

## Деформирование и вибронпряженность высокотемпературного ротора турбины с поперечной дышащей трещиной

Н. Г. Шульженко<sup>1</sup>, Б. Ф. Зайцев, А. В. Асаенок, Т. В. Протасова

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

<sup>1</sup> shulzh@ipmach.kharkov.ua

*Рассматриваются колебания двухпорного несомого ротора паровой турбины с поперечной дышащей трещиной в поле температур рабочей среды. Используется трехмерная модель колебаний ротора с поперечной дышащей трещиной. Переменное двухмерное температурное поле определяется из решения нестационарной задачи теплопроводности. Определено его влияние на контактирование берегов трещины при колебаниях ротора. Установлено распределение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта трещины для разных положений ротора. Оценивается возможность усталостного подрастания трещины.*

**Ключевые слова:** ротор, трещина, контакт берегов, колебания, температура, коэффициент интенсивности напряжений, усталость.

**Введение.** Вопросам колебаний роторов с трещиной в области динамики роторов уделяется большое внимание. При этом важными являются как задачи прочности и живучести таких роторов, так и задача определения основных признаков наличия в них трещины для диагностирования повреждений. В вибрационных сигналах вращающегося ротора наблюдаются изменения, вызванные контактированием берегов трещины. Дыхание трещины обуславливает переменную жесткость ротора и приводит к возникновению параметрических колебаний. Интенсивность последних, как правило, увеличивается при подрастании трещины вследствие циклического деформирования ротора и может существенно проявиться на его резонансных частотах при разгоне или выбеге. На характеристики колебаний ротора как в поврежденном, так и неповрежденном состоянии значительное влияние может оказывать температура рабочей среды [1].

При решении задач динамики роторов с трещиной применяются различные подходы к учету переменного контакта ее берегов [2–5], а для идентификации трещин используются современные методы обработки данных колебательных процессов [6–9]. Обзор таких исследований приведен в [10, 11].

Ряд работ посвящен оценке влияния температурного фактора на вибрацию валов с трещиной. Так, в [12, 13] используются стержневая модель вала и одномерная модель теплового состояния и отмечается значительное влияние поля с радиальным градиентом температуры на колебания. Чувствительность к нагреву ротора с трещиной определяется экспериментально в [14], а влияние теплообмена в роторе с кольцевой трещиной на изменение двух первых гармонических составляющих колебаний исследуется численно в [15]. Рассматриваются колебания горизонтального ротора с трещиной по стержневой модели с учетом термических напряжений, определенных упрощенно [16]. В работах [17, 18] исследуются колебания ротора паровой турбины по 3D-модели с учетом осесимметричного температурного поля, определяемого из решения по 2D-модели нестационарной задачи теплопроводности. Показано влияние температурного поля на изменение спектра вертикальных колебаний и дыхание трещины в диапазоне частот вращения вплоть до рабочей частоты [17] и на резонансных частотах вращения [18]. В указанных публикациях моделируются колебания роторов с дышащей трещиной и оценивается влияние температурного поля на

кинематические параметры колебаний. Прогнозирование роста трещины выполняли без учета напряженного состояния при колебаниях.

В данной работе с помощью трехмерной модели решается задача определения характеристик колебаний и напряженного состояния ротора с дышащей трещиной в температурном поле ( $T$ -поле). С использованием определяемых численно коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) оценивается возможность усталостного развития трещины при колебаниях ротора турбины в поле высоких температур. Температурное поле ротора определяется на основе решения нестационарной двухмерной задачи теплопроводности.

**Методика расчетных исследований.** Моделирование ротора с дышащей трещиной выполняется в трехмерной постановке по методике, изложенной ранее [19–22] и используемой в прикладных задачах. Методика основана на применении метода конечных элементов (МКЭ) с топологически регулярной системой дискретизации, метода введения трещин произвольной формы в первоначально сплошное тело, метода учета одностороннего контакта между берегами трещины с помощью введения переменных контактных сил и конечноразностного решения задачи колебаний методом Ньюмарка с итерациями на шаге по времени для удовлетворения условий контакта и определения контактных сил.

Температурное поле  $T(x, y, z)$  в роторе учитывается путем введения фиктивных температурных объемных сил  $F_T$  [23], работа которых  $A_T$  добавляется к функционалу Даламбера–Лагранжа для движущейся среды:

$$A_T = - \int_V \frac{\alpha E}{1-2\nu} \theta T dV, \quad (1)$$

где  $E$ ,  $\nu$  – модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения;  $\theta$  – объемная деформация,  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ .

При построении модели используется изопараметрический конечный элемент (КЭ), соотношения которого для перемещений и декартовых координат аналогичны:

$$u_x = \sum u_{xi} N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad u_y = \sum u_{yi} N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad u_z = \sum u_{zi} N_i(\xi, \eta, \zeta); \quad (2)$$

$$x = \sum x_i N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \sum y_i N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \sum z_i N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad (3)$$

где  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  – функции формы;  $\xi, \eta, \zeta$  – локальные координаты в КЭ;  $u_{xi}, u_{yi}, u_{zi}$  и  $x_i, y_i, z_i$  – соответственно узловые значения компонентов вектора перемещений и декартовых узлов КЭ.

Исходя из (1) на основании соотношений (2), (3) определяется общее выражение для узловых значений температурной нагрузки  $F_T$  на КЭ с постоянными характеристиками материала:

$$F_T = - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \int_{KЭ} T(x, y, z) \sum_i \left( u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} + u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} + u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dV. \quad (4)$$

Величины  $\partial N_i / \partial x, \partial N_i / \partial y, \partial N_i / \partial z$  в (4) определяются в узлах интегрирования Гаусса. Для получения в данной точке КЭ (узле Гаусса) компонент матрицы Якоби ( $\partial \xi / \partial x, \partial \xi / \partial y, \partial \xi / \partial z, \partial \eta / \partial x, \partial \eta / \partial y, \partial \eta / \partial z, \partial \zeta / \partial x, \partial \zeta / \partial y, \partial \zeta / \partial z$ ) используется обратное (3) преобразование координат  $\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)$ .

Вектор температурной нагрузки на ротор определяется суммированием по всем КЭ модели.

Уравнения движения вращающегося ротора с дышащей трещиной, как и в [22], представляются в подвижной системе координат, связанной с ротором:

$$[M]\ddot{u} + ([D] - 2\omega[M_2])\dot{u} + ([K] - \omega^2[M_1] - \omega^2[M'_\omega] - \omega[D_1])u = F_\omega + F_e + F_T + Q, \quad (5)$$

где  $u$  – вектор перемещения узлов;  $\omega$  – частота вращения;  $F_\omega$  – вектор центробежных сил в недеформированном состоянии;  $F_e$  – вектор внешней нагрузки (вес);  $F_T$  – вектор фиктивных температурных сил;  $Q$  – система переменных контактных сил, действующих по берегам трещины; матрицы  $[M_1]$ ,  $[M_2]$ ,  $[M'_\omega]$  состоят из элементов матрицы масс  $[M]$ , причем  $[M_1]$  имеет симметричную структуру,  $[M_2]$ ,  $[M'_\omega]$  – несимметричную;  $[D]$ ,  $[D_1]$  – диссипативные матрицы, построенные для узлов оси ротора по схеме вязкого трения.

Все матрицы в уравнении (5) определяются для тела при полностью открытой трещине. Особенностью представленного матричного уравнения является введение дополнительной матрицы масс  $[M'_\omega]$ , методика получения которой приведена ранее [24]. Введение матрицы обусловлено тем, что в трехмерной модели для точек тела, не лежащих на оси вращения, при смещениях результирующие центробежные силы при отнесении их к недеформированному состоянию (линейная постановка) теряют радиальную направленность. Это приводит к появлению ложных эффектов, связанных с физически некорректной жесткостью при кручении ротора и дополнительным изгибом в осевой плоскости при значительных осевых смещениях, возникающих, например, в длинном роторе при наличии  $T$ -поля. Применение матрицы  $[M'_\omega]$  позволяет учитывать в линейной постановке изменение центробежных сил, вызванное смещениями, и сохранить их радиальную направленность.

Начальная задача расчета колебаний (5) решается прямым интегрированием по двухслойной неявной конечноразностной схеме Ньюмарка, являющейся, безусловно, устойчивой [25].

При определении нестационарного  $T$ -поля в роторе паровой турбины задача теплопроводности рассматривается как осесимметричная (2D-постановка), а граничные условия теплообмена определяются по методике [26]. Его расчет выполняется МКЭ с использованием вариационной формулировки задачи [27] и программного обеспечения [22]. Начальная задача теплопроводности решается по неявной конечноразностной схеме Кранка–Николсона [27], а за начальные условия принимается решение стационарной задачи теплопроводности.

