

## Метод прогнозування втрати роботоздатності нанокompозитних елементів конструкцій внаслідок теплової нестійкості при циклічному навантаженні

М. Хашемі<sup>1</sup>, Я. А. Жук

Національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

<sup>1</sup> moh.hashemi2013@gmail.com

*Розроблено метод прогнозування втрати роботоздатності нанокompозитних елементів конструкцій внаслідок теплової нестійкості. В основу методу покладено модель моногармонічної апроксимації реакції матеріалу на циклічне навантаження, амплітудні співвідношення між основними польовими змінними та концепцію комплексних модулів. Розвинуто методи оцінки модулів накопичення та втрат складових нанокompозита, а також модель урахування впливу поверхні контакту волокно–матриця. Розроблено модифіковану процедуру гомогенізації, що ґрунтується на методі Морі–Танака, розвинуто для отримання комплексних модулів нанокompозита з випадковою або однонаправленою орієнтацією нановолокон. Температурно-амплітудозалежні комплексні модулі використано для вивчення впливу дисипативного розігріву на механічну стійкість полімерного нанокompозитного стрижня, що перебуває під дією комбінованого статичного і моногармонічного навантаження. Досліджено вплив амплітуди навантаження та об'ємного вмісту нановолокон на теплову нестійкість полімерного нанокompозитного стрижня.*

**Ключові слова:** комплексні модулі, полімерний нанокompозит, тепла нестійкість, дисипативний розігрів, дисипація енергії.

**Вступ.** На сьогодні полімерні композити широко використовуються як матеріали для виготовлення елементів конструкцій у найрізноманітніших областях техніки: авто- та авіабудування; машинобудування; будівництво тощо. Завдяки низькій теплопровідності, високим дисипативним характеристикам та суттєвій залежності механічних властивостей пластмас від температури ефекти термомеханічної зв'язаності можуть бути значними особливо у випадках циклічного (зокрема, моногармонічного) навантаження. При циклічному навантаженні полімерні матеріали демонструють в'язко-пружну поведінку, що зумовлює дисипативні процеси в елементах конструкцій. Дисипація механічної енергії в тепло призводить до саморозігріву та підвищення температури, оскільки низькі значення коефіцієнта теплопровідності унеможливають ефективний відвід тепла від зони його локалізації у композитному елементі. Температура дисипативного розігріву може сягати достатньо високих рівнів, які, як наслідок, можуть викликати критичні теплові стани, зокрема, призводити до явища теплової нестійкості елемента конструкції. У роботі [1] показано, що врахування дисипативного вібророзігріву стає критичним у випадку інтенсивного циклічного навантаження або при резонансних коливаннях елементів, виготовлених із полімерних композитних матеріалів. У роботі [2] проаналізовано петлі гістерезису та втрати енергії при підвищенні температури внаслідок саморозігріву термопластичних композитів із 20%-ним об'ємним вмістом довгих скляних волокон під час випробувань на утому. Установлено, що перевищення критичних значень певних характерних параметрів призводить до різкого зростання температури. Як наслідок, надлишкова температура, зумовлена дисипацією механічної енергії, значно зменшує жорсткість матеріалу, що, в свою чергу, негативно впливає на міцність елементів конструкції. Це є основним при втраті роботоздатності пластмас і полімерних композитів за механізмом теплової нестійкості.

Для знаходження таких критичних параметрів у роботах [3–9] досліджено стаціонарні коливання в рамках нелінійної крайової задачі термомеханіки. У [10, 11] запропоновано інший підхід до розв'язку такої нелінійної задачі. У рамках цього підходу визначення параметрів критичних станів для широкого класу конфігурацій в'язко-пружних тіл суттєво спрощується навіть у тих випадках, коли властивості матеріалу мають дуже складні температурні залежності. У роботах [12–15] дану проблему формально зведено до розв'язання квазістатичної задачі та розроблено процедуру визначення критичних значень параметра навантаження. При цьому параметр навантаження зв'язаний з рівнем очікуваної температури дисипативного розігріву. Стаціонарний термомеханічний стан має місце при значеннях параметра навантаження, менших за критичне. У цьому випадку максимальна температура сягає певного стаціонарного рівня. Якщо параметр навантаження вищий за критичне значення, то реалізується нестаціонарний стан, коли температура з часом прямує до нескінченності [8]. Температура дисипативного розігріву при надкритичних значеннях параметра навантаження зростає дуже швидко.

У даній роботі розвивається підхід до дослідження впливу вібророзігріву на механічну і теплову стійкість полімерного нанокompозитного елемента, який ґрунтується на концепції комплексних модулів і в рамках якого враховуються залежності модулів накопичення і втрат від температури та амплітуди деформації. Цей підхід є особливо ефективним у випадку малої дисипації, коли відношення уявних частин комплексних характеристик до їх дійсних частин є невеликим [16]. Досліджується вплив дисипативного розігріву на теплову стійкість полімерного нанокompозитного стрижня з випадково або однонаправлено орієнтованими нановолокнами, що складаються з вуглецевих нанотрубок (CNT), за різних значень об'ємного вмісту волокон. Отримані в рамках розвинутого підходу результати дозволять визначити критичні значення параметрів навантаження, дослідити еволюцію температури вібророзігріву нанокompозитного елемента і визначити залежність між рівнем навантаження та максимальною температурою розігріву.

**1. Моделювання реакції нанокompозита при моногармонічному навантаженні.** Розглядається розвиток моделі опису непружної поведінки двох композитних матеріалів на полімерній основі, армованих CNT волокнами, при довільному навантаженні. Ці нанокompозити демонструють макроскопічні властивості трансверсально-ізотропного матеріалу при однонаправленому армуванні CNT волокнами та ізотропного матеріалу при випадковій орієнтації волокон. Для розвитку такої моделі необхідно змоделювати реакцію складових і розробити процедуру гомогенізації для отримання макроскопічних властивостей нанокompозитів. Для опису непружної поведінки полімерної матриці використано феноменологічну модель, що описує всі особливості реакції матеріалу в часі при довільних історіях навантаження (далі – повна модель), після чого за допомогою процедури еквівалентної лінеаризації отримано комплексні модулі за умов кінематичного гармонічного навантаження. У даному дослідженні CNT волокна вважаються пружними трансверсально-ізотропними з п'ятьма незалежними пружними константами. Ґрунтуючись на концепції перерозподілу навантаження між включенням та матрицею, а також використовуючи комплексний коефіцієнт Пуассона для матеріалу матриці, в [17] запропоновано наявність поверхні контакту фаз моделювати за допомогою стрибка переміщення. Зрештою, розробляється схема гомогенізації, яка використовується до отриманих комплексних модулів матриці, волокон та поверхні контакту з метою визначення загальних макроскопічних комплексних модулів композита як однорідного матеріалу.

**1.1. Моделювання реакції складових композита в часі. Повна модель для матриці.** Нелінійна непружна поведінка полімерної матриці описується в рамках моделі Голдберга при кінематичному гармонічному навантаженні за різних сталих значень температури в широкому діапазоні амплітуд при заданому значенні частоти

[18]. Згідно з цією моделлю в'язкопластична реакція чистих полімерів описується за допомогою набору внутрішніх змінних стану, які характеризують опір полімерних ланцюгів пластичній течії. При цьому компоненти швидкості непружної деформації виражаються через компоненти діватора напруження наступним чином:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = 2D_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma_e}\right)\right)^{2n} \left(\frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \alpha\delta_{ij}\right), \quad (1)$$

еволюція внутрішніх змінних стану – параметр внутрішнього напруження  $Z$  і параметр гідростатичного напруженого стану  $\alpha$  визначаються рівняннями:

$$\dot{Z} = q(Z_1 - Z)\dot{\varepsilon}_e^{in}, \quad \dot{\alpha} = q(\alpha_1 - \alpha)\dot{\varepsilon}_e^{in}, \quad (2)$$

де  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$  – тензор непружної швидкості деформації, який можна визначити як функцію діватора напружень;  $Z$  та  $\alpha$  – змінні стану;  $J_2$  – другий інваріант діватора тензора напружень.

Змінна  $\alpha$  в (1), (2) є змінною стану, яка контролює ефекти гідростатичного тиску;  $D_0$  і  $n$  – константи матеріалу:  $D_0$  – максимальна швидкість непружної деформації,  $n$  визначає залежність реакції матеріалу від швидкості деформування. Ефективне напруження  $\sigma_e$  є функцією середнього значення напруження. Величина  $q$  – константа матеріалу, що визначає швидкість зміцнення,  $Z_1$  і  $\alpha_1$  – константи матеріалу, що представляють максимальні значення  $Z$  та  $\alpha$  відповідно. Початкові значення  $Z$  та  $\alpha$  позначено константами  $Z_0$  і  $\alpha_0$ . Величиною  $\dot{\varepsilon}_e^{in}$  позначено ефективну швидкість непружної деформації. Повний набір базових рівнянь для нелінійних полімерних матеріалів за умов моногармонічного навантаження наведено в [19–21].

