

Влияние возмущений формы границы на частотные характеристики планарных колебаний пьезокерамических пластин. Аналитическое решение

П. Шакери Мобарак^{а,1}, В. Т. Гринченко^б, Б. Солтанниа^в

^а Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

^б Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина

^в Факультет машиностроения, Университет Альберты, Эдмонтон, Канада

¹ pouyan.shakeri@gmail.com

Построено общее решение граничной задачи о планарных колебаниях пьезокерамических пластин в форме параллелограмма. Решение представлено в виде бесконечных рядов, каждое слагаемое которых удовлетворяет уравнениям движения элемента пьезопластины. Для определения коэффициентов рядов используются функциональные уравнения, получаемые на основе граничных условий задачи. Решение указанных уравнений возможно по двум подходам, основанным на минимизации среднеквадратичного отклонения и на методе коллокации. При практическом использовании конечных сумм согласно обоим подходам приходим к поиску решения систем линейных алгебраических уравнений. Получены количественные оценки динамических характеристик пьезопластин, анализ которых позволяет оценить влияние геометрии пластины. Метод решения обеспечивает высокую точность получаемых результатов.

Ключевые слова: планарные колебания, пьезокерамические пластины неканонической формы, метод суперпозиции, метод коллокации, метод минимизации среднеквадратичного отклонения, метод редукции, спектр собственных частот.

Введение. Использование материалов с пьезоэффектом позволяет достаточно легко возбуждать колебания в твердых упругих телах. Изучение таких колебаний представляет интерес как для понимания общих закономерностей поведения упругих волн в ограниченных областях, так и разработки рекомендаций по решению инженерных задач при создании электромеханических преобразователей [1, 2]. В настоящее время особое внимание уделяется разработкам многочисленных типов микропреобразователей, которые объединяются термином MEMS (MicroElectroMechanical Systems) [3].

Одной из возможностей управления динамическими характеристиками активных элементов MEMS является изменение формы пьезоэлемента, что и обусловило актуальность исследований по развитию методов решения динамических задач электроупругости для элементов различной геометрии. Ниже представлен аналитический метод решения граничных задач электроупругости для пьезопластин в форме параллелограмма. Изменение их формы может рассматриваться как возмущение формы прямоугольных пластин.

Основное внимание уделяется разработке аналитического метода решения граничных задач. Наличие аналитического решения создает предпосылки для более глубокого анализа свойств колебательной системы. В качестве иллюстрации таких возможностей можно сослаться на результаты исследования явления краевого резонанса в упругих, в том числе и пьезокерамических, пластинах. Именно то, что на частоте краевого резонанса максимума достигают все амплитуды неоднородных волн, важно для правильного понимания сути этого явления.

При построении аналитического решения задачи для пластины в форме параллелограмма используется метод, основанный на суперпозиции решений уравнений движения, представленных в виде бесконечных рядов и построенных таким образом, чтобы удовлетворялись произвольные граничные условия на границах параллелограмма. Обоснование и эффективность такого подхода содержатся в [4–7].

Определение коэффициентов рядов, входящих в представление общих решений граничных задач, приводит к бесконечным системам алгебраических уравнений. Кроме естественного способа оценки точности выполнения граничных условий использована возможность получения численного решения и приведено сравнение результатов двух расчетов. Такое сравнение полезно как для дополнительной проверки достоверности аналитических оценок, так и для разработки рекомендаций по выбору необходимых шагов дискретизации в численном расчете.

Основные соотношения теории планарных колебаний тонких электродированных пьезопластин с толщиной поляризацией при возбуждении электрическим полем. Планарные колебания (колебания в плоскости) тонких пьезокерамических пластин с толщиной поляризацией описываются векторным уравнением движения в перемещениях (уравнением Ламе), которое в случае сплошных электродов, покрывающих лицевые плоские поверхности пластины, имеет следующий вид [2]:

$$\frac{2}{1-\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 2\rho s_{11}^E (1+\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где \mathbf{u} – двумерный вектор перемещения с компонентами u_x, u_y в декартовой системе координат, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t)$, оси Ox, Oy лежат в плоскости пластины, ось Oz – перпендикулярна к ней; ρ – плотность; s_{11}^E, s_{12}^E – упругие податливости пьезоматериала, измеряемые при нулевом электрическом поле; ν – коэффициент Пуассона в плоскости, перпендикулярной к направлению поляризации материала (в плоскости изотропии), $\nu = -s_{12}^E/s_{11}^E$:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad (\operatorname{rot} \mathbf{u})_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad (\operatorname{rot} \mathbf{u})_x = (\operatorname{rot} \mathbf{u})_y \equiv 0. \quad (2)$$

Компоненты двумерного тензора напряжений для тонких пьезокерамических пластин выражаются в виде [2]

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)} [(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (1-\nu)\varepsilon_y - d_{31}(1+\nu)E_z]; \\ \sigma_y = \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)} [(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (1-\nu)\varepsilon_x - d_{31}(1+\nu)E_z]; \\ \tau_{xy} = \frac{1}{2s_{11}^E (1+\nu)} \varepsilon_{xy}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad (4)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – деформации [8]; d_{31} – пьезоэлектрическая константа; $E_z = E_z(t)$ – составляющая вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} , который имеет лишь одну ненулевую компоненту в направлении оси Oz , нормальную к электродным покрытиям пластины.