**Результаты расчетных исследований.** Исследовали ротор цилиндра среднего давления (РСД-1) теплофикационной турбины Т-250/300-240 УТЗ. Модель ротора (длина 4,42 м, диаметр вала 0,426 м), построенная с помощью трехмерных КЭ, представлена на рис. 1,а. Виртуальная поперечная трещина задавалась на валу ротора между 17- и 18-й ступенями (нумерация ступеней валопровода общая и начинается с ротора высокого давления). Для более полного выявления особенностей влияния  $T$ -поля на колебания ротора размер виртуальной трещины целесообразно выбирать большим. В расчетах принято, что трещина составляет 50% площади сечения вала (рис. 1,б). Расчеты ротора проводились для рабочих оборотов с частотой вращения  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$  и рассеянием энергии по гипотезе вязкого трения, соответствующим логарифмическому декременту колебаний 0,2.

При пуске ротора по мере его прогрева температурное поле меняется, достигая на установившемся режиме стационарного состояния. Предварительный анализ полученных решений задачи термоупругости для различных температурных полей показывает, что наиболее сильно поле температур влияет на колебания ротора с поперечной трещиной при максимальных радиальных перепадах температуры. Поэтому

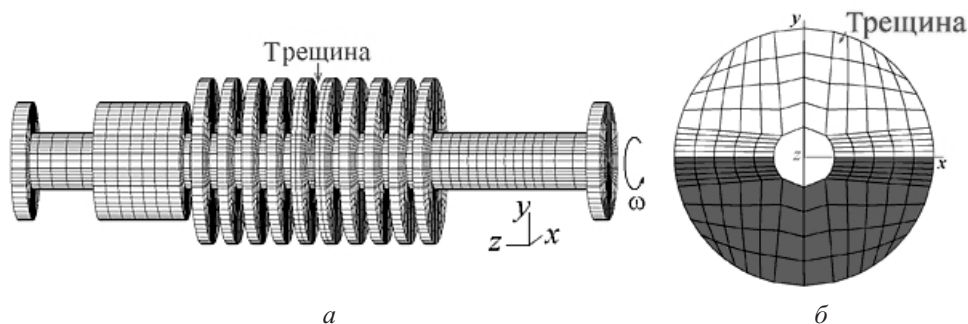


Рис. 1. Трехмерная расчетная конечноэлементная модель ротора РСД-1 турбины Т-250/300-240 (а) и сечение с трещиной (б).

интерес представляют случаи максимального радиального перепада температурного поля, а также температурного поля на стационарном режиме работы, в котором в основном находится ротор при эксплуатации.

Тепловое состояние ротора рассматривалось для процесса пуска из холодного состояния, набора мощности и достижения установившегося режима. Данные расчетов теплового и термоупругого состояний рассматриваемого ротора свидетельствуют о том, что радиальный перепад температуры на стационарном режиме работы небольшой, температура в осевом направлении изменяется в диапазоне  $65 \leq T \leq 520^\circ\text{C}$ , при этом температурные напряжения являются незначительными (в сравнении с максимальным радиальным перепадом температуры [22]). Максимальный радиальный перепад температур наблюдается в момент выхода на максимальную мощность и составляет  $103^\circ\text{C}$  на 13-й ступени (через 9,5 ч после пуска и 4,5 ч после толчка ротора паром).

Распределение температурных полей в виде изолиний температуры во фрагменте ротора с трещиной представлено на рис. 2.

Рассмотрим результаты исследований по определению влияния температурного поля на распределение областей контакта берегов трещины при вращении ротора. На рис. 3 приведены данные о положении границы таких областей для двух случаев нагружения ротора: при весовой нагрузке без  $T$ -поля и при воздействии только  $T$ -поля с максимальным радиальным перепадом, при этом сечение условно полагается неподвижным.

В первом случае при вращении ротора (изменении углового положения, характеризуемого фазой поворота  $\varphi$ , т.е. углом поворота за вычетом целого числа оборотов) область контакта берегов трещины является переменной с перемещающейся по сечению границей (на рис. 3,а 1–7) и отрывом берегов. Соответствие областей контакта, составленных из подобластей  $A, B, C, D, E, F$ , границе контакта следующее: 1 – 0 ( $A, B, C$ ); 2 –  $45^\circ$  ( $B, C$ ); 3 –  $90^\circ$  ( $C$ ); 4 –  $135\text{--}225^\circ$ ; 5 –  $270^\circ$  ( $D$ ); 6 –  $315^\circ$  ( $D, E$ ); 7 –  $360^\circ$  ( $D, E, F$ ). Например, положению границы контакта 3 на рис. 3,а соответствует фаза  $90^\circ$ , области контакта  $C$  и отрыва берегов  $A, B$ . При этом состояния полного контакта (фаза 0) и полного отрыва (фаза  $135\text{--}225^\circ$ ) попеременно меняются, проходя промежуточные положения.