1.1.1. *Повна модель для нановолокна (CNT)*. Вуглецеві нанотрубки зазвичай дуже жорсткі, тому механічну поведінку нановолокна вважаємо пружною, а матеріал – трансверсально-ізотропним. Симетричний тензор жорсткості четвертого порядку для нановолокна з використанням позначення Хілла може бути представлений у вигляді [22]

$$\mathbf{L}^f = \mathbf{L}^f (2k^f, l^f, n^f, 2m^f, 2p^f), \quad (3)$$

де  $\mathbf{L}^f$  – тензор пружної жорсткості;  $n^f, k^f, l^f, m^f, p^f$  – модулі пружності Хілла для волокна: модуль одновісного розтягу, об'ємний модуль при плоскому напруженому стані, поперечний модуль, що відповідає йому, модуль поперечного зсуву та модуль осевого зсуву відповідно.

1.1.2. *Повна модель контакту матриця–волокно*. Умови передачі навантаження на поверхні контакту включення та матриці моделюються стрибком переміщення [17]. Згідно з цією моделлю наявність області неідеального контакту враховується за допомогою введення шару нескінченно малої товщини, для якого напруження мають неперервний розподіл, а переміщення – розрив. У роботі [17] для такого пружного шару вводиться тензор пружності другого порядку. Цей тензор має бути симетричним і позитивно визначеним, а компоненти тензора піддатливості другого порядку  $\eta_{ij}$  виражаються у вигляді [23]

$$\eta_{ij} = \varphi\delta_{ij} + (\psi - \varphi)n_i n_j, \quad (4)$$

де  $\delta_{ij}$  – дельта-Кронекера;  $\varphi$  та  $\psi$  – параметри піддатливості в дотичному і нормальному напрямках відповідно;  $n_i$  – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі.

Згідно з моделлю [17]  $\eta_{ij} = 0$  (тензор піддатливості інтерфейсу) відповідає ідеальному контакту, тоді як  $\eta_{ij} \rightarrow \infty$  – випадку повного відриву. Відповідно до цього підходу послаблений інтерфейс моделюють малими значеннями  $\eta_{ij}$ . Якщо  $\psi = 0$ , то наведене вище визначальне рівняння для інтерфейсу описує відносне проковзування двох поверхонь інтерфейсу в дотичному напрямку без їх відриву в нормальному напрямку. Таким чином, розв'язок у випадку малих  $\varphi$  при  $\psi = 0$  забезпечує моделювання вільно ковзаючих поверхонь.

**1.2. Процедура визначення комплексних модулів для гармонічного навантаження (наближена модель для складових наноккомпозита).** Комплексні співвідношення між основними польовими змінними у випадку гармонічного навантаження, записані з використанням концепції комплексних модулів, називають наближеною (моногармонічною) моделлю циклічної поведінки матеріалу [10–13]. Розглянемо загальний підхід до визначення комплексних модулів для складових композита при гармонічному навантаженні. Існує щонайменше дві процедури отримання модулів накопичення і втрат. У рамках першого (стандартного) підходу ці характеристики визначаються за допомогою класичної схеми еквівалентної лінеаризації. Відповідно до другого (модифікованого) підходу комплексні модулі визначаються на основі циклічних діаграм залежності між амплітудами напружень і непружної деформації та амплітудою навантаження в кінематичному циклі [24, 25]. При цьому уявна частина модуля є пропорційною механічній енергії, дисипованій за період коливань, а дійсна його частина обчислюється з умови точного збігу циклічних діаграм, що визначаються прямим інтегруванням рівнянь, які моделюють реакцію матеріалу. Проілюструємо методику на прикладі визначення комплексних модулів для полімерної матриці з використанням рівнянь моделі Голдберга.

Згідно з модифікованим варіантом спрощеної моделі вважається, що при гармонічному кінематичному або силовому навантаженні реакція матеріалу також близька до гармонічного закону:

$$e_{ij}(t) = e'_{ij} \cos \omega t - e''_{ij} \sin \omega t, \quad s_{ij}(t) = s'_{ij} \cos \omega t - s''_{ij} \sin \omega t. \quad (5)$$

Для ізотропних матеріалів співвідношення між напруженнями і деформаціями можуть бути записані у формі, що розділяє девіаторну і дилатаційну частини:

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{in}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon^\theta), \quad (6)$$

де  $G$  – модуль зсуву;  $K_V$  – об'ємний модуль;  $i, j, k = 1, 2, 3$ , при цьому передбачається застосування правила додавання по повторюваному індексу.

Зауважимо, що непружна деформація вважається нестисливою,  $\varepsilon_{kk}^{in} = 0$ , а отже, тензор непружної деформації є девіатором  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \dot{e}_{ij}^{in}$ . Комплексні амплітуди девіатора повної деформації  $\tilde{e}_{ij}$ , непружної деформації  $\tilde{e}_{ij}^{in}$  і девіатора напружень  $\tilde{s}_{ij}$  в  $N$ -му циклі зв'язані з комплексним модулем зсуву та коефіцієнтом непружності  $\tilde{\lambda}_N$ :

$$\tilde{s}_{ij} = 2\tilde{G}_N \tilde{e}_{ij}, \quad \tilde{e}_{ij}^{in} = \tilde{\lambda}_N \tilde{e}_{ij}, \quad (7)$$

де  $\tilde{e}_{ij} = e'_{ij} + ie''_{ij}$ ,  $\tilde{s}_{ij} = s'_{ij} + is''_{ij}$ ,  $\tilde{e}_{ij}^{in} = e'_{ij}{}^{in} + ie''_{ij}{}^{in}$ ,  $\tilde{G}_N = G'_N + iG''_N$ ,  $\tilde{\lambda}_N = \lambda'_N + i\lambda''_N$ ,  $N$  – номер циклу,  $N = 1, 2, 3, \dots$ ;  $(\cdot)'$ ,  $(\cdot)''$  – дійсна та уявна частини комплексних величин.

Комплексний модуль зсуву і коефіцієнт непружності є функціями інтенсивності тензора амплітуд деформації  $e_i$ , частоти збудження  $\omega$  і температури  $\theta$ :

$$\tilde{G}_N = \tilde{G}_N(e_i, \omega, \theta), \quad \tilde{\lambda}_N = \tilde{\lambda}_N(e_i, \omega, \theta), \quad (8)$$

де квадрат інтенсивності тензора деформацій обчислюється як  $e_i = \sqrt{e'_{ij} e'_{ij} + e''_{ij} e''_{ij}}$ .

Уявна частина комплексних модулів визначається за умови рівності енергій, що розсіюються за період:

$$G''_N = \frac{\langle D' \rangle_N}{\omega e_i^2}, \quad \lambda''_N = \frac{G''_N}{G_0}, \quad \langle (\cdot) \rangle_N = \frac{1}{T} \int_{T(N-1)}^{TN} (\cdot) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (9)$$

де  $D'$  – швидкість дисипації механічної енергії;  $G_0$  – пружний модуль зсуву.

Дійсні частини комплексних модулів знайдено за умови, що узагальнені циклічні діаграми  $s_{aN} = s_{aN}(e_i, \omega)$  та  $e_{paN} = e_{paN}(e_i, \omega)$ , які зв'язують розмахи інтенсивностей напружень та непружної деформації в  $N$ -му циклі, збігаються в рамках повного і наближеного підходів:

$$G'_N(e_i, \omega) = \left[ \frac{s_{aN}^2(e_i, \omega)}{4e_i^2} - G_N''^2(e_i, \omega) \right]^{1/2},$$

$$\lambda'_N(e_i, \omega) = \left[ \frac{e_{paN}^2(e_i, \omega)}{4e_i^2} - \lambda_N''^2(e_i, \omega) \right]^{1/2}, \quad (10)$$

де  $G'_N$  та  $\lambda'_N$  – шукана дійсна частина модуля зсуву та коефіцієнта непружності.

Зауважимо, що, як вказано вище, матеріал нановолокна демонструє пружну поведінку, отже, лише модуль накопичення для нього буде відмінним від нуля. Разом із тим моделювання поведінки поверхні контакту волокно–матриця в рамках наближеної моделі реакції матеріалу передбачає використання комплексного аналога співвідношень (4) із комплексним коефіцієнтом Пуассона та врахуванням геометрії нановолокна (діаметр і співвідношення характерних розмірів) [26]. Таким чином, реакція границі контакту складових нонокомпозита характеризується комплексною величиною, яка залежить від частоти, температури і амплітуди циклічного навантаження.

Незважаючи на те що розв'язки задачі, отримані при моногармонічному наближенні із застосуванням модифікованого варіанту методу еквівалентної лінеаризації, добре узгоджуються з точною моделлю нелінійної поведінки матеріалу особливо в околі резонансу, питання практичної точності узгодження необхідно досліджувати для кожного конкретного класу задач.

**1.3. Процедура гомогенізації (модифікований метод Морі–Танака).** Метод Морі–Танака (МТ) як метод гомогенізації [27] широко застосовується для прогнозування ефективних пружних властивостей композитних матеріалів. Для визначення ефективних властивостей нанокомпозита з урахуванням впливу поверхні контакту наповнювач–матриця та геометрії CNT волокон при циклічному та статичному навантаженні будемо використовувати модифікований метод МТ. Процедуру оцінки модулів накопичення і втрат для нанокомпозитних складових, а також модель урахування впливу поверхні контакту на властивості композита було розроблено в [20]. Із використанням наближених амплітудних співвідношень, наведених у розд. 1.2, отримують комплексні модулі зсуву для матриці за різних температур, частот та амплітуд деформації. Згідно з результатами досліджень [26, 28] метод МТ застосовується для прогнозування загальних властивостей нанокомпозитів, армованих короткими волокнами.

