

## Оценка уязвимости нагруженных тонкостенных оболочек при импульсном внешнем воздействии

Н. И. Ободан, В. Я. Адлуцкий, В. А. Громов<sup>1</sup>

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепр, Украина

<sup>1</sup> stroller@rambler.ru

*Рассматривается задача оценки уязвимости тонкостенных оболочек при импульсном воздействии как обратная задача теории бифуркаций с использованием явления роста и насыщения уровня перемещений в предбифуркационный период. С помощью расчетных временных рядов осуществляется нейросетевое прогнозирование поведения тонкостенной системы за время, которое меньше времени прогрессирующего разрушения.*

**Ключевые слова:** тонкостенная оболочка, уязвимость, импульсное воздействие, геометрически и физически нелинейное динамическое поведение, бифуркация, временные ряды, нейронная сеть.

**Введение.** Робастное проектирование тонкостенных конструкций предполагает создание систем, толерантных к возможным внешним ударным возмущениям, таким как механическое или лазерное воздействие, попадание снаряда и т.д.

Анализ отечественных и зарубежных литературных источников показывает, что все они посвящены исследованию живучести конструкций в рамках концепции робастного проектирования (robustness, life-safety concept), которая предполагает наличие толерантности к неизвестным внешним воздействиям, не предусмотренным проектными условиями функционирования конструкций, а также к полученным в процессе эксплуатации повреждениям. Такой подход реализуется путем исследования закритического поведения тонкостенных элементов, когда в закритической области существуют равновесные конфигурации, переход к которым связан с аварийными воздействиями.

Поскольку скорость процессов, протекающих в нагруженных тонкостенных системах, довольно высокая, а сами системы могут испытывать резкие изменения напряженно-деформированного состояния (НДС) вследствие внешнего возмущения, в последнее время появилась необходимость создания методов быстрой оценки (rapid assessment) живучести систем данного класса. В ряде работ изучается вычислительная сложность общепринятого в инженерной практике метода конечных элементов (МКЭ) и предлагается “быстрая” методика оценки живучести (в частности, метод “идеальных структурных элементов” для тонких пластин [1]).

Другое направление исследований связано с построением классификации инженерных систем, устойчивых или чувствительных к возмущениям, а также с созданием критерия различения и методики робастного проектирования устойчивых систем [2]. В работе [3] проводился анализ прогрессирующего разрушения систем, составленных из балок коробчатого сечения, и предлагались различные механизмы возникновения указанного разрушения. Важным, особенно для тонкостенных оболочечных систем, является установление связи между указанными механизмами и разными вариантами потери устойчивости. В качестве примера можно привести работу [1], в которой анализировались формы потери устойчивости тонкостенных оболочечных систем квадратного сечения при осевом сжатии.

Кроме того, современные концепции оценки работоспособности деформируемых систем по “текущему” состоянию (допустимо наличие дефектов в элементах

конструкции при эксплуатации до исчерпания ресурса) и по допустимым дефектам (изготовление конструкций с допустимыми дефектами) требуют создания моделей и методов идентификации указанных дефектов на таком уровне определенности, чтобы на основе этой информации, а также с помощью моделей и методов решения задач о НДС (прямая задача) можно было бы устанавливать реальную работоспособность системы в течение фиксированного промежутка времени.

**Постановка задачи.** Анализ известных исследований свидетельствует об отсутствии таковых, посвященных оценке уязвимости тонкостенных систем – потери функциональных свойств в заданное время прогрессирующего разрушения. Для обеспечения этого необходимо проанализировать динамическое поведение тонкостенной системы, предварительно нагруженной стационарной проектной нагрузкой, с целью определения характера ее поведения после динамического воздействия. Такой подход позволяет предсказать возможность адекватного функционирования системы после аварийного воздействия, причем за время, которое меньше времени исчерпания несущей способности [4–6].