При максимальном радиальном перепаде температуры (рис. 3,б) возникают значительные осевые температурные напряжения [18], которые определяют контактирование берегов трещины. Область контакта занимает периферию сечения (более высокая температура осесимметричного поля и температурные напряжения сжатия), а область отрыва – сердцевину сечения (более низкая температура и температурные напряжения растяжения). Контактные усилия из-за значительных температурных напряжений будут большими, а переменные напряжения от веса при вращении

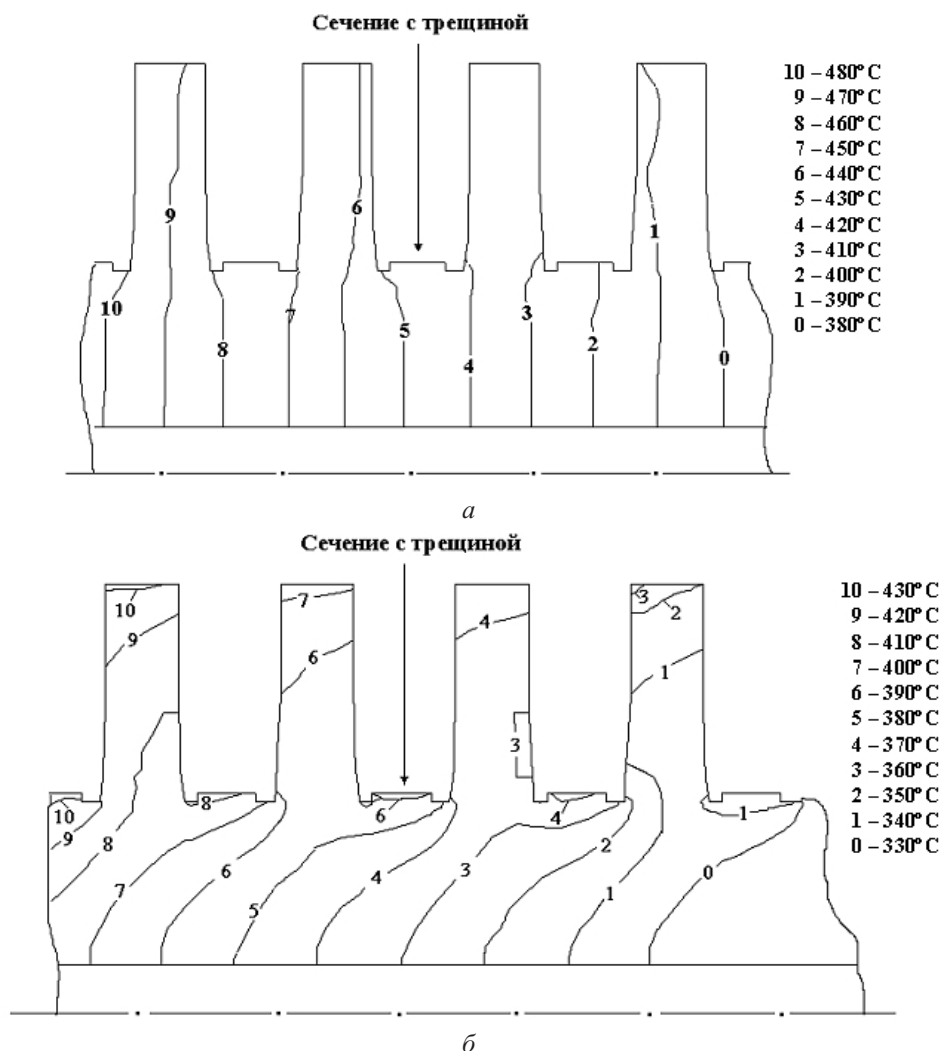


Рис. 2. Распределение температуры во фрагменте ротора с трещиной в случае стационарного  $T$ -поля (*a*) и максимального радиального перепада  $T$ -поля (*б*).