Отриманий таким чином прогноз властивостей добре узгоджується з даними експериментальних випробувань [26].

Суть модифікації методу МТ коротко викладено нижче. Розглядається двокомпонентна нанокомпозитна система (полімерна матриця та нановолокна). Верхніми індексами  $M$  та  $f$  позначено відповідні фази композита: полімерну матрицю та нановолокно. На основі принципу пружно-в'язкопружної аналогії та його узагальнення – принципу пружно-непружної аналогії – у випадку циклічного деформування компоненти загального тензора жорсткості нанокомпозита можуть бути виражені комплексним тензором жорсткості  $\tilde{\mathbf{L}}^M, \mathbf{L}^f$  кожного з його складових та їх об'ємного вмісту  $\tilde{\mathbf{L}}^C = \tilde{\mathbf{L}}^C(\tilde{\mathbf{L}}^M, \mathbf{L}^f, V^M, V^f)$ , де  $V^M$  та  $V^f$  – об'ємні частки матриці та CNT волокна відповідно; комплексні величини для тензора макроскопічної жорсткості нанокомпозита позначено “ $\sim$ ”. Варто відзначити, що в цьому виразі тензори жорсткості полімерної матриці та поверхні контакту вважаються комплексними. Тоді тензор жорсткості нанокомпозитного матеріалу  $\tilde{\mathbf{L}}^C$  може бути визначений як комплексно-значна функція температури, частоти і амплітуди. Після врахування впливу поверхні контакту отримуємо новий вираз для тензора Ешелбі  $\tilde{\mathbf{S}}$ , який необхідно включити в аналіз тензора  $\tilde{\mathbf{L}}^C$  [26]. При цьому вводяться модифіковані оцінки МТ для макроскопічно однорідних властивостей нанокомпозита. Новий вираз для компонент тензора жорсткості релаксації напружень у рамках модифікованої оцінки МТ для двофазного однонаправленого композита має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}^C &= (V^M \tilde{\mathbf{L}}^M + V^f \mathbf{L}^f \tilde{\mathbf{A}}^{dil})(V^M \mathbf{I} + V^f \tilde{\mathbf{A}}^{dil} + V^f \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{L}^f \tilde{\mathbf{A}}^{dil})^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{A}}^{dil} &= [\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{L}^f)^{-1}(\mathbf{L}^f - \tilde{\mathbf{L}}^M)]^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\tilde{\mathbf{A}}^{dil}$  та  $\tilde{\mathbf{H}}$  – тензори дилатації та піддатливості контакту фаз відповідно. Підкреслимо, що вирази для компонент ефективних непружних властивостей нанокомпозита в рівнянні (11) при циклічному навантаженні є комплексними і залежними від температури, інтенсивності деформації і частоти.

Другий доданок у чисельнику в правій частині рівняння (11) введено для врахування ефектів контакту фаз. Компоненти тензора  $\tilde{\mathbf{H}}$  мають вигляд

$$\tilde{H}_{ijkl} = \varphi \tilde{P}_{ijkl} + (\psi - \varphi) \tilde{Q}_{ijkl}, \quad (12)$$

де вирази для тензорів  $\tilde{\mathbf{P}}$  та  $\tilde{\mathbf{Q}}$  наведено в [26].

Для отримання величин параметра  $\varphi$  використовувалися значення, отримані з молекулярної динаміки [29]. Для параметра  $\psi$  значення вибиралося рівним 0,01 нм/ГПа, для  $\psi$  – рівним нулю [29] для всіх випадків у цьому розділі. Тензори жорсткості нановолокна  $\mathbf{L}^f$  і полімерної матриці  $\tilde{\mathbf{L}}^M$  отримано з використанням констант матеріалу для CNT волокна й епоксидної смоли RP-520, наведених у [28, 30] відповідно (таблиця). Окрім того, довжину та діаметр CNT волокна вибирали рівними 6 і 1,7 нм відповідно.

Згідно з розробленою процедурою основним є визначення комплексних модулів повзучості  $\tilde{J} = J' - iJ''$  та рівноважного модуля піддатливості  $J^\infty$  нанокомпозитного матеріалу. Вищезгадані модулі використовуються для вивчення теплової та механічної стійкості нанокомпозитного елемента конструкції, що перебуває під дією комбінованого стаціонарного стискування та гармонічного навантаження з малою амплітудою.

**Температурні залежності констант матеріалів для CNT волокна  
й епоксидної смоли RP-520**

$\theta$ , °C	$E_0$ , МПа	$D_0$ , с <sup>-1</sup>	$Z_0$ , МПа	$Z_1$ , МПа	$n$	$q$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\nu$	$l^f$ , МПа	$k^f$ , МПа	$m^f$ , МПа	$n^f$ , МПа	$p^f$ , МПа
25	3250	10 <sup>6</sup>	407,5	768,6	0,92	253,6	0,571	0,122	0,4	10	30	1	450	1
50	2980	10 <sup>6</sup>	267,9	616,4	0,94	226,1	0,316	0,085	0,4	–	–	–	–	–
80	2520	10 <sup>6</sup>	195,4	564,9	0,88	273,4	0,087	0,064	0,4	–	–	–	–	–

**2. Постановка задачі та методика її розв’язку.** Як відмічалось вище, найбільш цікавим ефектом при квазістатичному деформуванні є явище теплової нестійкості полімерних і нанокompозитних тіл, що за певних умов може призвести до теплового руйнування елементів конструкцій. Досліджується проблема вібророзігріву нанокompозитного стрижня з круговим поперечним перерізом. Довжину стрижня позначено  $L$ , радіус поперечного перерізу –  $R$ . Нанокompозитний стрижень піддається як статичному стискуванню, так і гармонічному навантаженню з малою амплітудою,  $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$ , які прикладаються на вільному кінці. Другий кінець стрижня є жорстко закріпленим. Передбачається, що частота збудження  $\omega$  є достатньо малою, щоб гарантувати відсутність будь-яких параметричних, суб- або супергармонічних резонансів. Для навантажувальних сил і амплітуд має місце нерівність  $P_1 \ll P_0 < P_{cr}$ , де  $P_{cr}$  – ейлерове критичне навантаження. За таких припущень обґрунтованим є застосування квазістатичної теорії в’язкопластичності.

Співвідношення між напруженнями і деформаціями у в’язкопластичному стрижні має вигляд:

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \sigma_1 \cos \omega t, \quad \varepsilon(t) = \sigma_0 J^\infty + \sigma_1 \operatorname{Re}[\tilde{J} e^{i\omega t}],$$

де  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  – величини сталого стискування та амплітуда гармонічного навантаження відповідно. Усереднена за період коливань швидкість дисипації енергії

$$\langle D' \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \sigma(\xi) \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi = \frac{\omega}{2} J'' \sigma_1^2 \tag{13}$$

використовується як джерело тепла в перехідному процесі в рівнянні, до якого зводиться одновимірне рівняння теплопровідності, що описує еволюцію температури у в’язкопластичному стрижні, за прийнятого припущення однорідності розподілу температури по довжині (у даній задачі всі поперечні перерізи стрижня за таких умов мають однакову температуру):

$$\frac{d\theta^*}{dt} = - \frac{\alpha_t S}{C_V V} \theta^* + \frac{\alpha_t S}{C_V V} + \frac{\omega}{2C_V \theta_0} J'' \sigma_1^2, \tag{14}$$

де  $\theta^*$  – нормалізована температура,  $\theta^* = \theta/\theta_0$ ;  $C_V$ ,  $\alpha_t$  – питома теплоємність при сталому об’ємі і коефіцієнт тепловіддачі з поверхні стрижня відповідно;  $S$ ,  $V$  і  $\theta_0$  – площа бічної поверхні, об’єм стрижня і температура навколишнього середовища відповідно.

Рівняння (14) має бути доповнене відповідною початковою умовою. Важливо відзначити, що при розрахунку модуля втрат для коефіцієнта піддатливості при

заданому значенні інтенсивності деформації використовується наближений вираз  $J'' = J_0''(\theta^*)^\beta$ , де  $J_0''$  – початкове значення відповідного модуля втрат при гармонічному навантаженні;  $\beta$  – константа матеріалу. Ці дві константи розраховуються за допомогою даних, отриманих у рамках спрощеного моногармонічного підходу, описаного в розд. 1.3.

Модуль втрат для коефіцієнта піддатливості  $J''$  залежить від величини амплітуди гармонічного навантаження  $P_1$  і температури вібророзігріву, а для  $J_0''$  – лише від температури.

Рівняння (14) можна переписати у вигляді

$$\frac{d\theta^*}{d\tau} = -\theta^* + 1 + \mu\theta^{*\beta}, \quad \mu = \frac{\omega}{2C_V\theta_0} J_0''\sigma_1^2, \quad \lambda = \frac{\alpha_t S}{C_V V}, \quad (15)$$

де  $\mu$ ,  $\lambda$  – параметри навантаження і часова константа відповідно.