Таким образом, необходимо рассмотреть поведение тонкостенного элемента конструкции, находящегося под действием номинальных – преимущественно сжимающих нагрузок, при локальном импульсном воздействии. Нагружение оболочки таково, что при определенном значении нагрузки наблюдается потеря устойчивости, при этом для соответствующей нелинейной краевой задачи имеет место особая точка типа предельной точки [7]. При локальном импульсном воздействии на оболочку, находящуюся под действием такой нагрузки, возможна реализация двух типов поведения:

колебания оболочки около статического положения равновесия с малой амплитудой;

колебания оболочки около статического положения равновесия с нарастающей амплитудой при нагрузке, находящейся в предбифуркационной области. В этом случае имеет место разрушение конструкции.

Важным свойством нелинейных решений является их чувствительность к вариации внешних воздействий, когда в окрестности исходного состояния возможны различные типы поведения системы [7], причем вследствие близости по евклидовой норме различных решений в процессе деформирования может осуществляться “перескок” с одной ветви решения на другую. Отсюда вытекают следующие задачи:

Из представленных данных следует, что возможна реализация различных форм деформирования, причем вследствие близости по евклидовой норме разных решений в процессе деформирования возможен “перескок” с одной ветви решения на другую. Отсюда вытекают такие задачи:

1) прогноз возможного варианта дальнейшего поведения системы на основании информации о ее ретроспективном поведении за время, которое меньше времени реализации критической формы;

2) определение реальных критических нагрузок, соответствующих наблюдаемому ретроспективному поведению системы.

При постановке задачи приняты следующие допущения:

аварийное воздействие может быть как единичным, так и многократным;

система деформируется в течение “медленного” времени, если имеет место нелинейное стационарное упругое деформирование, и “быстрого” времени, если происходит аварийное воздействие с последующим наступлением прогрессирующего разрушения в условиях упругопластического деформирования;

критерием уязвимости (понятие, обратное живучести) является возможность реализации критической формы с заданным уровнем деформаций, отличающейся от исходной докритической. При этом время принятия решения об уязвимости должно быть существенно меньше времени реализации критической формы.

Таким образом, постановка рассматриваемой задачи включает:  
 построение математических моделей поведения тонкостенной конструкции в стационарном состоянии;  
 изучение процесса ее деформирования после аварийного воздействия с целью проверки реализации критерия уязвимости.

**Математическая модель.** На области  $\Omega = \{ \{x, y\} \in R^2: 0 \leq x \leq L, |y| \leq \pi R \}$  рассматривается круговая цилиндрическая оболочка длиной  $L$ , радиусом  $R$  и толщиной  $h$ , находящаяся под действием стационарного нагружения (внешнее давление, осевое сжатие). Поведение оболочки описывается на двух временных интервалах.

1. При стационарном нагружении в предположении малости растяжений и сдвигов и конечности углов поворота используется квазистатическая нелинейная модель теории тонких пологих оболочек, описываемая уравнениями

$$L(U_0(X)) = \lambda Q(X), \quad X \equiv \{x, y\} \quad (1)$$

с заданными граничными условиями

$$G(U_0(X))|_{X \in \Gamma} = 0,$$

где  $L(\cdot)$  – нелинейный оператор теории пологих оболочек;  $U_0(X)$  – вектор стационарных перемещений в направлении осей  $x, y, z$ ,  $U_0(X) = \{u_0(X), v_0(X), w_0(X)\}$ ;  $Q(X)$  – вектор внешней нагрузки,  $Q(X) = \{q_x(X), q_y(X), q_z(X)\}$ ;  $\lambda$  – параметр нагружения;  $G(\cdot)$  – оператор граничных условий на торцах оболочки  $\Gamma$ .

Принята гипотеза об упругом деформировании. Нелинейные геометрические соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right]; \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{w_0}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_0}{\partial y} \right)^2,$$

где  $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{yy}^0$  – деформации срединной поверхности. В момент начала импульсного воздействия имеем  $\lambda = \tilde{\lambda}$ .