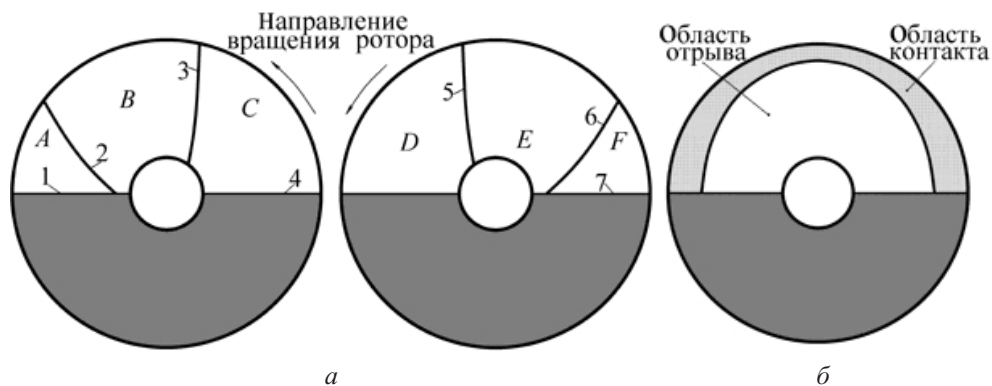


Рис. 3. Области контакта берегов трещины для разных случаев нагружения: *a* – весовая нагрузка; *б* – максимальный радиальный перепад  $T$ -поля.

ротора меньшими. Вследствие этого граница области контакта для случая максимального радиального перепада  $T$ -поля при действии весовой нагрузки на вращающийся ротор изменяется незначительно (рис. 3,б).

Установленные особенности контактирования берегов трещины при вращении ротора определяют его колебания. На рис. 4 представлено перемещение точки, расположенной на оси ротора у сечения с трещиной вдоль вертикальной оси (ось  $y$ ), для различных случаев нагружения. При численном решении после переходных процессов, обусловленных начальными условиями, устанавливаются колебания, близкие к периодическим. При отсутствии  $T$ -поля в спектре колебаний преобладает обратная составляющая (на рис. 4 кривая 1). Колебания в случае дополнительного действия стационарного  $T$ -поля изменяются незначительно, т.е. преобладающей также остается обратная гармоническая составляющая в спектре колебаний (на рис. 4 кривая 3).

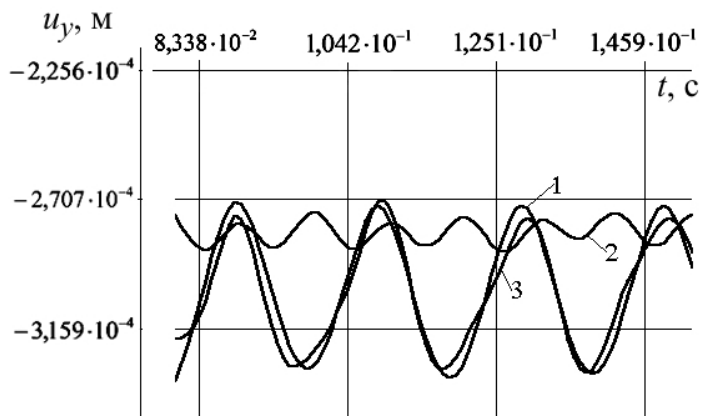


Рис. 4. Перемещение точки на оси ротора у сечения с трещиной при учете его веса (1), максимального радиального перепада  $T$ -поля (2) и стационарного  $T$ -поля (3).

Значительно большее влияние наблюдается при максимальном радиальном перепаде  $T$ -поля. При этом преобладающей является вторая гармоника спектра колебаний из-за почти постоянной области контакта берегов трещины. В таком случае задача деформирования ротора близка к линейной, но с переменной жесткостью, обусловленной не изменением областей контакта, а положением сечения (аналогично валу двойной жесткости). При этом добавляется обратная составляющая от прецессии ротора, искривленного вследствие воздействия температурного поля (на рис. 4 кривая 2).

Напряженное состояние ротора в окрестности фронта трещины описывается КИН. Учитывая характер раскрытия поперечной трещины в роторе под влиянием его веса при вращении, в качестве основной характеристики прочности следует выбирать КИН нормального отрыва  $K_1$ . Особенностью задачи является контактирование берегов трещины в роторе при колебаниях. Поэтому напряженное состояние в окрестности фронта трещины, характеризуемое асимптотическим распределением [28], а следовательно, и определяемый его интенсивность КИН возникают, если берега у фронта трещины не контактируют. На границе области контакта, где имеет место плавное смыкание берегов, а также в окрестности фронта трещины, берега возле которого сомкнулись, КИН равен нулю. Вследствие трехмерности напряженно-деформированного состояния (НДС) распределение КИН вдоль фронта трещины является переменным. Как известно, асимптотическое НДС в окрестности фронта трещины в общем трехмерном случае раскладывается на плоскую и антиплоскую деформацию [28]. Величина  $K_1$  определяется для состояния плоской деформации в сечении, нормальном фронту трещины в заданной точке.