Із рівняння (15) випливає, що для стаціонарного теплового стану має місце рівність  $\theta^* = 1 + \mu\theta^{*\beta}$ . Як уже згадувалося вище, величина  $J''$  для більшості матеріалів зростає з температурою. Якщо вона зростає швидше, ніж за лінійним законом, то існує такий критичний параметр навантаження  $\mu^*$ , що для  $\mu > \mu^*$  не існує розв'язку рівняння  $\theta^* = 1 + \mu\theta^{*\beta}$ . Це означає, що дисипативний розігрів не може бути врівноваженим за рахунок тепловіддачі у навколишнє середовище – у результаті спостерігається явище теплової нестійкості.

Дослідимо вплив вібророзігріву на механічну стійкість в'язкопластичного стрижня. Для знаходження критичної сили  $P_{cr}$  можна використати ейлерів підхід. Із урахуванням однорідності поля температури і умови  $P_1 \ll P_0$  диференціальне рівняння вісі стрижня та вираз для ейлерового критичного навантаження можна записати у вигляді

$$\frac{d^4 W}{dz^4} + \xi_0^2 \frac{d^2 W}{dz^2} = 0, \quad \xi_0 = \left( \frac{P_0 J^\infty}{I} \right)^{1/2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 I}{J^\infty (KL)} = \frac{\chi}{J^\infty}, \quad (16)$$

де  $K$  – ефективний коефіцієнт довжини стрижня;  $W$  і  $\chi$  – прогин і стала, яка залежить від форми стрижня та умов його закріплення.

Для більшості матеріалів  $J^\infty$  збільшується з підвищенням температури. Для певної критичної температури  $\theta_{cr}^*$  ейлерове критичне навантаження може сягати значення прикладеного стискаючого навантаження  $P_0$ , яке спочатку було меншим за  $P_{cr}$ . Залежність рівноважних модулів піддатливості  $J^\infty$  від температури апроксимується виразом  $J^\infty = J_0^\infty (\theta^*)^\gamma$ , де  $\gamma$  – константа матеріалу;  $J_0^\infty$  – початкове значення рівноважного модуля піддатливості при статичному навантаженні. Нормалізоване ейлерове критичне напруження  $\sigma_{cr}^*$  визначається так:

$$\sigma_{cr}^* = P_{cr} / P_{cr}^0 = \sigma_{cr} / \sigma_{cr}^0 = 1 / (\theta^*)^\gamma,$$

де  $P_{cr}^0$  і  $\sigma_{cr}^0$  – початкове ейлерове критичне навантаження і напруження.

Залежність параметра навантаження  $\mu$  від нормованого ейлерового критичного навантаження може бути записана у вигляді

$$\mu = [(\sigma_{cr}^*)^{-\gamma} - 1](\sigma_{cr}^*)^{-\beta/\gamma}. \quad (17)$$



**3. Чисельні результати та їх аналіз.** Для дослідження теплової нестійкості в'язкопластичного елемента розглядається задача вібророзігріву нанокompозитного стрижня з круговим поперечним перерізом. Довжина стрижня становить 0,5 м, радіус поперечного перерізу – 0,03 м. Одновимірною задачею нестационарної теплопровідності розв'язується чисельно з використанням ітераційної процедури за різних значень параметра навантаження. Частота навантаження приймається рівною 1 Гц. Вивчається вплив об'ємного вмісту нановолокон на теплову нестійкість нанокompозитного стрижня для випадків однонаправленого армування або випадково орієнтованих нановолокон.

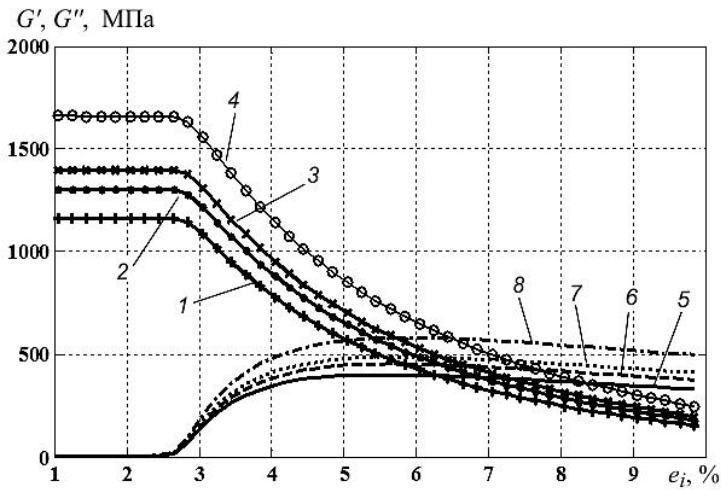
**3.1. Реакція матеріалу на циклічне навантаження.** Повний огляд досліджень щодо базових рівнянь мікро- та макромеханічних моделей нелінійних непружних полімерних нанокompозитних матеріалів при моногармонічній деформації наведено в [20]. Для визначення комплексних модулів для матеріалу матриці використовується методика, описана в розд. 1.2. У даних рамках і з використанням процедури гомогенізації вплив об'ємного вмісту нановолокна та амплітуди гармонічного навантаження на комплексні модулі зсуву на заданій частоті для нанокompозитного матеріалу з випадково і однонаправлено орієнтованими CNT нановолокнами ілюструє рис. 1. Видно, що і модуль накопичення, і модуль втрат зростають зі збільшенням величини об'ємного вмісту наповнювача. Амплітуда інтенсивності деформації, з якої починається нелінійна поведінка нанокompозита ( $e_i \approx 2,5\%$ ), не змінюється з збільшенням об'ємного вмісту нановолокон, оскільки вона зв'язана з нелінійною поведінкою полімерної матриці. Цікаво зауважити, що для різного об'ємного вмісту наповнювача максимуми модуля втрат відмічаються приблизно при однаковій амплітуді гармонічного навантаження ( $e_i \approx 6\%$ ).

На рис. 1,б наведено залежності дійсної  $G'_{12}$  та уявної  $G''_{12}$  частин модуля осьового зсуву від інтенсивності навантаження і об'ємного вмісту нановолокон для нанокompозита з однонаправлено орієнтованими нановолокнами. Видно, що об'ємний вміст нановолокон мало впливає на комплексні модулі осьового зсуву  $\tilde{G}_{12} = G'_{12} + iG''_{12}$ .

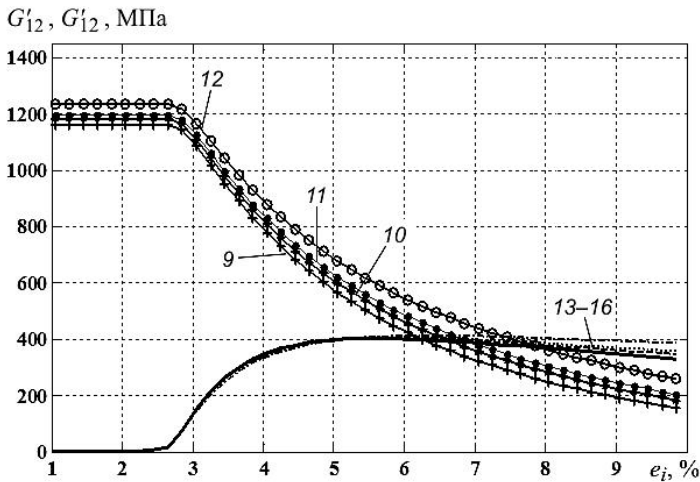
Залежність комплексних модулів зсуву  $\tilde{G}$  і  $\tilde{G}_{12}$  від амплітуди деформації  $e_i$  та температури для нанокompозитного матеріалу з випадково і однонаправлено орієнтованими нановолокнами наведено на рис. 2 при  $V^f = 3\%$  і частоті навантаження 1 Гц. Непружна поведінка матеріалу виникає за меншої амплітуди деформації при підвищенні температури. Взагалі, значення модуля накопичення зменшуються з підвищенням температури, а модуль втрат дещо збільшується для початкових значень інтенсивності деформації на початку непружної області (в околі границі текучості).

Зміну коефіцієнта рівноважної піддатливості в залежності від безрозмірної температури для нанокompозита з випадково і однонаправлено орієнтованими CNT нановолокнами для різних значень їх об'ємного вмісту при  $\sigma_0 = 50$  МПа наведено на рис. 3. Зі збільшенням об'ємного вмісту наповнювача коефіцієнт рівноважної піддатливості зменшується, разом із тим знижується його чутливість до температури.

**3.2. Результати оцінки критичних параметрів конструкції.** Рис. 4,а ілюструє залежність безрозмірної температури від часу в нанокompозитному стрижні з випадково орієнтованими нановолокнами для вмісту CNT нановолокон 3% при амплітудах гармонічних навантажень 40, 50 та 75 МПа. Криві на цьому рисунку свідчать про те, що існує стаціонарний тепловий стан, викликаний вібророзігрівом. На основі цих даних можна описати зміну кривих еволюції температури вібророзігріву в залежності від модуля втрат для коефіцієнта піддатливості  $J''$ . Відзначається, що при зростанні амплітуди збудження циклічного навантаження модуль втрат також збільшується. Окрім того, зміна температури в стрижні є дуже малою через низьке значення модуля втрат  $J''$  (крива 3).



