

## Развитие расчетной модели для описания кинетики усталостного повреждения материалов на основе деформационного подхода

Г. В. Цыбанев, А. И. Новиков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Проанализированы экспериментальные данные по неупругим циклическим деформациям различных металлических материалов для установления закономерностей их изменения в процессе циклического нагружения. Выделены группы материалов с подобной кинетикой неупругого деформирования и предложены аналитические зависимости для их описания. Характер изменения неупругих деформаций при усталости материалов обуславливается процессами их упрочнения–разупрочнения, для описания которых предложена расчетная модель поциклового изменения циклического предела текучести. Использование предложенной модели позволяет описать неупругое деформирование материалов и их повреждение в процессе усталости.*

**Ключевые слова:** математическая модель, процессы упрочнения–разупрочнения, усталостное повреждение, долговечность, кинетика неупругих деформаций, исчерпание пластичности.

**Введение.** Многочисленные исследования неупругих циклических деформаций, демпфирующих свойств, а также усталостной долговечности металлических материалов свидетельствуют о наличии взаимосвязи между ними. Весомым подтверждением этого является доказанное и широко используемое в исследованиях и практике оценки усталостной долговечности материалов уравнение Коффина–Мэнсона [1–4]. В основном это уравнение применяется в области малоциклового усталости, где значения пластических деформаций достаточно высокие, а их определение в процессе испытаний на усталость не представляет особых трудностей. В работах научной школы академика В. Т. Трошенко было показано, что аналогичная зависимость может быть получена и для области многоциклового усталости, где уровень неупругих деформаций весьма низкий ( $\varepsilon_{ine} \approx 10^{-5} \dots 10^{-6}$  отн. ед. деформации) [5–9].

Кроме того, неупругие деформации чаще всего изменяются с увеличением числа циклов нагружения с проявлением при этом циклического упрочнения, разупрочнения, стабилизации деформирования или совместно этих процессов на различных стадиях деградации материала. Тем не менее в отмеченных выше деформационных критериях предельного состояния и описывающих их уравнения используются некоторые стабилизированные уровни неупругих (при многоцикловом нагружении) или пластических (при малоцикловом) деформаций. С учетом этого в работе предлагается развитие модели упрочнения–разупрочнения, основанной на теориях Гафа–Орована–Афанасьева [10–12] и позволяющей учитывать указанные процессы деградации свойств материалов под воздействием циклической нагрузки, а также описывать кинетику процесса усталости и достижение предельного состояния (разрушения) материала на разных уровнях нагружения, включая их эксплуатационную нестабильность. Перспективный аспект такого представления данных отмечен в работах [13–15], в которых показана возможность использования стадийности неупругого циклического деформирования для определения долговечности на стадиях зарождения и роста усталостной трещины. В проблеме прогнозирования циклических наработок до наступления стадий инициирования (nucleation) и зарождения (initiation) усталостных трещин остается много вопросов, решение которых требует разработки соответст-

вующих критериев, связанных с интенсивностью изменения неупругих деформаций в процессе циклического нагружения. Авторами настоящей работы проанализированы экспериментальные результаты многолетних исследований усталости и неупругости различных материалов [5, 16–20]. На основе анализа полученных данных предлагается модель учета кинетики неупругих циклических деформаций для оценки кинетики деградации циклических свойств материалов и стадий усталости на разных уровнях амплитуды нагружения. Модель доработана по сравнению с представленными ранее [21–23] версиями.

**Основные уравнения модели.** Модель предельного исчерпания циклической пластичности (ПИЦП) основана на использовании эффекта изменения неупругой деформации (НД) или петли гистерезиса (упрочнение или разупрочнение материалов) в процессе циклического нагружения [5–9]. Входные данные для модели – кривые усталости в силовых и деформационных координатах при симметричном растяжении–сжатии, а также экспериментальная кинетика неупругих деформаций и стандартные статические характеристики.

Аналитическое изложение разработанной модели основывается на расчетном подходе, предложенном Н. Н. Афанасьевым [12], с применением деформационной схемы упрочнения Орована [10]. Эта модель с учетом новых предположений и принятием других исходных данных адаптирована к области многоциклового усталости.