В случае возбуждения колебаний пластины толщиной $2h$ от генератора напряжений с выходной разностью потенциалов $2V_0(t)$, прикладываемых к электродным покрытиям на ее лицевых поверхностях, имеем

$$E_z = -\frac{V_0(t)}{h}. \quad (5)$$

Соответственно компоненты вектора напряжения \mathbf{F}_n на элементарной площадке с единичной нормалью \mathbf{n} выражаются в виде [2]

$$\begin{aligned} F_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y; \\ F_{ny} &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y. \end{aligned} \quad (6)$$

При задании условий в напряжениях на границе обычно рассматриваются нормальные и касательные компоненты вектора напряжения:

$$\begin{aligned} F_n &= F_{nx} n_x + F_{ny} n_y; \\ F_\tau &= -F_{nx} n_y + F_{ny} n_x. \end{aligned} \quad (7)$$

Общие решения в потенциалах. Уравнение движения в перемещениях (1) является достаточно сложным, в некоторых случаях, в том числе и при аналитических исследованиях, удобно для поля упругих перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t)$ перейти к представлению Гельмгольца через скалярный $\varphi(x, y, t)$ и векторный $\psi(x, y, t)$ потенциалы [1]:

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi, \quad \text{div } \psi = 0. \quad (8)$$

В данном двумерном случае векторный потенциал ψ имеет единственную ненулевую компоненту $\psi_z = \psi$ в направлении оси Oz . Подставляя с учетом этого (8) в (1) и учитывая, что $\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi$, $\text{rot rot } \psi = \text{grad div } \psi - \nabla^2 \psi$, а также тождества $\text{rot grad } \varphi \equiv 0$ и $\text{div rot } \psi \equiv 0$, получаем следующие волновые уравнения относительно скалярного потенциала φ и ненулевой составляющей векторного потенциала ψ :

$$\nabla^2 \varphi - \rho s_{11}^E (1 - \nu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \psi - 2\rho s_{11}^E (1 + \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

где первое описывает распространение в плоскости пластины продольных волн, второе – поперечных со скоростями соответственно

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}}; \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\rho s_{11}^E (1 + \nu)}}. \quad (10)$$

С учетом (10) уравнения (9) принимают вид

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Учитывая правила вычисления векторных операций $\text{grad}(\cdot)$ и $\text{rot}(\cdot)$, а также то, что в плоской задаче имеем $\psi = \mathbf{k}\psi(x, y)$, где $\psi(x, y) = \psi_z$ – скалярная функция,

$\psi_x = 0, \psi_y = 0$, а для компонент исходного векторного поля перемещений – $\mathbf{u} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y$, согласно (8) получаем выражения для компонент перемещений:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (12)$$

При возбуждении гармонических колебаний пьезопластины переменным электрическим полем от генератора напряжений предположим гармоническую зависимость исследуемых величин от времени:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)\exp(i\omega t); \quad \varphi = \varphi(x, y)\exp(i\omega t); \quad \psi = \psi(x, y)\exp(i\omega t), \quad (13)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота (рад/с); f – натуральная (герцева) частота, Гц.

Далее гармонический сомножитель $\exp(i\omega t)$ опускаем, а под величинами \mathbf{u} , φ , ψ и т.д. будем подразумевать их амплитудные значения. Так, подставляя (13) в (11), получаем скалярные уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2\varphi + k_1^2\varphi = 0; \quad \nabla^2\psi + k_2^2\psi = 0, \quad (14)$$

где k_1, k_2 – волновые числа продольных и поперечных волн в пластине,

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \sqrt{\omega^2 \rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}; \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2} = \sqrt{2\omega^2 \rho s_{11}^E (1 + \nu)}. \quad (15)$$

Преобразование составляющих тензора напряжений для плоской задачи (3) в соответствии с представлением компонент вектора перемещений через потенциалы Гельмгольца (12) с учетом формул Коши для деформаций (4) и выражения для нагружающего электрического поля (5) приводит к равенствам