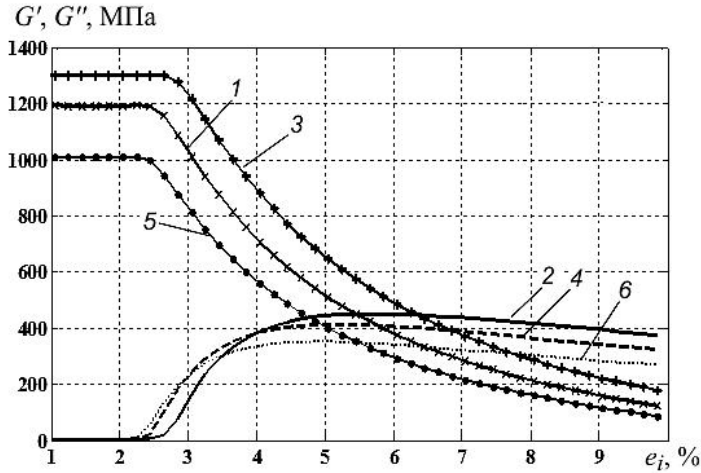
a



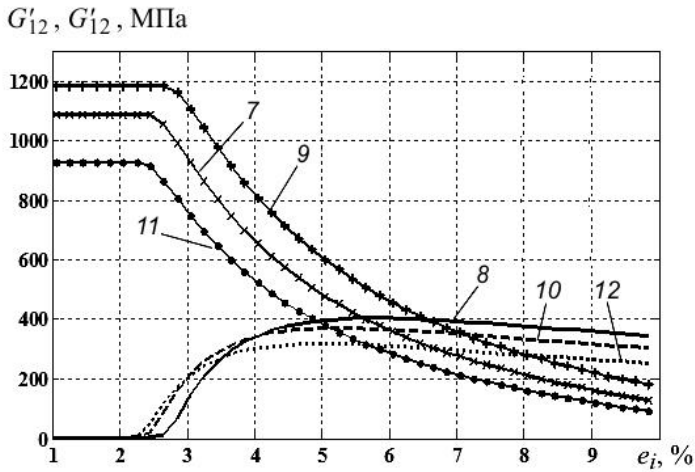
б

Рис. 1. Залежність комплексного модуля зсуву від об'ємного вмісту та амплітуди деформації при частоті навантаження 1 Гц для нанокompозита з випадково (а) і однонаправлено (б) орієнтованими нановолокнами: 1 –  $G'$ , чистий полімер; 2 –  $G'$ ,  $V^f = 3\%$ ; 3 –  $G'$ ,  $V^f = 5\%$ ; 4 –  $G'$ ,  $V^f = 10\%$ ; 5 –  $G''$ , чистий полімер; 6 –  $G''$ ,  $V^f = 3\%$ ; 7 –  $G''$ ,  $V^f = 5\%$ ; 8 –  $G''$ ,  $V^f = 10\%$ ; 9 –  $G'_{12}$ ,  $V^f = 0$ ; 10 –  $G'_{12}$ ,  $V^f = 3\%$ ; 11 –  $G'_{12}$ ,  $V^f = 5\%$ ; 12 –  $G'_{12}$ ,  $V^f = 10\%$ ; 13 –  $G''_{12}$ ,  $V^f = 0$ ; 14 –  $G''_{12}$ ,  $V^f = 3\%$ ; 15 –  $G''_{12}$ ,  $V^f = 5\%$ ; 16 –  $G''_{12}$ ,  $V^f = 10\%$ .

Залежність безрозмірної температури від часу в нанокompозитному стрижні з випадково орієнтованими CNT нановолокнами для різного об'ємного їх вмісту при  $\sigma_1 = 75$  МПа показано на рис. 4,б. Видно, що стаціонарна температура вібророзігріву монотонно зменшується при збільшенні об'ємного вмісту нановолокон у полімері, а для чистого полімеру температура дисипативного розігріву підвищується дуже швидко, що в результаті призводить до руйнування по механізму теплової нестійкості. Отже, додавання нановолокон у полімерну матрицю підвищує теплову стійкість елемента конструкції завдяки зниженню коефіцієнта втрат та збільшенню теплопровідності матеріалу стрижня.



a



б

Рис. 2. Залежність комплексного модуля зсуву від амплітуди деформації та температури при  $V^f = 3\%$  для нанокompозита з випадково (а) і однонаправлено (б) орієнтованими нановолокнами: 1 –  $G'$ , 50°C; 2 –  $G'$ , 25°C; 3 –  $G'$ , 25°C; 4 –  $G'$ , 50°C; 5 –  $G'$ , 80°C; 6 –  $G''$ , 80°C; 7 –  $G'_{12}$ , 50°C; 8 –  $G'_{12}$ , 25°C; 9 –  $G'_{12}$ , 25°C; 10 –  $G'_{12}$ , 50°C; 11 –  $G'_{12}$ , 80°C; 12 –  $G'_{12}$ , 80°C.

Нормалізоване ейлерове критичне напруження  $\sigma_{cr}^*$  залежить від рівноважного модуля піддатливості  $J^\infty$ , який змінюється внаслідок підвищення температури в результаті дисипативного розігріву елемента. Залежність  $\sigma_{cr}^*$  від параметра навантаження нанокompозитного стрижня з випадково орієнтованими нановолокнами при об'ємному вмісті нановолокон  $V^f = 3\%$  за різних значень амплітуди гармонічного навантаження  $\sigma_1 = 40, 50$  та  $60$  МПа показано на рис. 5,а. Як видно, безрозмірне критичне напруження зменшується зі зростанням навантаження.

Зробимо зауваження щодо механізму нестійкості, який має місце при розв'язку задачі. При зростанні модуля втрат матеріалу температура дисипативного розігріву також підвищується, отже, щоб запобігти руйнуванню внаслідок теплової нестійкості, тепло повинно активно відводитись через поверхню стрижня в навколишнє

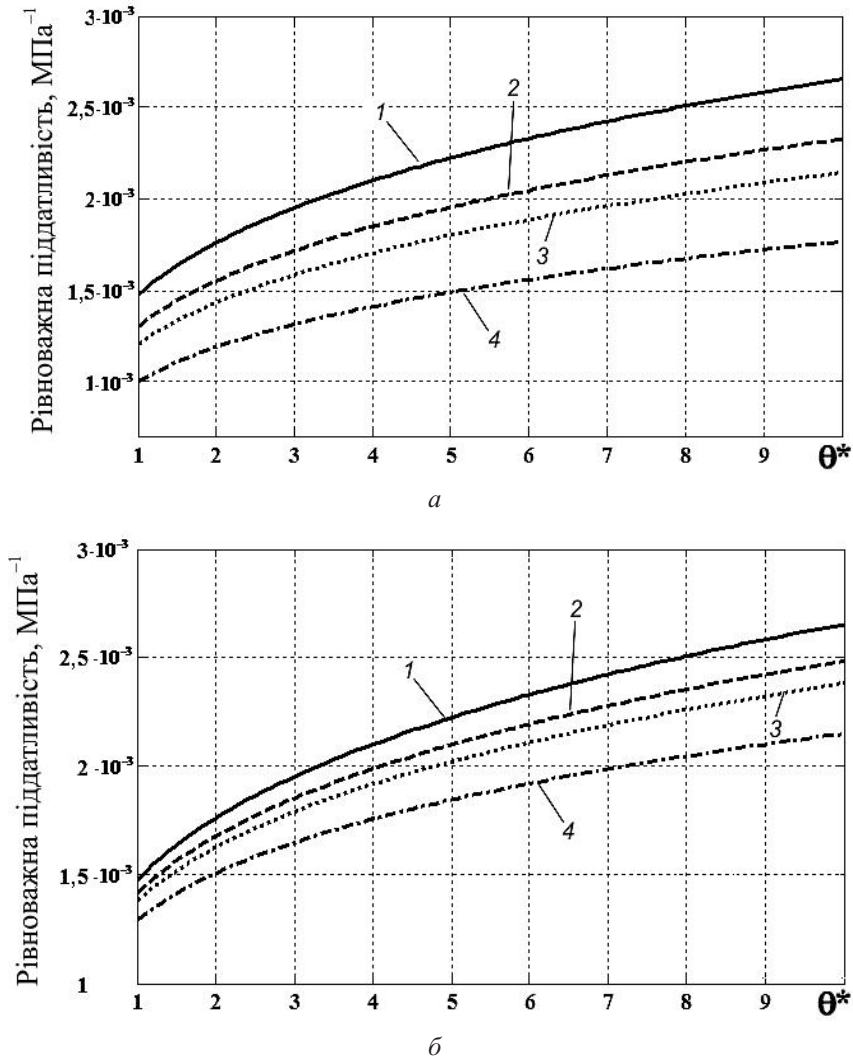


Рис. 3. Вплив об'ємного вмісту нановолокон на залежність коефіцієнта рівноважної піддагливості від безрозмірної температури при статичному навантаженні  $\sigma_0 = 50$  МПа для нанокompозита з випадково (а) і однонаправлено (б) орієнтованими нановолокнами: 1 – чистий полімер; 2 –  $V^f = 3\%$ ; 3 –  $V^f = 5\%$ ; 4 –  $V^f = 10\%$ .

середовище. В іншому випадку температура стрижня збільшується, а критичне напруження зменшується. У результаті при  $\mu > \mu^*$  має місце механічна нестійкість.

