УДК 517.962.2

Г. П. Пелюх, О. А. Сівак

Про періодичні розв'язки систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Одержано умови існування неперервних T-періодичних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено структуру множини їх розв'язків.

Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t)x(m_j t + \Delta_j(t)) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in R = (-\infty, +\infty)$, A, $A_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, — деякі дійсні $(n \times n)$-матриці; $F(t)$ — дійсний вектор розмірності n, $\Delta_j(t)\colon R \to R$, $j = 1, \ldots, k$, m_j, $j = 1, \ldots, k$, — цілі додатні числа. При різних припущеннях такі системи рівнянь були основним об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–6] і наведену в них літературу) і в даний час цілий ряд питань їх теорії досить детально вивчено. Зокрема, якщо $\Delta_j(t) = -j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, елементи матриць $A_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, і вектора $F(t)$ є неперервними T-періодичними функціями, то в [7] отримані достатні умови існування і єдиності неперервного T-періодичного розв'язку такої системи рівнянь і досліджено його властивості. Продовжуючи ці дослідження, в даній статті пропонується один підхід до вивчення неперервних T-періодичних розв'язків системи рівнянь (1) у випадку, коли виконуються умови:

1) $j = 1, \ldots, k$, і вектора $F(t)$ є неперервними T-періодичними функціями;

2) функції $\Delta_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, є неперервними T-періодичними, m_j, $j = 1, \ldots, k$, — деякі цілі додатні числа;

3) $\max\limits_t |A_j(t)| = a_j$, $j = 1, \ldots, k$, $\max\limits_t |F(t)| = M$, $|A| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = a < 1$;

4) $\Delta = \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{k} a_l}{1-a} < 1$.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1–4. Тоді система рівнянь* (1) *має єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $x(t)$ у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні T-періодичні вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (2) в (1), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = A\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t)\sum_{i=0}^{\infty} x_i(m_j t + \Delta_j(t)) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + F(t), \tag{3_0}$$

$$x_i(t+1) = Ax_i(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t)x_{i-1}(m_j t + \Delta_j(t)), \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{3_i}$$

то ряд (2) є формальним розв'язком системи рівнянь (1).

Безпосередньою підстановкою в (3_0) можна переконатися, що ряд

$$x_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1}F(t-j) \tag{4_0}$$

є формальним розв'язком системи рівнянь (3_0). Більше цього, в силу умов 1–4 ряд (4_0) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$|x_0(t)| \leqslant \frac{M}{1-a} = M'. \tag{5_0}$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна показати, що ряди

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1}\left(\sum_{l=1}^{k} A_l(t-j)x_{i-1}(m_l(t-j) + \Delta_l(t-j))\right), \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{4_i}$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які є розв'язками відповідних систем (3_i), $i = 1, 2, \ldots$, і задовольняють умови

$$|x_i(t)| \leqslant M'\Delta^i, \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{5_i}$$

Дійсно, в силу (4_1) і умов 1–4 отримуємо

$$|x_1(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |A|^{j-1}\left(\sum_{l=1}^{k} |A_l(t-j)||x_0(m_l(t-j) + \Delta_l(t-j))|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1}\left(M'\sum_{l=1}^{k} a_l\right) \leqslant M'\frac{\sum\limits_{l=1}^{k} a_l}{1-a} = M'\Delta$$

і, отже, оцінка (5_1) має місце. Припустимо, що вона доведена уже для деякого $i \geqslant 1$ і покажемо її справедливість для $i+1$. Справді, приймаючи до уваги (4_{i+1}), (5_i) і умови теореми, знаходимо

$$|x_{i+1}(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |A|^{j-1}\left(\sum_{l=1}^{k} |A_l(t-j)||x_i(m_l(t-j) + \Delta_l(t-j))|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1}\left(\sum_{l=1}^{k} a_l\right)M'\Delta^i \leqslant M'\Delta^i\frac{\sum\limits_{l=1}^{k} a_l}{1-a} = M'\Delta^{i+1}.$$

Отже, оцінки (5_i) виконуються для всіх $i \geqslant 1$.

Оскільки вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, що визначаються співвідношеннями (4_i), $i = 0, 1, \ldots$, є T-періодичними (в силу умов 1,2), то безпосередньо із (5_i), $i = 0, 1, \ldots$, випливає, що ряд (2) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (1).

Припустимо тепер, що система рівнянь (1) має ще один неперервний T-періодичний розв'язок $y(t)$ такий, що $y(t) \neq x(t)$. Оскільки

$$y(t+1) \equiv Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t) y(m_j t + \Delta_j(t)) + F(t),$$

то приймаючи до уваги умови теореми 1, одержимо

$$|x(t+1) - y(t+1)| \leqslant |A||x(t) - y(t)| + \sum_{j=1}^{k} |A_j(t)||x(m_j t + \Delta_j(t)) - y(m_j t + \Delta_j(t))| \leqslant$$

$$\leqslant \left(a + \sum_{j=1}^{k} a_j \right) \|x(t) - y(t)\|,$$

де $||x(t) - y(t)|| = \max\limits_{t} |x(t) - y(t)|$. Звідси випливає співвідношення

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \left(a + \sum_{j=1}^{k} a_j \right) \|x(t) - y(t)\|,$$

яке, в силу умови 4, може мати місце лише у випадку, коли $y(t) \equiv x(t)$. Отримане протиріччя завершує доведення теореми.