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \right] + \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(d_{31} \frac{V_0}{h} \right); \\ \sigma_y = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left[\nu \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \right] + \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(d_{31} \frac{V_0}{h} \right); \\ \tau_{xy} = \frac{1}{2s_{11}^E (1 + \nu)} \left[2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right]. \end{cases} \quad (16)$$

При задании на контуре пластины нормальных \bar{F}_n и касательных \bar{F}_τ напряжений граничные условия приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} 2G \left[\left(\frac{1}{1 - \nu} - n_y^2 \right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{1 - \nu} - n_x^2 \right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} (n_x^2 - n_y^2) + \left(2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) n_x n_y \right] = \\ = -2G \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} d_{31} \frac{V_0}{h} + \bar{F}_n; \end{aligned} \quad (17a)$$

$$2G \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) (n_x^2 - n_y^2) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) n_x n_y \right] = \bar{F}_\tau, \quad (176)$$

где G – модуль сдвига, $G = \frac{1}{2s_{11}^E(1+\nu)}$; величина $-2G \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} d_{31} \frac{V_0}{h}$ в правой части равенства (17a) возникает вследствие наличия связи между электрическими и механическими полями, а также она пропорциональна пьезоконстанте d_{31} и амплитуде напряженности внешнего электрического поля. Далее обозначим ее как \bar{F}_n^{Veq} . Заметим, что слева в (17) расположены члены, представляющие собой части нормальной и касательной составляющих вектора напряжений, связанные с упругой деформацией, которые можно обозначить σ_n^{def} и σ_τ^{def} .

При этом (17) в сокращенном виде можно переписать так:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{def} &= \bar{F}_n^{Veq} + \bar{F}_n; \\ \sigma_\tau^{def} &= \bar{F}_\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Постановка задачи. В рамках вышеприведенной модели рассмотрим задачу о гармонических колебаниях тонкой пьезокерамической пластины со свободными от механических напряжений краями в форме параллелограмма $OBCD$ с углами α в вершинах O и C и размерами сторон $OD = BC = a$, $OB = CD = b$ (рис. 1). Граничные условия для напряжений на границе параллелограмма имеют вид (17) при

$$\bar{F}_n = 0; \quad \bar{F}_\tau = 0. \quad (19)$$

Введем две прямоугольные декартовы системы координат Ox_1y_1 и Ox_2y_2 с началом в точке O (рис. 1).

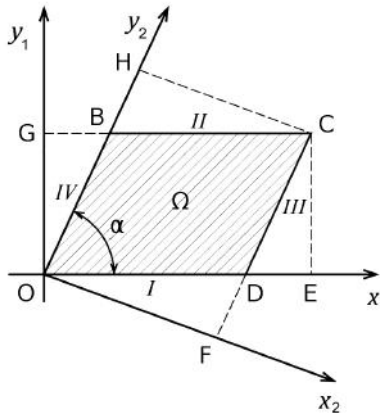


Рис. 1. Пьезокерамическая пластина в форме параллелограмма.

Зависимость между координатами в этих системах имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, \\ y_1 = -x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha; \end{cases} \quad (20a)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha, \\ y_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (20б)$$

Решение для потенциалов φ и ψ может быть приведено в виде суммы (суперпозиции) потенциалов, являющихся решениями уравнений Гельмгольца (14):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1(x_1, y_1) + \varphi_2(x_1, y_1) + \varphi_3(x_2, y_2) + \varphi_4(x_2, y_2); \\ \psi &= \psi_1(x_1, y_1) + \psi_2(x_1, y_1) + \psi_3(x_2, y_2) + \psi_4(x_2, y_2). \end{aligned} \quad (21)$$

При этом каждый из потенциалов φ_i , ψ_i представляется рядом в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} x_1; \\ \varphi_2(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} (x_1 - \delta_1); \\ \varphi_3(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(3)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} (y_2 - \delta_2); \\ \varphi_4(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(4)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} y_2; \\ \psi_1(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} x_1; \\ \psi_2(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} (x_1 - \delta_1); \\ \psi_3(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(3)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} (y_2 - \delta_2); \\ \psi_4(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(4)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} y_2, \end{aligned} \right. \quad (22)$$

где $\delta_1 = GB$; $\delta_2 = FD$ (рис. 1).

Форма рядов (22) была выбрана исходя из того, чтобы на i -х сторонах параллелограмма φ_i , ψ_i представляли собой ряды по полным тригонометрическим базисам.