2. Импульсное воздействие моделируется путем введения быстрого времени  $t$  и использования уравнений, описывающих динамическое поведение оболочки:

$$\rho \ddot{U}(X, t) + L(U(X, t)) + L_1(U_0(X), U(X, t)) = \frac{P(X)}{h} \Phi(t, \tau), \quad (2)$$

$$X \in \Omega, \quad T_0 \leq t \leq T_{\max}$$

при граничных

$$G(U(X, t))|_{X \in \Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T_{\max}$$

и начальных условиях

$$U(X, 0) = U_0(X), \quad \dot{U}(X, 0) = 0, \quad X \in \Omega,$$

где  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $U(X, t)$  – вектор перемещений;  $L_1(\cdot)$  – линейный оператор, в который функции состояния  $U_0(X)$  входят параметрически;  $P(X), X \in \Omega_1$  – вектор, описывающий пространственный профиль импульсного воздействия,

$$P(X) = \begin{cases} \{p_x(X), p_y(X), p_z(X)\}, & X \in \Omega_1; \\ 0, & X \in \Omega \setminus \Omega_1, \end{cases}$$

$\Omega_1$  – область приложения импульсного воздействия;  $\Phi(t, \tau)$  – функция, описывающая временной профиль импульсного воздействия;  $T_0$  – момент начала импульсного воздействия;  $\tau$  – время импульсного воздействия;  $[T_0, T_{\max}]$  – интервал времени наблюдения за динамическим поведением оболочки.

В качестве физических соотношений используется модель линейного упрочнения, в которой модуль упругости определяется как

$$E = \begin{cases} E_0, & \sigma_n \leq \sigma_T; \\ E_T, & \sigma_n > \sigma_T, \end{cases}$$

где  $E_0$  – модуль Юнга;  $E_T$  – касательный модуль;  $\sigma_n$  – интенсивность напряжений;  $\sigma_T$  – предел текучести. Процесс разгрузки осуществляется по упругому закону с модулем упругости  $E_0$ .

Уравнения (1) решаются с использованием МКЭ в сочетании с методом Ньютона–Рафсона продолжения по параметру  $\lambda$  [8]. Решение (2) по МКЭ сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\tilde{U}}(t) + K(\tilde{U}_0, \tilde{U}(t)) = \tilde{P}\Phi(t, \tau), \tag{3}$$

где  $M$  – приведенная матрица масс;  $K(\tilde{U}_0, \tilde{U}(t))$  – переменная матрица жесткости;  $\tilde{P}$  – приведенная нагрузка;  $\tilde{U}(t), \tilde{U}_0$  – векторы узловых значений функций перемещений, используемые в конечноэлементной аппроксимации.

Решение системы (3) осуществляется методом Ньюмарка [8]. Конечноэлементные расчеты проводились с использованием пакета COSMOS/M 2.6.

Анализ уязвимости рассматриваемой системы проводится на основе следующих предположений:

поведение системы после импульсного воздействия описывается процессом, суть которого состоит в реализации различных форм деформирования, соответствующих близким по норме закритическим решениям, и характеризуется наблюдаемыми значениями  $w_{ik}$  на фиксированном временном интервале  $T_j$  аналогично [9, 10];

уровень точки бифуркации может быть определен как соответствующий точке насыщения величины

$$\sigma_j^2 = \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \frac{(w_{ik} - w_{i0})^2}{T_k},$$

где  $w_{ik}$  – значение нормального перемещения в  $i$ -м узле конечноэлементной сетки в момент  $T_k = T_0 + k\Delta t$ ,  $k = \overline{1, j}$ ;  $N$  – количество узлов конечноэлементной сетки, используемых при вычислении  $\sigma_j^2$ ;  $\Delta t$  – временной шаг модели.

