности развития алгоритма для учета столкновений и включения в расчетную схему источников и стоков заряженных частиц.

1. *Mott-Smith H., Langmuir I.* The theory of collectors in gaseous discharges. Phys. Rev. 1926. V. 28. № 5. P. 727–763.
2. *Hoegy W. R., Wharton L. E.*, Current to a moving cylindrical electrostatic probe. Journal of Applied Physics. 1973. V. 44, No. 12. P. 5365–5371.
3. *Чан П.*, *Толбот Л.*, *Турян К.* Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. М.: Мир, 1978. 201 с.

4. *Godard R., Laframboise J.* Total current to cylindrical collectors in collision less plasma flow. Planetary Space Science. 1983. V. 31, № 3. P. 275–283.
5. *Xu G. Z.* The interaction of a moving spacecraft with the ionosphere: Current collection and wake structure : Ph.D. dissertation. York University, 1992. 258 p.
6. *Choiniere E.* Theory and experimental evaluation of a consistent steady-state kinetic model for two-dimensional conductive structures in ionospheric plasmas with application to bare electrodynamic tethers in space : Ph.D. dissertation. University of Michigan, 2004. 288 p.
7. *Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* Искусственные спутники в разреженной плазме. М.: Наука, 1964. 382 с.
8. *Лазученков Д. Н., Лазученков Н. М.* Моделирование взаимодействия потока разреженной плазмы с обтекаемым заряженным проводящим цилиндром вблизи проводящей поверхности. Техническая механика. 2014. №2. С. 63–72.
9. *Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
10. *Лазученков Д. Н.* Расчет отталкивающего электроны самосогласованного электрического поля вблизи обтекаемого потоком разреженной плазмы цилиндра. Техническая механика. 2012. №4. С. 27–35.
11 *Лазученков Д. Н., Лазученков Н. М.* Интерпретация зондовых измерений в потоке бесстолкновительной плазмы. Техническая механика. 2018. № 1. С. 107–120.
12. *Титарев В. А., Шахов Е. М.* Численный расчет поперечного обтекания холодной пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа. Механика жидкости и газа. 2005. № 5. С. 140–154.
13. *Latramboise J. G.* Theory of Spherical and Cylindrical Langmuir Probes in a Collisionless Maxwellian Plasma at Rest. Report, No. 100. Univ. of Toronto, Institute of Aerospace Studies. 1966. 210 c.
14. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
15. *Сигов Ю. С.* Численные методы кинетической теории плазмы. М.: Изд-во. МФТИ, 1984. 94 с.
16. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989. 452 с.
17. *Кайл Р. Е., Гей Ф. С., Густафсон В. А.* Электрические потенциальные поля ионосферного спутника. РТК. 1968. №4. С. 139–145.
18. *Алексеев Б. В., Котельников В. А.* Зондовый метод диагностики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.

Получено 12.02.2019,
в окончательном варианте 04.03.2019