Подставляя φ_j , ψ_j ($j = 1, 4$) в уравнения Гельмгольца (14), приходим к совокупности независимых однородных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами относительно входящих в представления (22) функций $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$. Решая эти уравнения и выбирая решения ОДУ из соображений независимости получаемых базисных функций и убывания экспонент от сторон параллелограмма внутрь, получаем явные выражения для $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$ в зависимости от соотношений $\lambda_n = n\pi/a$, $\mu_m = m\pi/b$ и волновых чисел k_1, k_2 (15) для каждого n и m :

$$\left. \begin{aligned}
 A_n^{(1)}(y_1) &= A_{1n} \begin{cases} \cos \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n < k_1, \\ \exp(-\sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2} y_1), & \lambda_n \geq k_1; \end{cases} \\
 A_n^{(2)}(y_1) &= A_{2n} \begin{cases} \sin \sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n < k_1, \\ \exp(\sqrt{\lambda_n^2 - k_1^2} (y_1 - h)), & \lambda_n \geq k_1; \end{cases} \\
 A_m^{(3)}(x_2) &= A_{3m} \begin{cases} \sin \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m < k_1, \\ \exp(\sqrt{\mu_m^2 - k_1^2} (x_2 - a)), & \mu_m \geq k_1; \end{cases} \\
 A_m^{(4)}(x_2) &= A_{4m} \begin{cases} \cos \sqrt{k_1^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m < k_1, \\ \exp(-\sqrt{\mu_m^2 - k_1^2} x_2), & \mu_m \geq k_1; \end{cases} \\
 B_n^{(1)}(y_1) &= B_{1n} \begin{cases} \cos \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n < k_2, \\ \exp(-\sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2} y_1), & \lambda_n \geq k_2; \end{cases} \\
 B_n^{(2)}(y_1) &= B_{2n} \begin{cases} \sin \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} y_1, & \lambda_n < k_2, \\ \exp(\sqrt{\lambda_n^2 - k_2^2} (y_1 - h)), & \lambda_n \geq k_2; \end{cases} \\
 B_m^{(3)}(x_2) &= B_{3m} \begin{cases} \sin \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m < k_2, \\ \exp(\sqrt{\mu_m^2 - k_2^2} (x_2 - a)), & \mu_m \geq k_2; \end{cases} \\
 B_m^{(4)}(x_2) &= B_{4m} \begin{cases} \cos \sqrt{k_2^2 - \mu_m^2} x_2, & \mu_m < k_2, \\ \exp(-\sqrt{\mu_m^2 - k_2^2} x_2), & \mu_m \geq k_2. \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Таким образом, ряды (22) для φ_i, ψ_i с учетом выражений (23) являются рядами по двумерным базисным функциям, которые для краткости обозначим соответственно $\Phi_{ij}(x_k, y_k), \Psi_{ij}(x_k, y_k)$, с коэффициентами A_{ij}, B_{ij} ($i = 1, 4, k = 1, 2$).

Компьютерное моделирование колебаний пластин. При математическом моделировании физических колебаний основной целью является получение их количественных характеристик в зависимости от геометрических параметров области их существования и граничных условий. Как правило, достичь этого можно с помощью некоторых итерационных процессов. Например, при увеличении количества членов ряда Фурье, используемого для представления искомой функции. Для эффективной реализации итерационных процессов важно, чтобы при выборе характеристик самого процесса обеспечивались его устойчивость и получение в итоге достоверных количественных оценок. Отметим, что используемый метод суперпозиции, приводящий к построению общих решений граничных задач, обладает этими качествами. Устойчивость и сходимости вычислительных процедур при его реализации обеспечиваются фундаментальными свойствами полноты используемых для представления значения функций.

Для получения количественных оценок напряжений и перемещений пластин перейдем в представлениях (22) от бесконечных рядов к конечным суммам по n и m до $N-1$ и $M-1$ соответственно (метод редукции) [9–12]. Далее решение задачи сводится к определению $4(N+M)$ неизвестных коэффициентов в редуцированных функциональных представлениях (22) на основе приближенного удовлетворения отдельным точкам коллокации или метода минимизации среднеквадратичного отклонения (проекционный метод) граничных условий на сторонах параллелограмма OD (I), BC (II), CD (III) и OB (IV) (рис. 1).

Метод коллокации. Решая задачу о планарных колебаниях пьезокерамической пластины со свободным краем в форме параллелограмма методом коллокации, необходимо выполнить заданные граничные условия для нормальных и касательных напряжений (17), (19) в отдельных точках границы (точках коллокации), в качестве которых [8] можно выбрать середины отрезков равномерного разбиения на N частей границ I и II и на M частей границ III и IV (рис. 1). Таким образом, имеем $2(N+M)$ точек коллокации с координатами (x_i^c, y_i^c) , в каждой из которых задан вектор внешней нормали с компонентами n_x, n_y . В результате для каждой точки коллокации формируются два линейных алгебраических уравнения относительно коэффициентов A_{ij}, B_{ij} усеченных рядов. Решив эту систему и подставив найденные значения коэффициентов в соответствующие представления для φ_i, ψ_i (22), а также вычислив их суперпозицию по формулам (21), получим требуемое приближенное решение исследуемой краевой задачи в потенциалах. После этого необходимые составляющие перемещений и напряжений вычисляются по (12) и (16). Аналогичные преобразования реализованы ранее [13, 14].