Виконуючи в (1) взаємно-однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ — побудований вище неперервний T-періодичний розв'язок системи (1), дослідження системи рівнянь (1) можна звести до дослідження системи рівнянь

$$y(t+1) = Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t) y(m_j t + \Delta_j(t)).$$

При виконанні умов теореми 1 ця система рівнянь має єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $y(t) \equiv 0$. Тим не менш, при деяких додаткових умовах вона має нескінченно багато неперервних при $t \geqslant 0$ розв'язків. Це ми покажемо (для простоти) у випадку, коли $\Delta_j(t) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, k$, m_j, $j = 1, \ldots, k$, — деякі цілі додатні числа, а матриця A має вигляд $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, де $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Отже, розглянемо систему рівнянь

$$y(t+1) = Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t) y(m_j t) \tag{6}$$

і доведемо, що для неї має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і умови:*

1′) $m_j > 1,\ j = 1, \ldots, k;$

2′) $\widetilde{a}\lambda^m < 1,\ \widetilde{a}\sum\limits_{l=1}^{k} a_l/(1-\widetilde{a}\lambda^m) = \widetilde{\Delta} < 1,$

де $\widetilde{a} = |A^{-1}|$, $\lambda = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$, $m = \min\{m_j, j = 1, \ldots, k\}$. *Тоді система рівнянь* (6) *має сім'ю неперервних при* $t \geqslant 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Легко переконатися, що система рівнянь (6) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{7}$$

якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є неперервними розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Ay_0(t), \tag{8_0}$$

$$y_i(t+1) = Ay_i(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t) y_{i-1}(m_j t), \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{8_i}$$

Використовуючи представлення загального неперервного розв'язку системи (8_0), можна показати, що існує додатна стала $\widetilde{M}$ така, що при всіх $t \geqslant 0$ виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leqslant \widetilde{M}\lambda^t. \tag{9_0}$$

Безпосередньою підстановкою в (8_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна послідовно показати, що ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \left(\sum_{l=1}^{k} A_l(t+j) y_{i-1}(m_l(t+j)) \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{9_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь.

Покажемо тепер, що ряди (9_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких при всіх $i \geqslant 1$, $t \geqslant 0$ виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leqslant \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^i \lambda^{mt}. \tag{10}$$

Дійсно, в силу (9_0) і (9_1) маємо

$$|y_1(t)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \left(\sum_{l=1}^{k} |A_l(t+j)||y_0(m_l(t+j))| \right) \leqslant \widetilde{M}\widetilde{a} \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j \sum_{l=1}^{k} a_l \lambda^{m(t+j)} \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}\widetilde{a} \sum_{l=1}^{k} a_l \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a}\lambda^m)^j \lambda^{mt} = \widetilde{M} \frac{\widetilde{a}\sum\limits_{l=1}^{k} a_l}{1-\widetilde{a}\lambda^m} \lambda^{mt} \leqslant \widetilde{M}\widetilde{\Delta}\lambda^{mt}.$$

Отже, оцінка (10) має місце при $i = 1$. Припустимо, що вона доведена уже для деякого $i \geqslant 1$ і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, в силу (9_{i+1}), (10) $i = 1, 2, \ldots$, маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \left(\sum_{l=1}^{k} |A_l(t+j)|\, |y_i(m_l(t+j))| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^{j+1} \left(\sum_{l=1}^{k} a_l \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^i \lambda^{m(m_l(t+j))} \right) \leqslant \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^i \widetilde{a} \sum_{l=1}^{k} a_l \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a}\lambda^m)^j \lambda^{mt} = \widetilde{M} \widetilde{\Delta}^{i+1} \lambda^{mt}.$$

Отже, оцінки (10) виконуються для всіх $i \geqslant 1$, і ряди (9_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Цим самим, ми довели, що ряд (7) рівномірно збігається при всіх $t \geqslant 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (6) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leqslant \widetilde{M} \frac{1}{1 - \widetilde{\Delta}} \lambda^t. \tag{11}$$

Теорема 2 доведена.

Оскільки $0 < \lambda < 1$, то в силу (11) маємо

$$\lim_{t \to +\infty} |y(t)| = 0. \tag{12}$$

Звідси, з теорем 1, 2 і співвідношення $x(t) = y(t) + \gamma(t)$ безпосередньо випливає, що система рівнянь (1) має сім'ю неперервних при $t \geqslant 0$ розв'язків $x(t) = x(t, \omega(t))$, де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична вектор-функція, які задовольняють умову

$$\lim_{t \to \infty} [x(t) - \gamma(t)] = 0.$$

Робота частково підтримана проектом Ф 25.1/021.

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – **12**, No 2. – P. 242–284.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
3. *Пелюх Г. П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН. – 1994. – **336**, № 4. – С. 451–452.
4. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Диф. уравнения. – 1994. – **30**, № 3. – С. 514–519.
5. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. – 2006. – **73**, № 2. – С. 269–272.
6. *Сівак О. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь із раціональними відхиленнями неперервного аргументу // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 4. – С. 152–157.
7. *Пелюх Г. П., Богай Н. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. – 2005. – № 3. – С. 351–359.

Інститут математики НАН України, Київ
НТУУ "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 03.12.2008

G. P. Pelyukh, O. A. Sivak

About periodic solutions to systems of linear functional-difference equations

The conditions for the existence of continuous T-periodic solutions to systems of linear functional-difference equations are established, and the structure of the set of their solutions is studied.