При численном определении КИН применяется метод прямого его вычисления [29] с использованием формулы асимптотического распределения напряжения отрыва на продолжении трещины:

$$\sigma = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (6)$$

где  $r$  – расстояние от фронта трещины до центров КЭ.

Для построения зависимости (6) с неизвестным  $K_I$  и наименьшим квадратичным уклоном на совокупности значений  $\sigma_k$  в точках  $r_k$ -центров КЭ на продолжении трещины используется метод наименьших квадратов. Из условия минимума квадратичного уклонения следует расчетная формула для определения  $K_I$ :

$$K_I = \sqrt{2\pi} \left( \frac{\sum_{k=1}^n \sigma_k}{\sum_{k=1}^n \sqrt{r_k}} \bigg/ \frac{\sum_{k=1}^n 1}{\sum_{k=1}^n \sqrt{r_k}} \right), \quad (7)$$

где  $n$  – количество расчетных точек.

Результаты численного определения КИН показаны на рис. 5 для различных случаев нагружения ротора и в разных характерных фазах его положения. При учете только веса ротора или при добавочном воздействии стационарного  $T$ -поля попеременное циклирование областей контакта практически одинаковое, т.е. трещина в фазе  $180^\circ$  полностью открыта, а в фазе  $360^\circ$  полностью закрыта. Таким образом, при вращении и колебаниях ротора циклирование напряженного состояния в роторе в окрестности трещины происходит по пульсирующему циклу. Распределение КИН вдоль всего фронта трещины изменяется, хотя и незначительно, а добавочное действие температурных напряжений от стационарного  $T$ -поля несколько его увеличивает (на рис. 5 кривая 2).

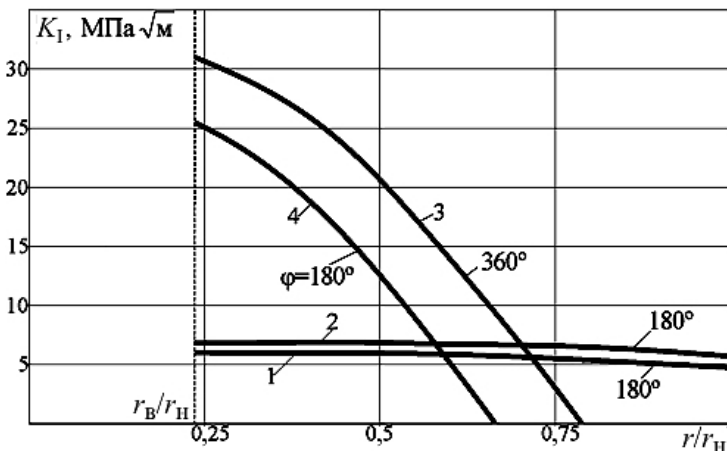


Рис. 5. Изменение КИН  $K_I$  вдоль фронта трещины в роторе при учете его веса (1), веса и стационарного  $T$ -поля (2), веса и максимального перепада  $T$ -поля (3, 4).

При учете веса и максимального радиального перепада  $T$ -поля значения КИН существенно выше и отличаются от нуля лишь на части фронта трещины, где ее берега расходятся. При этом в разных фазах положения ротора комбинация полей напряжений при учете веса и температурного поля вызывает изменение положения границы контакта, за которой отмечается смыкание берегов трещины при отсутствии

КИН, а также при его наличии (на рис. 5 кривые 3, 4). По сравнению с предыдущими случаями циклирование напряженного состояния у трещины происходит при большой асимметрии цикла.

Максимальные значения КИН, достигаемые в роторе с рассматриваемой трещиной (50%), даже с учетом влияния неравномерного  $T$ -поля заметно ниже критических (например, для роторной стали Р2МА (25Х1М1ФА) при  $T = 20^\circ\text{C}$  имеем  $K_{Ic} = 55 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ , при  $T > 200^\circ\text{C}$  –  $K_{Ic} \approx 300 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ ). В реальности трещины в роторах развиваются, и их рост, очевидно, обусловлен усталостным механизмом. Характеристики циклов для различных случаев нагружения ротора представлены в таблице.