Метод минимизации среднеквадратичного отклонения. Другой способ приближенного удовлетворения граничным условиям при решении краевой задачи состоит в последовательном умножении невязок граничных условий на границах I, II и III, IV (рис. 1) на независимые между собой функции из функциональных базисов, используемых для представления решения, и интегрировании полученных произведений по соответствующим границам $I-IV$, т.е. вычислении скалярных произведений (проекции) невязок на базисные функции, которые приравняются нулю [12]. В результате получена система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядовых разложений A_{ij}, B_{ij} . В данном случае в качестве функций, на которые осуществляется проектирование, выбираются тригонометрические функции, входящие как сомножители в двумерные базисные функции $\Phi_{ij}(x_k, y_k), \Psi_{ij}(x_k, y_k)$: $\cos \frac{\tilde{n}\pi}{a} x_1$ на границе I ; $\cos \frac{\tilde{n}\pi}{a} (x_1 - \delta_1)$ на границе II , $\tilde{n} = \overline{0, N-1}$; $\cos \frac{\tilde{m}\pi}{b} (y_2 - \delta_2)$ на границе III и $\cos \frac{\tilde{m}\pi}{b} y_2$ на границе IV , $\tilde{m} = \overline{0, M-1}$ (рис. 1). В большинстве случаев точность приближенных решений, получаемых при применении данного метода, оказывается несколько выше, чем при методе коллокации.

На основе теоретических моделей разработаны программные средства для численного моделирования планарных колебаний пластин, реализующие при приближенном удовлетворении граничным условиям как метод коллокации, так и метод минимизации среднеквадратичного отклонения. При этом во многих случаях оказывается удобным перейти к безразмерным граничным условиям для напряжений, пронормировав напряжения, входящие в (17), по модулю сдвига G .

Численное моделирование проводилось для пьезокерамических пластин из материала PZT-4, характеристики которого приведены в [2, 15]: $s_{11}^E = 12,3 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; $s_{12}^E = -4,05 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; $\nu = -s_{12}^E/s_{11}^E = 0,329268... \approx 0,33$; $\rho = 7500$ кг/м³.

Для получения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) рассматриваемых пьезокерамических пластин со сплошным двухсторонним электродированием безразмерная величина эквивалентной вынуждающей нагрузки \bar{F}_n^{Veq} полагалась равной -1 .

На рис. 2 представлены результаты расчета АЧХ для пластины в форме параллелограмма размерами $a = 34,54$ мм, $b = 45,69$ мм и углом $\alpha = 80^\circ$ по методу коллокации для значений $N = M = 60$.

Амплитудно-частотные характеристики, полученные в результате численного моделирования с помощью метода коллокации при $N = M = 90$ и метода ми-

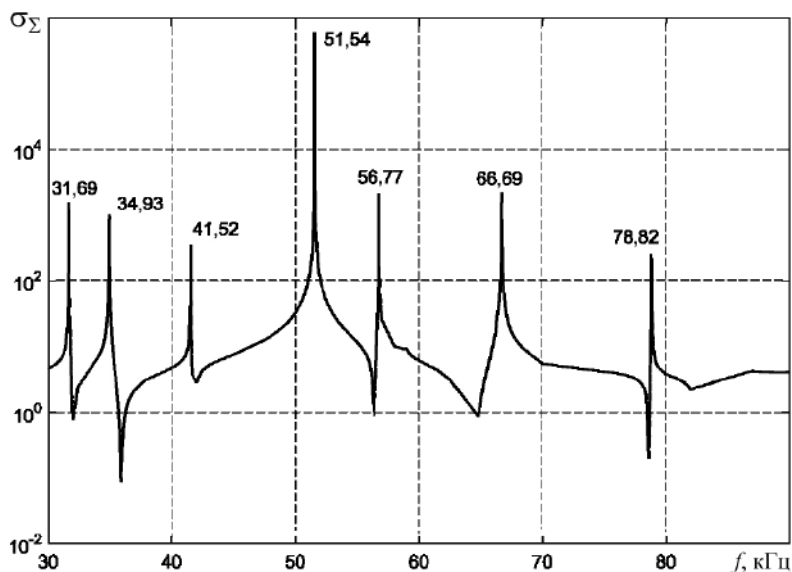


Рис. 2. АЧХ пьезокерамической пластины в форме параллелограмма ($\sigma_{\Sigma} = |\sigma_x + \sigma_y|$) – модуль суммы безразмерных главных напряжений в центре пластины).