Для решения обратной задачи теории бифуркации – прогнозирования значения параметра нагружения  $\tilde{\lambda}$  и соответствующего внешнего воздействия  $F$  по поведению системы на интервале  $T_0 \leq t \leq T_{\max}$  – используется нейронная сеть. В качестве входа сети задается вектор  $\{\sigma_j^2, j = \overline{1, J}\}$ , полученный как результат наблюдений за перемещениями  $w_{ij}$  ( $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, J}$ ) оболочки, в качестве выхода – вектор  $\{\tilde{\lambda}, F, P\}$ ,

где  $P = 1$  в случае потери устойчивости,  $P = -1$  в случае колебаний;  $J$  – номер временного интервала, соответствующего  $[T_0, T_{\max}]$ .

Используется полносвязный  $m$ -слойный персептрон, количество слоев определяется в ходе вычислительного эксперимента по достижению заданной точности. Для обучения сети используется заданная область значений  $\{\tilde{\lambda}, F\} \in W$ ,  $W = \{\underline{\lambda} \leq \tilde{\lambda} \leq \bar{\lambda}, \underline{F} \leq F \leq \bar{F}\}$  и временные ряды, которые получены в результате расчетов, выполненных для соответствующих значений  $\tilde{\lambda}$  и  $F$ , представленные как  $\sigma_j^2(T_j, \tilde{\lambda}, F)$ .

При анализе поведения тонкостенной оболочки при импульсном воздействии учитывались следующие процедуры:

вычисление текущего значения  $\sigma_j^2(T_j)$  по результатам наблюдений;

фиксация значения  $t_1$  при выполнении условия

$$\left| \frac{\sigma_{j+2}^2 - \sigma_{j+1}^2}{\sigma_{j+1}^2 - \sigma_j^2} \right| \gg 1, \quad j \geq 1;$$

формирование входного вектора нейронной сети по результатам наблюдений; прогноз значений  $\tilde{\lambda}, F, P$  с помощью предварительно обученной нейронной сети.

**Численные результаты.** Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с параметрами  $L = 0,64$  м,  $R = 0,16$  м,  $h = 10^{-3}$  м,  $E_0 = 200$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_T = 250$  МПа,  $E_T = 100$  ГПа,  $\rho = 7,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, находящаяся под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления ( $q_x = q_y = 0$ ,  $q_z = 100$  кПа). На торцах оболочки выполняются условия шарнирного опирания с возможностью свободного смещения в направлении оси  $x$  симметрично относительно плоскости  $x = L/2$ . Теоретическое бифуркационное значение параметра нагружения  $\lambda_{кр} = 1,52$ . Импульсное воздействие осуществляется в области  $\Omega_1 = \{x, y\} \in R^2: |x - L/2| \leq L/40, |y| \leq \pi R/35\}$  путем приложения нагрузки  $p_x(X) = p_y(X) = 0$ ,  $p_z(X) = F/S$  за время  $\tau = 0,002$  с, где  $F$  – амплитуда равнодействующей нормальной нагрузки;  $S$  – площадь области  $\Omega_1$ ;  $T_0 = 0,0025$  с;  $T_{\max} = 0,05$  с;

$$\Phi(t, t) = \begin{cases} 4(t - T_0)/\tau, & T_0 \leq t < T_0 + 0,25\tau, \\ 1, & T_0 + 0,25\tau \leq t \leq T_0 + 0,75\tau, \\ -4(t - T_0 - \tau)/\tau, & T_0 + 0,75\tau < t \leq T_0 + \tau, \\ 0, & t > T_0 + \tau. \end{cases}$$