Для описания процесса упрочнения–разупрочнения материала, который выражается в изменении предела циклической текучести (ПЦТ), введем в рассмотрение функцию исчерпания пластичности.

Согласно предлагаемой модели ПИЦП неупругое циклическое деформирование материалов происходит при их упрочнении или разупрочнении вследствие изменения предела циклической текучести в каждом полупериоде нагружения. На рис. 1 представлена схема изменения предела циклической текучести в течение полупериода в соответствии с данной моделью.

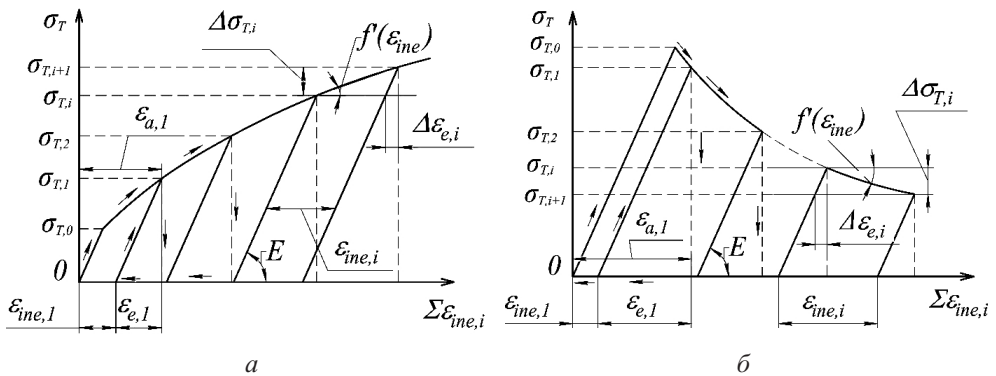


Рис. 1. Схема изменения предела циклической текучести при упрочнении (а) и разупрочнении (б).

Текущее значение ПЦТ на  $(i+1)$ -м полупериоде через текущее значение первой производной неопределенного аналитического уравнения диаграммы циклического исчерпания пластичности –  $(\partial f(\epsilon_{ine})/\partial \epsilon_{ine})|_{\epsilon_{ine,i}}$  запишем так:

$$\sigma_{T,i+1} = \sigma_{T,i} \pm \left. \frac{\partial f(\epsilon_{ine})}{\partial \epsilon_{ine}} \right|_{\epsilon_{ine,i}} (\epsilon_{ine,i} \pm \Delta \epsilon_{e,i}), \quad (1)$$

где  $\sigma_{T,i+1}$ ,  $\sigma_{T,i}$  – ПЦТ в  $(i+1)$ - и  $i$ -м полуцикле нагружения соответственно, причем  $i \in 0, \dots, 2N$ ;  $N$  – число циклов до разрушения при заданной амплитуде напряжения  $\sigma_a$ ;  $f(\varepsilon_{ine})$  – функция исчерпания пластичности;  $\varepsilon_{ine}$ ,  $\varepsilon_{ine,i}$  – амплитуда неупругой деформации и ее значение в  $i$ -м полуцикле нагружения;  $\Delta\varepsilon_{e,i}$  – дополнительная упругая деформация в  $(i+1)$ -м полуцикле нагружения.

Очевидно, что прирост предела текучести в процессе наработки от  $i$ -го полуцикла нагружения до  $(i+1)$ -го выразится как:

$$\Delta\sigma_{T,i} = \sigma_{T,i+1} - \sigma_{T,i}, \quad (2)$$

где  $\Delta\sigma_{T,i}$  – прирост ПЦТ в процессе наработки от  $i$ -го полуцикла до  $(i+1)$ -го.

Тогда согласно рис. 1 дополнительное значение упругой деформации в  $(i+1)$ -м полуцикле нагружения определим следующим образом:

$$\Delta\varepsilon_{e,i} = \frac{\Delta\sigma_{T,i}}{E}, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости первого рода.