нимизации среднеквадратичного отклонения при $N = M = 60$ и 90 , а также значения резонансных частот практически не отличаются от данных, приведенных на рис. 2.

Близость этих значений подтверждает высокую точность используемого аналитического метода и его эффективность при решении практических задач исследования динамики пьезокерамических пластин неканонической формы.

В результате расчета (f_{comp}) и экспериментального исследования (f_{exp}) колебаний пьезокерамической пластины получены следующие значения резонансных частот (кГц): $f_{comp} = 31,69; 34,93; 41,52; 51,54; 56,77; 66,69; 78,82$; $f_{exp} = 31,05; 34,35; 40,40; 49,55; 55,72; 65,14; 77,33$.

При сравнении расчетных данных спектров собственных частот пластины с экспериментальными необходимо учитывать следующее. Расчеты проводили для модели идеально упругого материала. В процессе эксперимента проявляются реальные свойства материала, в частности наличие внутреннего демпфирования. Относительно собственных частот наличие демпфирования приводит к смещению значений резонансной частоты. Более того, для такого случая следует учитывать разницу в значениях собственных частот по скоростям и смещениям, поскольку это различные резонансы.

Ситуация усложняется также тем, что демпфирование существенно зависит от частоты. Это следует учитывать при сравнении результатов. Не менее важно то, что экспериментально невозможно реализовать точно заданные в расчетной схеме граничные условия.

Для оценки точности результатов решения на рис. 3, 4 представлены графики погрешностей удовлетворения граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{err} &= \sigma_n^{def(comp)} - \bar{F}_n^{Veq}; \\ \sigma_{\tau}^{err} &= \sigma_{\tau}^{def(comp)}, \end{aligned} \tag{24}$$

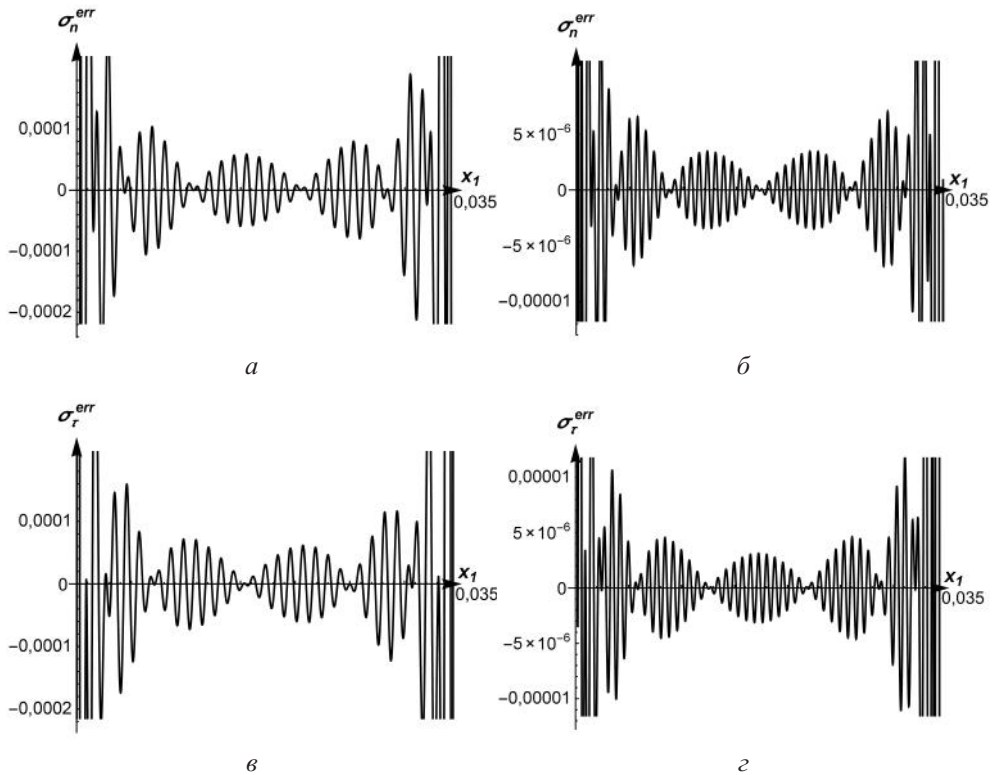


Рис. 3. Сравнение погрешностей удовлетворения граничным условиям для нормальных σ_n^{err} (а, б) и касательных σ_τ^{err} (в, г) напряжений на границе I пьезокерамической пластины в форме параллелограмма по методу коллокации: а, в – $N = M = 60$; б, г – $N = M = 90$.