Результаты расчетов показывают, что для  $0,5 \leq \tilde{\lambda}/\lambda_{кр} \leq 1$  при импульсном воздействии с амплитудой  $F \geq F_{кр}(\tilde{\lambda}_{кр})$  может наступить потеря устойчивости оболочки. Конечная форма, соответствующая моменту потери устойчивости, зависит от уровня нагрузок  $\tilde{\lambda}$  и  $F$ . На рис. 1 приведена кривая  $F_{кр}(\tilde{\lambda}_{кр})$ , отделяющая область потери устойчивости от области колебаний. В случае если  $\tilde{\lambda} < \tilde{\lambda}_{кр}$ ,  $F < F_{кр}(\tilde{\lambda}_{кр})$ , в результате импульсного воздействия происходят малые колебания оболочки по собственным формам, близким к закритическим формам [7], без потери устойчивости. При  $0 \leq \tilde{\lambda}/\lambda_{кр} < 0,5$  по мере увеличения амплитуды импульсного воздействия  $F$  оболочка испытывает все возрастающее пластическое деформирование преимущественно в зоне импульсного воздействия, где образуется локальная вмятина. При этом вследствие диссипации энергии в пластической зоне колебания имеют затухающий харак-

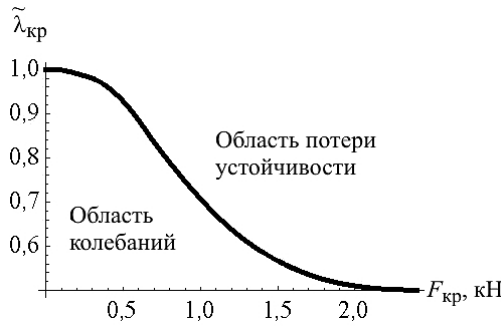


Рис. 1. Кривая  $F_{кр}(\tilde{\lambda}_{кр})$ , отделяющая область потери устойчивости от области колебаний.

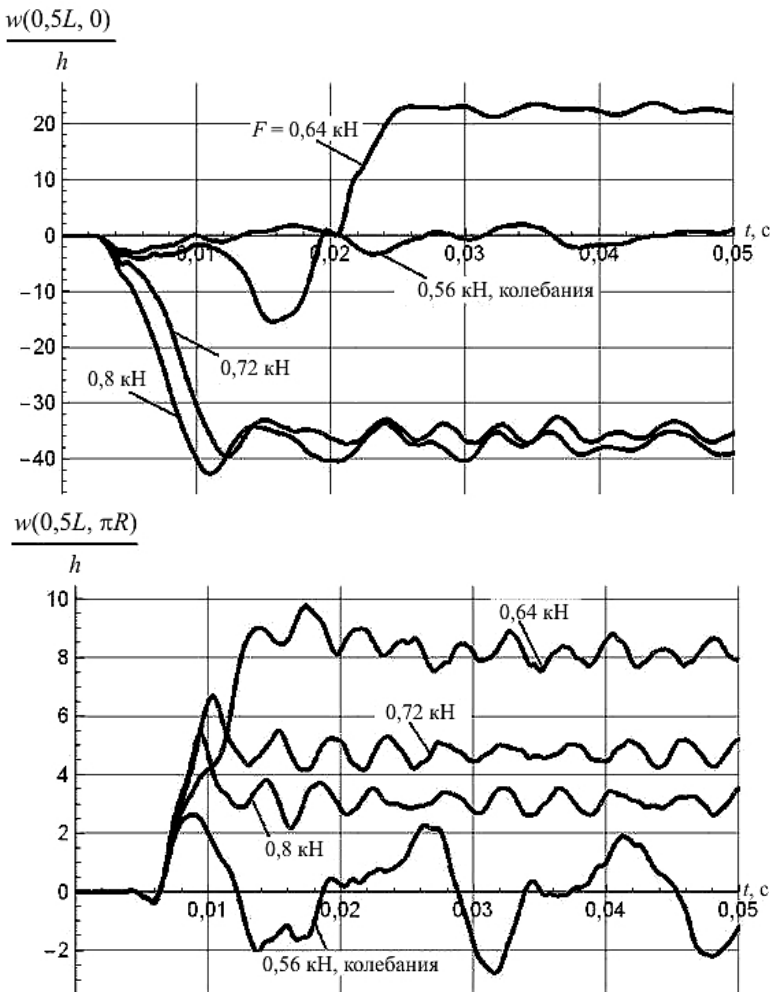


Рис. 2. Перемещения оболочки при импульсном воздействии в критической зоне значений  $F$  при  $\tilde{\lambda} = 0,9\lambda_{кр}$ .