**Размах КИН и коэффициент асимметрии цикла  $R$  для различных случаев нагружения ротора**

Характеристика	Вес ротора	Вес и стационарное $T$ -поле	Вес и максимальный радиальный перепад $T$ -поля
$(\Delta K_I)_{\text{max}}, \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$	6,0	6,8	4,5
$R$	0	0	0,8

Можно приближенно оценить темп усталостного подрастания трещины в роторе при колебаниях. Условием усталостного распространения трещины является превышение размахом КИН его порогового значения  $K_{th}$ . Для разных режимов нагружения величина  $(\Delta K_I)_{\text{max}}$  различается, и для случая максимального радиального перепада  $T$ -поля она наименьшая. При этом циклирование напряженного состояния происходит с большим коэффициентом асимметрии, что обуславливает снижение величины  $K_{th}$  [30]. Можно полагать, что для всех рассмотренных режимов нагружения пороговый КИН превышен [31, 32], и усталостное развитие трещины возможно. Не обращаясь к известным моделям роста трещины [32], примем для простоты как минимальную оценку скорости ее роста величину  $dl/dN = 10^{-8}$  мм/цикл, которая является базовой при экспериментальном определении порогового значения  $K_{th}$ . В этом случае грубые оценки показывают, что, например, глубина трещины увеличится на 10 мм (на 5%) через 0,5 года эксплуатации, т.е. развитие возникшей трещины вследствие вызванных ею колебаний вполне вероятно, а темп ее подрастания достаточно высок. Большую часть времени ротор эксплуатируется в стационарном режиме, при этом влияние температурных напряжений обуславливает увеличение размаха КИН, а следовательно, и скорости подрастания трещины.

## Выводы

1. Предложена методика расчета колебаний высокотемпературного ротора с дышащей трещиной на основе трехмерной модели МКЭ с использованием решения задачи теплопроводности при учете контактного взаимодействия берегов трещины. Показано, что наибольшее влияние на виброхарактеристики ротора с поперечной трещиной оказывает тепловое состояние с максимальным радиальным перепадом температуры. При этом распределение областей контакта и отрыва берегов трещины вращающегося ротора изменяется мало, а в спектре колебаний преобладает вторая гармоническая составляющая.

2. Получено распределение динамического КИН  $K_I$  вдоль фронта заданной дышащей трещины и оценено усталостное развитие последней, свидетельствующее о возможном существенном ее подрастании при эксплуатации турбины.



## Резюме

Розглядаються коливання двоопорного вагового ротора парової турбіни з поперечною дихаючою тріщиною в полі температур робочого середовища. Використовується тривимірна модель коливань ротора з поперечною дихаючою тріщиною. Змінне дво-вимірне температурне поле визначається з розв'язку нестационарної задачі тепло-провідності. Оцінюється його вплив на контактування берегів тріщини при коливан-нях ротора. Визначається розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень уздовж фронту тріщини для різних положень ротора. Наводиться оцінка можливості утом-ного підростання тріщини.

1. *Голдин А. С.* Тепловой дисбаланс ротора // Сборка в машиностроении, приборостроении. – 2009. – № 4 (105). – С. 52–56.
2. *Матвеев В. В., Яковлев А. П., Богинич О. Е., Синенко Е. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе // Пробл. прочности. – 2014. – № 3. – С. 21–37.
3. *Sekhar A. S., Mohanty A. R., and Prabhakar S.* Vibrations of cracked rotor system: transverse crack versus slant crack // J. Sound Vib. – 2005. – **279**. – P. 1203–1217.
4. *Dimarogonas A. R.* Vibration of cracked structures: a state of art review // Eng. Fract. Mech. – 1996. – **55**. – P. 831–857.
5. *Darpe A. K., Gupta K., and Chawta A.* Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor // J. Sound Vib. – 2004. – **269**. – P. 33–60.
6. *Синенко Е. А., Зиньковский А. П.* Влияние места приложения вынуждающей силы на амплитудный спектр изгибных колебаний стержня с дышащей трещиной // Пробл. прочности. – 2015. – № 4. – С. 51–60.
7. *Матвеев В. В., Онищенко Е. А.* Вибродиагностические параметры наличия полуэллиптической дышащей трещины в стержне круглого поперечного сечения при супер- и субгармоническом резонансах // Там же. – 2016. – № 2. – С. 5–19.
8. *Pennacchi P., Bachschmid N., and Vania A.* A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines // Mech. Syst. Signal Pr. – 2000. – **20**. – P. 2112–2147.
9. *Friswell M. I.* Damage identification using inverse methods // Philos. T. R. Soc. A. – 2007. – **365**. – P. 393–410.
10. *Sabnavis G., Kirk R. G., Kasarda M., and Quinn D. D.* Cracked shaft detection and diagnostics: a literature review // Shock Vib. Digest. – 2004. – **36**. – P. 287–296.
11. *Gasch R.* Dynamic behaviour of the Laval rotor with a transverse crack // Mech. Syst. Signal Pr. – 2008. – **22**. – P. 790–804.
12. *Bachschmid N., Pennacchi P., Tanzi E., and Audebert S.* Transverse crack modeling and validation in rotor systems, including effects // Int. J. Rot. Mach. – 2003. – **9**, No. 2. – P. 113–126.
13. *Bachschmid N. and Tanzi E.* Vibration pattern related to transverse crack in rotors // Shock Vib. – 2002. – **9**, Nos. 4–5. – P. 217–224.
14. *Popaleny P. and Peton N.* Steam turbine rotor crack // Proc. of the Int. Conf. SURVEILLANCE 7 (Oct. 29–30, 2013, Chartres, France). – Institute of Technology of Chartres, 2013. – 11 p.
15. *Pennacchi P. and Vania A.* Shaft crack detection in a steam turbine: experimental evidences and model-based simulations // Proc. of ISMA 2010 including USD 2010 (Sept. 20–22, 2010, Leuven, Belgium). – P. 1055–1070.