где $comp$ обозначает величины, полученные в результате вычислений; err – величины погрешностей.

При построении графиков погрешностей, полученных в случае использования метода коллокации, данные в окрестности угловых точек на рис. 3 представлены не полностью, поскольку погрешность здесь несколько возрастает, однако не превышает 10^{-3} значений нагрузки, заданной на границе. Анализ результатов свидетельствует о хорошем их совпадении, поскольку оба метода при удовлетворении граничным условиям пренебрегают вкладом гармоник с высокими номерами, такое поведение невязки – высокая изменяемость по координате – является естественным.

Сравнение результатов для двух систем точек коллокации (60 и 90) показывает, что увеличение их количества приводит к повышению точности выполнения граничных условий. То же справедливо и при увеличении количества проекционных функций в случае использования метода минимизации среднеквадратичного отклонения. Однако при одинаковом числе слагаемых точность результатов несколько выше.

Представляет интерес относительно высокая погрешность в очень узких областях вблизи концов граничных отрезков. По-видимому, это специфическая особенность метода коллокации (рис. 3). Однако при использовании, например, проекционного метода этот недостаток устраняется (рис. 4). При определении таких интегральных характеристик колебательной системы, как собственные частоты, оба метода обеспечивают практически одну и ту же точность при одинаковом числе удерживаемых слагаемых в бесконечных рядах.

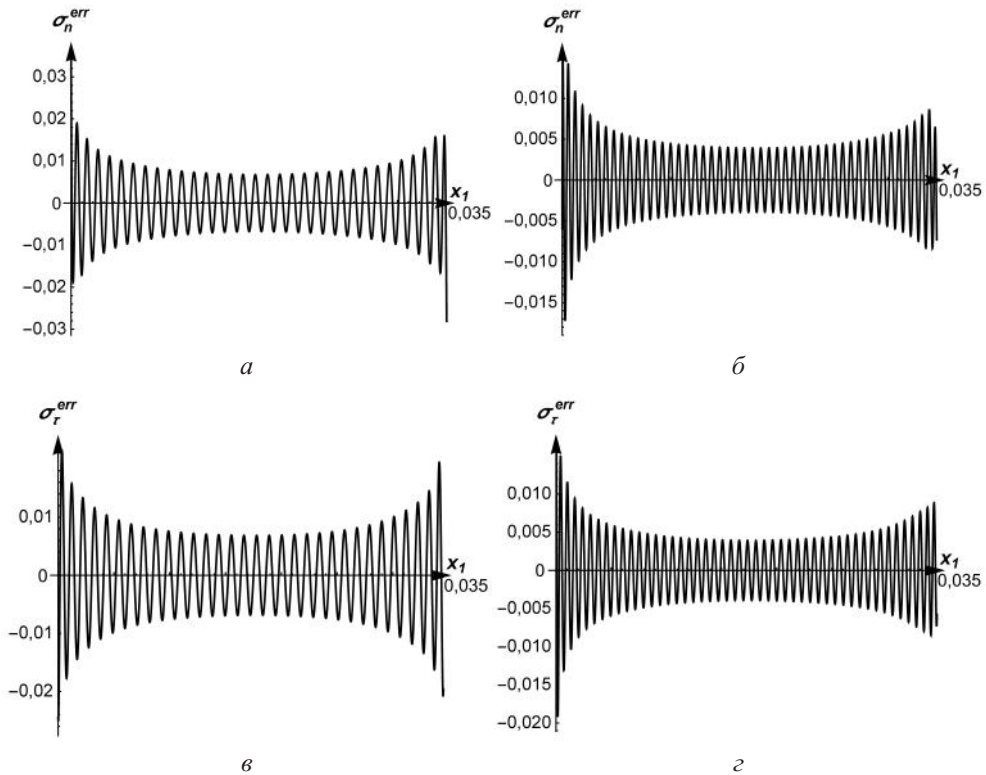


Рис. 4. Сравнение погрешностей удовлетворения граничным условиям для нормальных σ_n^{err} (а, б) и касательных σ_τ^{err} (в, г) напряжений на границе I пьезокерамической пластины в форме параллелограмма по методу минимизации среднеквадратичного отклонения: а, в – $N = M = 60$; б, г – $N = M = 90$.

Заключение. Результаты расчета динамических характеристик пьезопластин в форме параллелограмма показывают, что разработанный метод аналитического решения задачи электроупругости для неканонической области обеспечивает достоверные значения их качественных оценок. Показано, что количественные оценки характеристик колеблющейся пластины по обоим предложенным алгоритмам практически одинаковые. При этом метод коллокаций требует меньшего объема аналитических преобразований.