тер. Затухание колебаний наблюдается также после потери устойчивости, поскольку она сопровождается значительными пластическими деформациями. Следует отметить качественное совпадение приведенных на рис. 1 результатов с данными экспериментальных исследований [11].

$t, c$ $F, кН$	0,0030	0,0073	0,012	0,016	0,020	0,024	0,029	0,033	0,037	0,041	0,046	0,050
0,56												
0,64												
0,72												
0,80												

Рис. 3. Формы деформирования оболочки во времени в сечении  $x = 0,5L$  при  $\tilde{\lambda} = 0,9\lambda_{кр}$ .

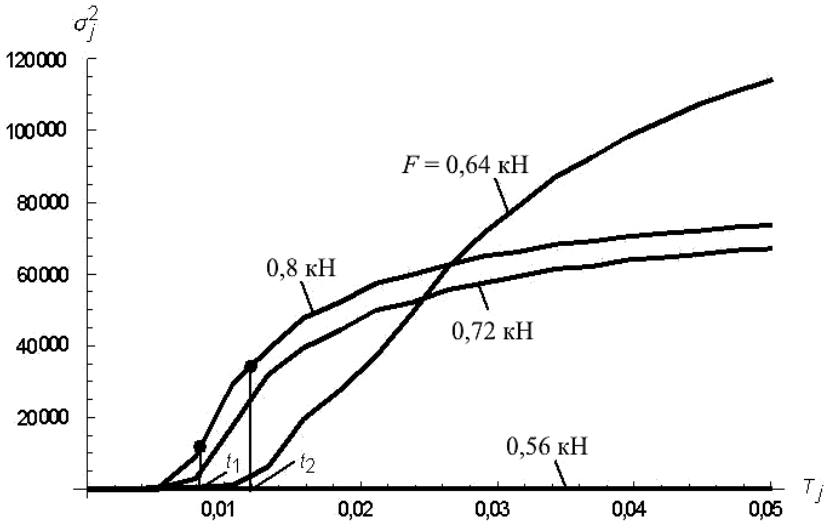


Рис. 4. Зависимости  $\sigma_j^2(T_j)$  при  $\tilde{\lambda} = 0,9\lambda_{кр}$  и значениях  $F$ , находящихся в критической зоне.

На рис. 2 представлены результаты динамического поведения оболочки при импульсном воздействии в критической зоне значений  $F$  при  $\tilde{\lambda} = 0,9\lambda_{кр}$ , на рис. 3 – соответствующие нормированные формы деформирования оболочки во времени в сечении  $x = 0,5L$ . Из рис. 2, 3 следует, что в случае колебаний около положения равновесия наблюдается хаотическая смена форм, близких к закритическим, а в случае прогрессирующего разрушения (потеря устойчивости) – последовательная реализация форм аналогично [7].

На рис. 4 приведены характерные зависимости  $\sigma_j^2(T_j)$ , вычисленные при  $N = 70$ ,  $\Delta t = 0,002375$  с,  $j = 20$  для  $\tilde{\lambda} = 0,9\lambda_{кр}$  и значений  $F$ , находящихся в критической зоне. В качестве примера для случая  $F = 0,8$  кН приведено прогнозное значение  $t_1$ . Здесь для сравнения дано значение момента времени реальной потери устойчивости  $t_2$ , соответствующее на рис. 2 максимальному значению прогиба в центре области импульсного воздействия. Очевидно, что  $t_1 < t_2$ .