На рис. 5 суцільні лінії відповідають стійким (у сенсі теплової стійкості) критичним значенням осьових напружень, штрихові – значенням, які не реалізуються в стаціонарному тепловому стані. Згідно з наведеними результатами критичне значення осьового напруження для  $\sigma_1 = 60$  МПа зменшується на 50% при  $\mu^* \approx 0,6$ , при вищих значеннях параметра ( $\mu > \mu^*$ ) виникає механічна нестійкість. Вплив об'ємного вмісту наповнювача на механічну стійкість нанокompозитного стрижня з випадково орієнтованими нановолокнами для  $\sigma_1 = 60$  МПа ілюструє рис. 5,б. Із підвищенням вмісту CNT нановолокон нормалізоване критичне напруження збільшується, і в результаті механічна стійкість стрижня зростає. Видно, що температура

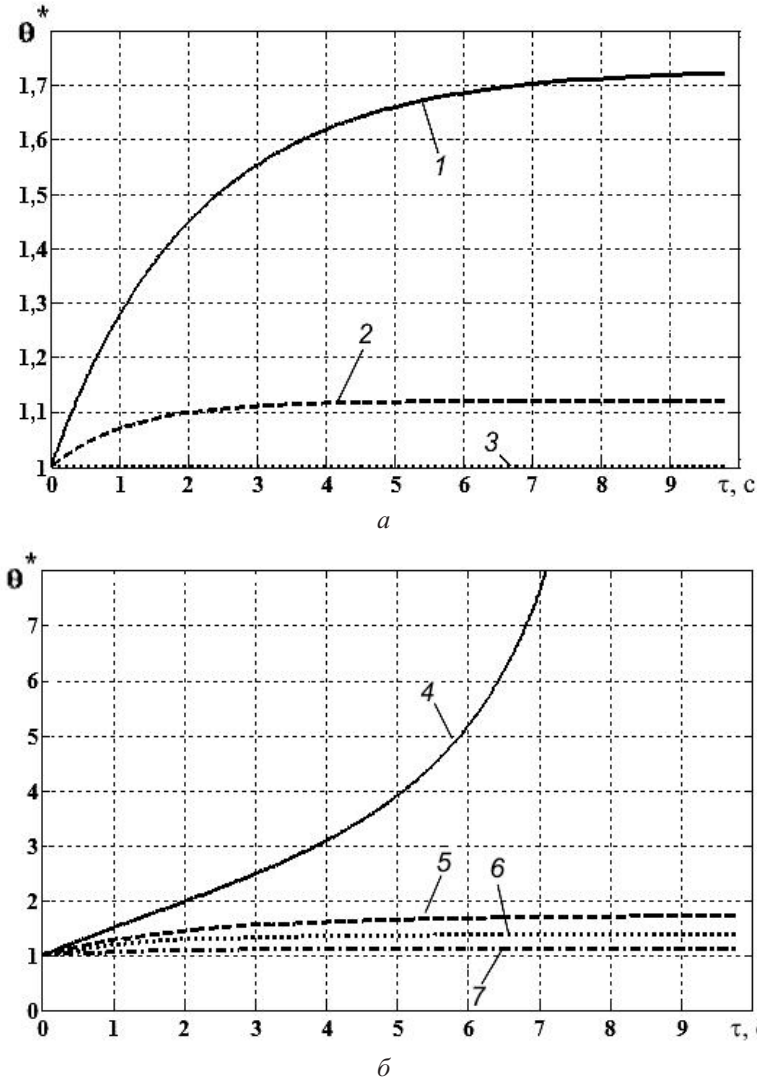
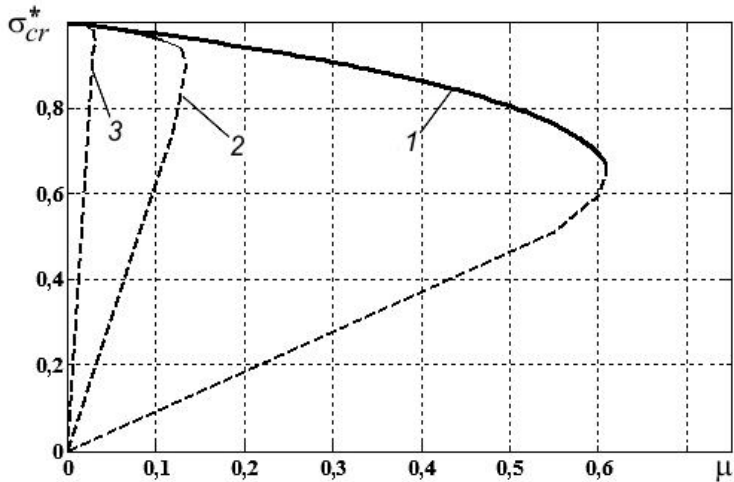


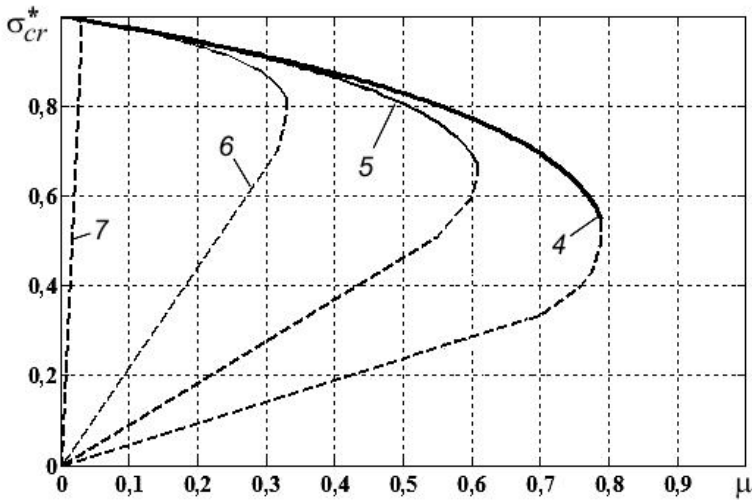
Рис. 4. Еволюція температури в нанокompозитному стрижні з випадково орієнтованими нановолокнами для  $V^f = 3\%$  при  $\sigma_1 = 40, 50, 75$  МПа: 1 –  $\mu = 0,35$ ; 2 –  $\mu = 0,105$ ; 3 –  $\mu = 9,84 \cdot 10^{-6}$  відповідно (а) і для  $V^f = 0, 3, 5, 10\%$ , при  $\sigma_1 = 75$  МПа: 4 –  $\mu = 0,54$ ; 5 –  $\mu = 0,35$ ; 6 –  $\mu = 0,25$ ; 7 –  $\mu = 0,11$  відповідно (б).

дисипативного розігріву зменшується зі збільшенням вмісту нановолокон. Це пояснюється тим, що модуль втрат  $J''$  зменшується. Окрім того, коефіцієнт теплопровідності матеріалу стрижня збільшується з додаванням CNT нановолокон. Це добре видно при зміні коефіцієнтів  $\beta$  і  $\gamma$ .

Розглянемо нанокompозитний стрижень з однонаправлено орієнтованими волокнами. Вважаємо, що CNT нановолокна орієнтовані вздовж вісі стрижня. Залежність безрозмірної температури від часу в такому нанокompозитному стрижні для об'ємного вмісту наповнювача 3% при амплітудах гармонічного навантаження  $\sigma_1 = 40, 50, 60$  МПа наведено на рис. 6,а. Видно, що стаціонарне значення температури існує в заданому діапазоні зміни цих напружень. Отже, дисипативний розігрів не призводить до теплової нестійкості при розглянутих рівнях збудження.



а



б

Рис. 5. Вплив амплітуди гармонічного навантаження на механізм стійкості і нормоване критичне напруження при  $V^f = 3\%$ : 1 –  $\beta = 1,16$ ,  $\sigma_1 = 60$  МПа; 2 –  $\beta = 3,14$ ,  $\sigma_1 = 50$  МПа; 3 –  $\beta = 1,05$ ,  $\sigma_1 = 40$  МПа (а) і об'ємного вмісту наповнювача на стійкість і нормоване критичне напруження для нанокompозитного стрижня із випадково орієнтованими нановолокнами при  $\sigma_1 = 60$  МПа: 4 –  $\beta = 1,05$ ,  $\gamma = 0,2549$ , чистий полімер; 5 –  $\beta = 1,16$ ,  $\gamma = 0,2518$ ,  $V^f = 3\%$ ; 6 –  $\beta = 1,64$ ,  $\gamma = 0,2499$ ,  $V^f = 5\%$ ; 7 –  $\beta = 12,47$ ,  $\gamma = 0,2457$ ,  $V^f = 10\%$  (б).

Порівняння результатів для нанокompозитного стрижня з випадково і однонаправлено орієнтованими нановолокнами при  $\sigma_1 = 50$  МПа показує, що нанокompозитний стрижень з однонаправлено орієнтованими нановолокнами має кращу теплову стійкість, ніж стрижень з випадково орієнтованими нановолокнами при однаковому об'ємному вмісті волокон. Це можна пояснити вищою жорсткістю матеріалу стрижня при осовій орієнтації нановолокон, ніж у разі їх випадкової орієнтації.