Таким образом, выражения (22) дают точное общее решение граничной задачи о планарных колебаниях пьезокерамической пластины в форме бесконечных рядов. Для получения количественных оценок физических величин существенно количество удерживаемых слагаемых от требуемой степени точности оценок. Для определения необходимых коэффициентов использовались граничные условия задачи. Соответствующие функциональные уравнения для конечного числа (N и M) удерживаемых слагаемых могут быть преобразованы в алгебраические соотношения двумя принципиально различными методами. Предложено два подхода к решению функциональных уравнений, выражающих граничные условия задачи. Один из них известен в прикладной механике как метод коллокации [12], когда функциональное уравнение преобразуется в алгебраические равенства для некоторой системы точек на границе. Это довольно простой с вычислительной точки зрения способ получения алгебраических соотношений. Другой, с нашей точки зрения, более адекватный традиционной постановке граничных задач в механике, способ получения алгебраических соотноше-

ний оснований на принципе минимизации среднеквадратичного отклонения при выполнении граничных условий. При получении количественных оценок были использованы оба метода и проведено сравнение полученных результатов.

Сравнение полученных результатов с экспериментальными частотными характеристиками колебаний пьезокерамических пластин в форме параллелограмма, которые будут представлены в следующей работе, показало высокую точность изложенного аналитического подхода при исследовании планарных колебаний пластин неканонической формы.

Резюме

Побудовано загальний розв'язок граничної задачі про планарні коливання п'єзокерамічних пластин у формі паралелограма. Розв'язок подано через нескінченні ряди, кожний доданок яких задовольняє рівнянням руху елемента п'єзопластини. Для визначення коефіцієнтів рядів використовуються функціональні рівняння, які отримано на основі граничних умов задачі. Розв'язок цих рівнянь можливий за допомогою двох підходів: на основі методу колокації і мінімізації середньоквадратичного відхилення. При практичному застосуванні скінченних сум згідно з обома підходами приходимо до пошуку розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Отримано кількісні оцінки динамічних характеристик п'єзопластин, аналіз яких дозволяє оцінити вплив геометрії пластини. Метод розв'язку забезпечує високу точність отриманих результатів.

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций / Под ред. А. Н. Гузя. В 5 т. Т. 5: Электроупругость. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
3. Ghodssi R. and Lin P. MEMS Materials and Processes Handbook. Springer Verlag, 2011. 1187 p.
4. Shakeri Mobarakeh P. and Grinchenko V. T. Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non-canonical domains. *Rep. Math. Phys.* 2015. **75**, No. 3. P. 417–434.
5. Krushynska A., Meleshko V., Ma C.-C., and Huang Y.-H. Mode excitation efficiency for contour vibrations of piezoelectric resonators. *IEEE T. Ultrason. Ferr.* 2011. **58**, No. 10. P. 2222–2238.
6. Karlash V. L. Evolution of the planar vibrations of a rectangular piezoceramic plate as its aspect ratio is changed. *Int. Appl. Mech.* 2007. **43**, No. 7. P. 786–793.
7. Андрианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск: ПДАБА, 2010. 216 с.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
9. Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V., and Soltannia B. Directional characteristics of cylindrical radiators with an arc-shaped acoustic screen. *J. Eng. Math.* 2017. **103**, No. 1. P. 97–110. DOI: 10.1007/s10665-016-9863-9.
10. Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V. T., and Zrazhevsky G. M. A numerical-analytical method for solving boundary value problem of elliptical type for a parallelogram shaped plate. *Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. Kyiv. Ser. Physics & Mathematics.* 2015. Special issue. P. 297–304.

11. Шакєрі Мобаракє П., Зражевський Г. М. Алгоритм Гальоркіна в методі частинних областей розв'язання граничних задач. *Вїсн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фїз.-мат. науки.* 2014. Вип. 1. С. 75–82.
12. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., and Fox D. D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.* 7th edn. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 672 p.
13. Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V. T., Iranpour Mobarakeh S., and Soltannia B. Influence of acoustic screen on directional characteristics of cylindrical radiator. Proc. of 5th Int. Conf. on Acoustics and Vibration (ISAV2015, Tehran, Iran, 2015).
14. Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V. T., Ahmadi H., and Soltannia B. The amplitude- frequency characteristics of piezoceramic plates depending on the shape of the boundaries. Proc. of 7th Int. Conf. on Acoustics and Vibration (ISAV2017, Tehran, Iran, 2017).
15. Мэзон У. П. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвукике. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 447 с.

Поступила 15. 05. 2017