16. *Bachschmid N., Pennacchi P., and Tanzi E.* Analysis of the thermal effects in rotor shaft affected by transverse crack // *Bollettino del C.I.L.E.A., Research Activities on High Performance Computing Clusters at CILEA.* – 2006. – P. 11–25.
17. Шульженко Н. Г., Зайцев Б. Ф., Руденко Е. К., Асаенко А. В. Оценка влияния температурных напряжений на колебания ротора с поперечной трещиной с учетом контактирования берегов // *Вісн. Запорізького нац. ун-ту, № 1.* – 2015. – С. 218–226.
18. Шульженко Н. Г., Зайцев Б. Ф., Асаенко А. В., Протасова Т. В. Влияние температурного поля на резонансные колебания ротора с поперечной “дышащей” трещиной // *Вібрації в техніці та технологіях.* – 2016. – № 3 (83). – С. 75–82.
19. Шульженко Н. Г., Зайцев Б. Ф., Викман Н. Е., Асаенко А. В. Расчет колебаний ротора с “дышащей” трещиной по трехмерной модели // *Пробл. прочности.* – 2012. – № 6. – С. 137–145.
20. Асаенко А. В., Зайцев Б. Ф., Шульженко Н. Г. Методика введения разрезов в схеме метода конечных элементов в задачах статики и собственных колебаний трехмерных конструкций // *Пробл. машиностроения.* – 2003. – 6, № 3. – С. 58–63.
21. Зайцев Б. Ф., Шульженко Н. Г., Асаенко А. В., Ерецькая Н. Е. Метод расчета колебаний тел, содержащих трещины с контактирующими берегами // *Там же.* – 2008. – 11, № 4. – С. 34–42.
22. Шульженко Н. Г., Гонтаровский П. П., Зайцев Б. Ф. Задачи термочности, вибродиагностики и ресурса энергоагрегатов (модели, методы, результаты исследований) // *LAP Lambert Academic Publishing GmbH & Co.KG.: Saarbrücken, Germany.* – 2011. – 370 с.
23. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
24. Зайцев Б. Ф., Асаенко А. В., Викман Н. Е. Построение матриц масс для учета центробежных сил при колебаниях трехмерного вращающегося тела // *Вестн. НТУ “ХПИ”. Динамика и прочность машин.* – 2009. – Вып. 30. – С. 52–56.
25. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
26. *PTM 108.020.16-83.* Расчет температурных полей роторов и корпусов паровых турбин. – Л.: НПО ЦКТИ, 1985. – 116 с.
27. Эмери А. Ф., Карсон В. В. Оценка применимости МКЭ при расчетах температуры // *Теплопередача.* – 1971. – № 2. – С. 6–17.
28. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
29. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
30. Когаев В. П., Махутов Н. А., Гусенков А. П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
31. Троценко В. Т., Сосновский Л. А. Сопrotивление усталости металлов и сплавов. Справ. в 2 ч. – Киев: Наук. думка, 1987. – 1303 с.
32. Троценко В. Т., Покровский В. В., Прокопенко А. В. Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1987. – 256 с.

Поступила 13. 06. 2017