Рис. 6,б ілюструє вплив об'ємного вмісту CNT нановолокон на теплову стійкість стрижня з однонаправлено орієнтованими нановолокнами при  $\sigma_1 = 75$  МПа. Видно, що армування полімерної матриці орієнтованими вздовж вісі нановолокнами

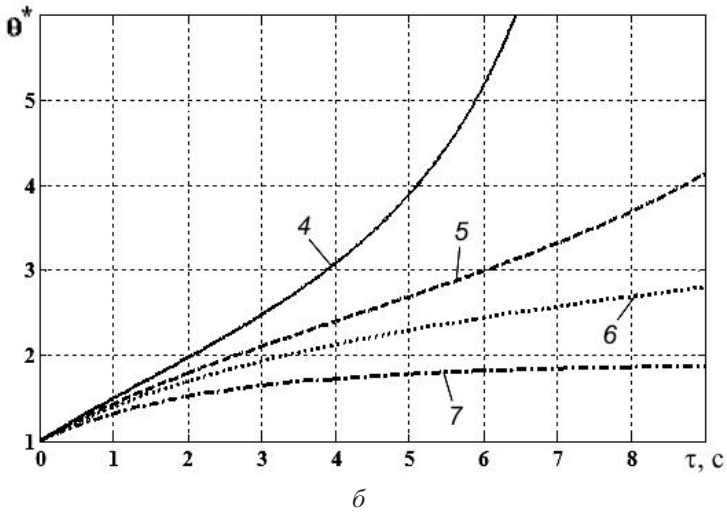
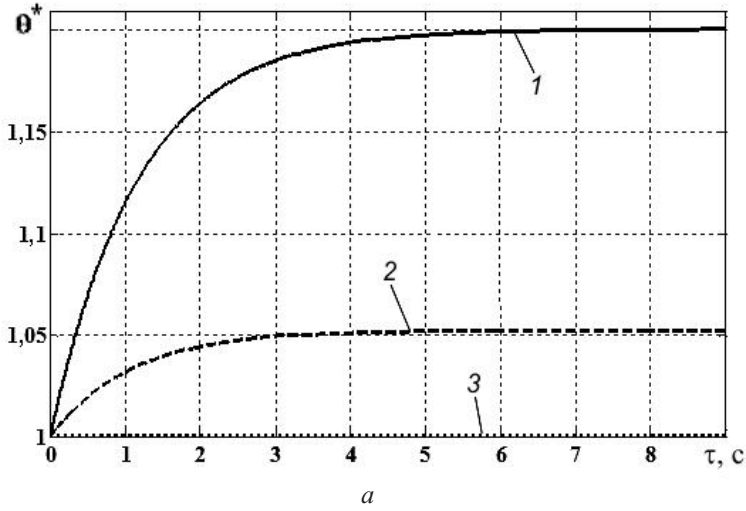


Рис. 6. Зміна температури нанокompозитного стрижня з однонаправлено орієнтованими нановолокнами при  $\sigma_1 = 40, 50, 60$  МПа,  $V^f = 3\%$ : 1 –  $\mu = 0,16$ ; 2 –  $\mu = 0,048$ ; 3 –  $\mu = 1,34 \cdot 10^{-0,5}$  відповідно (а) та при  $\sigma_1 = 75$  МПа,  $V^f = 0, 3, 5, 10\%$ : 4 –  $\mu = 0,54$ ; 5 –  $\mu = 0,49$ ; 6 –  $\mu = 0,46$ ; 7 –  $\mu = 0,39$  відповідно (б).

покршує теплову стійкість стрижня. Температура дисипативного розігріву швидко наближається до стаціонарного значення. Як відмічалося вище, параметр навантаження  $\mu$  (15) зменшується зі збільшенням об'ємного вмісту волокон, при цьому модуль втраг для коефіцієнта повзучості за сталої амплітуди циклічного навантаження також зменшується, в той час як коефіцієнт теплопровідності матеріалу стрижня зростає. Окрім того, для стрижня з вмістом CNT нановолокон 10% все тепло, згенероване внаслідок дисипації механічної енергії за період коливань, повністю відводиться через поверхню до навколишнього середовища. У цьому випадку у стрижні встановлюється стаціонарний тепловий стан, а отже, циклічна поведінка є термічно стійкою.

На рис. 7,а наведено залежності нормалізованого ейлерового критичного напруження  $\sigma_{cr}^*$  від параметра навантаження  $\mu$  для нанокompозитного стрижня з CNT

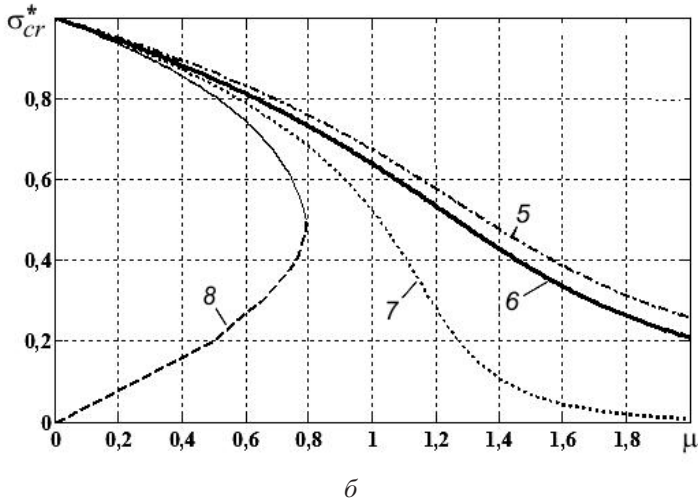
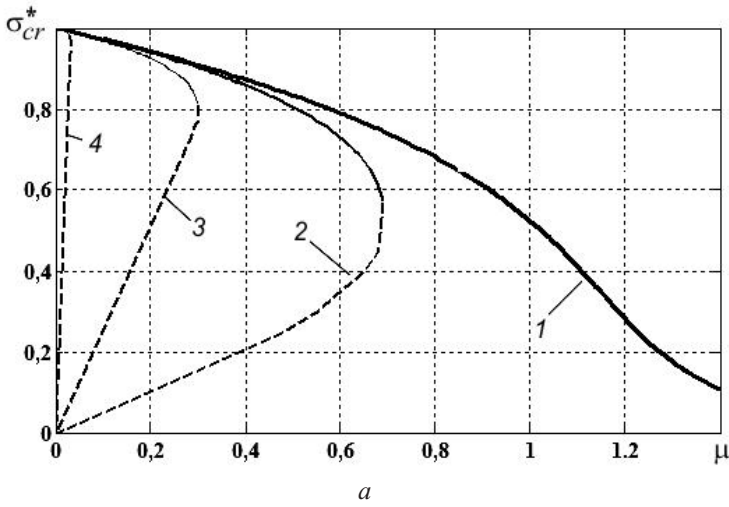


Рис. 7. Вплив амплітуди гармонічного навантаження на механізм стійкості і нормоване критичне напруження для нанокompозитного стрижня з однонаправлено орієнтованими нановолокнами при  $V^f = 3\%$ : 1 –  $\beta = 0,95$ ,  $\sigma_1 = 60$  МПа; 2 –  $\beta = 1,1$ ,  $\sigma_1 = 55$  МПа; 3 –  $\beta = 1,75$ ,  $\sigma_1 = 50$  МПа; 4 –  $\beta = 12,58$ ,  $\sigma_1 = 40$  МПа (а) та об'ємного вмісту наповнювача на стійкість і нормоване критичне напруження для стрижня з випадково орієнтованими вздовж вісі нановолокнами при  $\sigma_1 = 60$  МПа: 5 –  $\beta = 0,88$ ,  $\gamma = 0,2206$ ,  $V^f = 10\%$ ; 6 –  $\beta = 0,883$ ,  $\gamma = 0,2372$ ,  $V^f = 5\%$ ; 7 –  $\beta = 0,95$ ,  $\gamma = 0,2441$ ,  $V^f = 3\%$ ; 8 –  $\beta = 1,05$ ,  $\gamma = 0,2549$ ,  $V^f = 0$  (б).

нановолокнами, орієнтованими вздовж вісі, для  $V^f = 3\%$  при різних амплітудах навантаження. Аналіз результатів показує, що механічна нестійкість спостерігається при  $\sigma_1 = 40, 50, 55$  МПа для  $\mu > \mu^*$ , тоді як для  $\sigma_1 = 60$  МПа поведінка є механічно стійкою. Це означає, що поведінка стрижня є стійкою при всіх значеннях параметра навантаження, а дисипативний розігрів не впливає на його механічну стійкість. Цей результат добре узгоджується з даними, отриманими в [12].

Такий ефект зумовлений тим, що модуль втрат  $J'' = J_0''(\theta^*)^\beta$  зменшується з підвищенням температури, тому що коефіцієнт  $\beta$  є меншим за одиницю ( $\beta = 0,88$ ) (17). Отже, ключовим при визначенні існування режимів теплової нестійкості є аналіз



параметра  $\beta$ . Якщо коефіцієнт  $\beta$  менший за одиницю, то для довільного значення параметра навантаження спостерігається механічно стійка поведінка стрижня.