Таким образом, фиксируя момент времени, в который касательная к кривой  $\sigma_j^2(T_j)$  существенно изменяет свое направление, можно прогнозировать дальнейшее поведение системы.

**Примеры нейросетевой идентификации нагрузок и прогноза поведения оболочки при импульсном воздействии**

Характеристика	Расчет	Нейронная сеть
$\tilde{\lambda} / \lambda_{кр}$	0,40	0,44
	0,60	0,63
	0,80	0,76
	0,90	0,85
$F$ , кН	1,50	1,54
	2,00	2,05
	1,00	1,07
	1,00	0,96
$P$	-1	-1
	1	1
	1	1
	1	1

Примеры идентификации нагрузок  $\tilde{\lambda}$  и амплитуд воздействия  $F$  в сравнении с их расчетными значениями представлены в таблице.

### Выводы

1. Задача определения уязвимости тонкостенных систем по результатам мониторинга за время, которое меньше времени прогрессирующего разрушения, может быть решена как обратная задача теории бифуркаций на основании явления роста и насыщения уровня перемещений в предбифуркационный период.

2. С помощью полученных результатов можно создавать системы диагностики, обеспечивающие безопасность функционирования тонкостенных систем.

3. Использование расчетных временных рядов для обучения нейронной сети позволяет реализовать в системе диагностики модуль прогноза поведения тонкостенной системы.

### Резюме

Розглядається задача оцінки уразливості тонкостінних систем при імпульсному впливі як зворотна задача теорії бифуркацій з використанням явища росту і насичення рівня переміщень у передбифуркаційний період. За допомогою розрахункових часових рядів здійснюється нейросітьове прогнозування поведінки тонкостінної системи за час, котрий менший, ніж час прогресуючого руйнування.

1. *Song J., Zhou Y., and Guo F.* A relationship between progressive collapse and initial buckling for tubular structures under axial loading // *Int. J. Mech. Sci.* – 2013. – **75**. – P. 200–211.
2. *Underwood J. M., Sobey A. J., Blake J. I. R., and Shenoj R. A.* Ultimate collapse strength assessment of damaged steel-plated structures // *Eng. Struct.* – 2012. – **38**. – P. 1–10.
3. *Kitarovic S. and Zanic V.* Approximate approach to progressive collapse analysis of the monotonous thin-walled structures in vertical bending // *Mar. Struct.* – 2014. – **39**. – P. 255–286.



4. Кудишин Ю. И., Дробот Д. Ю. Живучесть конструкций в аварийных ситуациях // Металлические здания. – 2008. – Ч. 1, № 4 (8). – С. 20–22.
5. Кудишин Ю. И., Дробот Д. Ю. Живучесть конструкций в аварийных ситуациях // Там же. – Ч. 2, № 5 (9). – С. 21–23.
6. Lee M. C. W., Mikulik Z., Kelly D. W., et al. Robust design – a concept for imperfection insensitive composite structures // Compos. Struct. – 2010. – **92**. – P. 1469–1477.
7. Obodan N. I., Lebedev O. G., and Gromov V. A. Nonlinear Behaviour and Stability of Thin-Walled Shells. – Dordrecht: Springer, 2013. – 179 p.
8. Bathe K.-J. Finite Element Procedures. – Prentice-Hall, 1996. – 1038 p.
9. Зульнукаров М.-Г. М., Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В. Обратная задача теории бифуркаций в динамических системах с шумом. – М., 2005. – 39 с. (Препринт: Ин-т прикладной математики имени М. В. Келдыша).
10. Juel A., Darbyshire A. G., and Mullin T. The effect of noise on pitchfork and Hopf bifurcations // Proc. Roy. Soc. A. – 1997.– **453**. – P. 2627–2647.
11. Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Прокопало Е. Ф. О закритических формах равновесия цилиндрических оболочек, нагруженных внешним давлением // Докл. АН СССР. – 1975. – **222**, № 3. – С. 548–550.

Поступила 02. 03. 2016