Вплив об'ємного вмісту наповнювача на механічну стійкість і критичне напруження нанокompозитного стрижня з однонаправлено орієнтованими волокнами для  $\sigma_1 = 60$  МПа ілюструє рис. 7,б. Видно, що зі збільшенням об'ємного вмісту CNT нановолокон критичне напруження зростає, а коефіцієнти  $\beta$  і  $\gamma$  зменшуються. Армування полімерної матриці нановолокнами, орієнтованими вздовж вісі стрижня при  $V^f = 3, 5$  і 10%, забезпечує механічну стійкість при всіх значеннях параметра навантаження. Величина  $\beta$  є меншою за одиницю (для чистого полімеру  $\beta = 1,05$ ), що призводить до теплової нестійкості. Отримані результати показують, що при всіх значеннях параметра навантаження в стрижні встановлюється зрівноважений тепловий стан, якщо об'ємний вміст наповнювача вищий за 3%. У цьому сенсі об'ємний вміст нановолокон 3% можна назвати критичним для забезпечення теплової стійкості розглянутого стрижня. Підкреслимо, що така поведінка стрижня виникає через залежність  $J''$  від температури. Згідно з рис. 7 критичне напруження  $\sigma_{cr}^*$  при сталому значенні параметра навантаження зростає зі збільшенням об'ємного вмісту нановолокон.

**Висновки.** Досліджено вплив дисипативного розігріву на механічну і теплову стійкість полімерного нанокompозитного елемента конструкції, що перебуває під дією комбінованого статичного та моногармонічного навантаження. Залежні від температури та амплітуди комплексні модулі для нанокompозитного матеріалу з випадково або однонаправлено орієнтованими нановолокнами визначено за допомогою процедури гомогенізації, яка ґрунтується на методі Мори–Танака, при мікро- і макро-непружній поведінці складових. Вивчено вплив об'ємного вмісту наповнювача на теплову і механічну стійкість. Визначено, що у досліджуваному інтервалі значень вмісту нановолокон (до 10% CNT нановолокон) їх об'ємний вміст та орієнтація істотно впливають на еволюцію температури і механічну стійкість внаслідок дисипативного розігріву при комбінованому напруженні стиску і гармонічному навантаженні. У свою чергу, ефект розігріву викликає значне зниження механічної стійкості стрижня, а отже, втрату роботоздатності. Запропонований підхід може бути корисним для розуміння й адекватного опису циклічної поведінки нанокompозитних елементів конструкцій і подальших досліджень в області утомного руйнування з урахуванням ефекту вібророзігріву, зумовленого розсіюванням механічної енергії.

## Резюме

Разработан метод прогнозирования потери работоспособности нанокompозитных элементов конструкций в результате тепловой неустойчивости. В основу метода положена модель моногармонической аппроксимации реакции материала на циклическую нагрузку, амплитудные соотношения между основными переменными и концепция комплексных модулей. Развита методика оценки модулей накопления и потерь компонентов нанокompозита, а также модель учета влияния поверхности контакта волокно–матрица. Разработана модифицированная процедура гомогенизации, основанная на методе Мори–Танака и развитая для получения комплексных модулей нанокompозита со случайной или однонаправленной ориентацией нановолокон. Температурно- и амплитудозависимые комплексные модули использованы для изучения влияния дисипативного разогрева на механическую устойчивость полимерного нанокompозитного стержня, который находится под действием комбинированной статической и моногармонической нагрузок. Исследовано влияние амплитуды нагрузки и объемного содержания нановолокон на тепловую неустойчивость полимерного нанокompозитного стержня.

1. *Katunin A. and Fidali M.* Investigation of dynamic behaviour of laminated composite plates under cyclic loading // *Kompozyty*. – 2011. – **11**, No. 3. – P. 208–213.
2. *Goel A., Chawla K. K., Vaidya U. K., and Chawla N.* Characterization of fatigue behavior of long fire reinforced thermoplastic (LFT) composites // *Mater. Charact.* – 2009. – **60**, No. 6. – P. 537–544.
3. *Москвитин В. В.* Сопrotивление вязкоупругих материалов. – М.: Наука, 1972. – 327 с.
4. *Pisarenko G. S. and Mozharovskii N. S.* Criteria for failure of materials under cyclic thermal loading // *Strength Mater.* – 1969. – **1**, No. 1. – P. 16–21.
5. *Sherstnev V. A. and Yagn Yu. I.* Self-heating and thermal fatigue of caprolon during cyclic compression // *Ibid.* – 1972. – **4**, No. 7. – P. 865–869.
6. *Коваленко А. Д., Карнаухов В. Г.* Уравнения и решения некоторых задач теории вязкоупругих оболочек // *Докл. АН УССР. Сер. А.* – 1967. – № 7. – С. 11–24.
7. *Plekhov O., Uvarov S., and Naimark O.* Theoretical and experimental investigation of the dissipated and stored energy ratio in iron under quasi-static and cyclic loading // *Strength Mater.* – 2008. – **40**, No. 1. – P. 90–93.
8. *Коваленко А. Д., Карнаухов В. Г.* Теплообразование в вязкоупругих оболочках вращения при периодических воздействиях // *Докл. АН УССР. Сер. А.* – 1971. – № 11. – С. 5–11.
9. *Schaperly K. A.* Effect of cyclic loading on the temperature in viscoelastic media with variable properties // *AIAA J.* – 1964. – **2**, No. 5. – P. 827–835.
10. *Karnaikhov V. G. and Senchenkov I. K.* An approximate method for critical thermal analysis // *Prikl. Mekh.* – 1976. – **12**, No. 4. – P. 18–25.
11. *Гуменюк. Б. П., Карнаухов В. Г.* О приближенном расчете критических тепловых состояний в связанных динамических задачах термовязкоупругости // *Докл. АН УССР. Сер. А.* – 1977. – № 10. – С. 905–908.
12. *Сенченков И. К., Карнаухов В. Г., Гуменюк Б. П.* О влиянии вибрационного разогрева на механическую устойчивость вязкоупругого стержня // *Прикл. механика.* – 1979. – № 1. – С. 109–113.
13. *Senchenkov I. K., Zhuk Y. A., and Karnaikhov V. G.* Modeling the thermomechanical behavior of physically nonlinear materials under monoharmonic loading // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, No. 9. – P. 943–969.
14. *Constable J., Williams J. G., and Burns D. J.* Fatigue at cyclic thermal softening of thermoplastics // *J. Mech. Eng. Sci.* – 1970. – **12**, No. 1. – P. 20–29.
15. *Ratner S. B. and Korobov V. I.* Self-heating of polymers under cyclic deformation // *Mech. Polym.* – 1965. – No. 3. – P. 93–100.
16. *Karnaikhov V. G.* Thermomechanics of coupled field in passive and pizoactive inelastic bodies under monoharmonic deformation // *J. Therm. Stresses.* – 2005. – **28**, Nos. 6–7. – P. 783–815.
17. *Qu J.* The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials // *Mech. Mater.* – 1993. – **14**, No. 4. – P. 269–281.
18. *Goldberg R. K.* Computational Simulation of the High Strain Rate Tensile Response of Polymer Matrix Composites // *NASA/TM-2002-211489.* – 2002. – 16 p.
19. *Hashemi M. and Zhuk Y. A.* A procedure for complex moduli determination for polycarbonate plastic under harmonic loading // *Phys. Math. Sci.* – 2015. – **4**. – P. 67–73.

20. Zhuk Y. A. and Hashemi M. Frequency and amplitude dependence of complex moduli of composite material reinforced with nanofibers // J. Phys.-Math. Model. Inform. Technol. – 2016. – **23**. – P. 92–107.
21. Hashemi M. and Zhuk Y. A. Influence of frequency and amplitude of harmonic loading on complex moduli for polymer materials // Bull. KNU. – 2016. – **35**. – P. 53–57.
22. Hill R. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials: I. Elastic behavior // J. Mech. Phys. Sol. – 1964. – **12**, No. 4. – P. 199–212.
23. Esteva M. and Spanos P. D. Effective elastic properties of nanotube reinforced composites with slightly weakened interfaces // J. Mech. Mater. Struct. – 2009. – **4**, No. 5. – P. 887–900.
24. Zhuk Y. A. and Senchenkov I. K. Modelling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic piezoactive layers // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 5. – P. 546–556.
25. Zhuk Y. A. and Senchenkov I. K. Approximate model of thermomechanically coupled inelastic strain cycling // Ibid. – 2003. – **39**, No. 3. – P. 300–306.
26. Qiu Y. and Weng G. J. On the application of Mori-Tanaka's theory involving transversely isotropic spheroidal inclusions // Int. J. Eng. Sci. – 1990. – **28**, No. 11. – P. 1121–1137.
27. Mori T. and Tanaka K. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. – 1973. – No. 21. – P. 571–574.
28. Shi D. L., Feng X. Q., Huang Y., and Hwang K. C. The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites // J. Eng. Mater. Technol. – 2004. – **126**, No. 3. – P. 250–257.
29. Namilae S. and Chandra N. Multiscale model to study the effect of interfaces in carbon nanotube-based composites // Ibid. – 2005. – **127**, No. 2. – P. 222–232.
30. Gilat A., Goldberg R., and Roberts G. Incorporation of the effects of temperature and unloading into the strain rate dependent analysis of polymer matrix materials utilizing a state variable approach // J. Earth Space. – 2006. – No. 4. – P. 1–8.

Поступила 27. 06. 2017