Для определения частной производной в зависимости (1) используем постулат модели Афанасьева [12] о зависимости неупругой деформации от предела циклической текучести:

$$\frac{\partial f(\varepsilon_{ine})}{\partial \varepsilon_{ine}} = \frac{df(\varepsilon_{ine})}{d\varepsilon_{ine}} \left( 1 \pm \frac{\partial f(\varepsilon_{ine})}{\partial \varepsilon_{ine}} \right). \quad (4)$$

Уравнение (1) с учетом (2)–(4) примет вид

$$\sigma_{T,i+1} = \sigma_{T,i} + \frac{df(\varepsilon_{ine})}{d\varepsilon_{ine}} \left( \pm 1 - \frac{df(\varepsilon_{ine})}{d\varepsilon_{ine}} \right)^{-1} \Bigg|_{\varepsilon_{ine,i}} \varepsilon_{ine,i}. \quad (5)$$

Зависимость (5) представляет собой уравнение для определения прироста ПЦТ в каждом полуцикле нагружения в рекуррентно-итерационной форме.

Поскольку прирост пластической деформации за полуцикл в условиях многоциклового нагружения незначителен, заменив дискретные значения переменных величин скалярами и перейдя к дифференциалу, прирост предела текучести для большого числа полуциклов нагружения запишем в виде

$$\frac{d\sigma_T}{dn} = \frac{df(\varepsilon_{ine})}{d\varepsilon_{ine}} \left( \pm 1 - \frac{df(\varepsilon_{ine})}{d\varepsilon_{ine}} \right)^{-1} \Bigg|_{\varepsilon_{ine,i}} \varepsilon_{ine,i}, \quad (6)$$

где  $d\sigma_T$  – прирост предела текучести;  $dn$  – прирост полуциклов нагружения.

Начальные условия дифференциального уравнения записаны как:

$$\sigma_T \Big|_{n=0} = \sigma_{T,0}; \quad \sigma_T \Big|_{n=2N} = \sigma_{T,cr}, \quad (7)$$

где  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{T,0}$ ,  $\sigma_{T,cr}$  – текущее, исходное и критическое значения ПЦТ соответственно.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (6) с учетом (7), получим уравнение кривой усталости, составленное для предельного состояния при циклическом нагружении:

$$N = \frac{1}{2} \int_{\sigma_{T,0}}^{\sigma_{T,cr}} \left( \pm \left( \frac{df(\varepsilon_{ine})}{d\varepsilon_{ine}} \right)^{-1} - 1 \right) \frac{d\sigma_T}{\varepsilon_{ine}}. \quad (8)$$

**Модификация диаграммы циклического деформирования.** В расчетах напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций при переменных нагрузках используются диаграммы циклического деформирования (ДЦД), полученные по стабилизированным значениям НДС. Однако это не позволяет учитывать кинетику НДС, обусловленную изменением НДС при увеличении числа циклов нагружения, что влияет на погрешность расчета долговечности. Для описания ДЦД, учитывающей накопление усталостных повреждений, используется ДЦД на стадии стабилизации деформаций с модифицированной частью, которая отвечает за учет накопления усталостных повреждений и изменение НДС вследствие исчерпания пластичности:

$$\varepsilon_a(\sigma_a, D_\varepsilon) = \varepsilon_e(\sigma_a) + \varepsilon_{ine}(\sigma_a, D_\varepsilon), \quad (9)$$

где  $\varepsilon_a(\sigma_a, D_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon_e(\sigma_a)$ ,  $\varepsilon_{ine}(\sigma_a, D_\varepsilon)$  – функции, которые описывают амплитуду полной, упругой и неупругой составляющих ДЦД соответственно.

Полагаем, что изменение размаха НДС зависит не только от приложенной амплитуды нагружения, но и от повреждения материала в результате наработки:

$$\varepsilon_{ine}(\sigma_a, D_\varepsilon) = \varepsilon_{ine,s}(\sigma_a) f(\sigma_a, D_\varepsilon), \quad (10)$$

где  $\varepsilon_{ine,s}(\sigma_a)$  – функция НДС от  $\sigma_a$  на стадии стабилизации;  $f(\sigma_a, D_\varepsilon)$  – функция повреждения, которая учитывает изменение НДС при наработке.

Для описания функции НДС на стадии стабилизации использована пластическая составляющая уравнения Осгуда–Рамберга:

$$\varepsilon_{ine,s}(\sigma_a) = \left( \frac{\sigma_a}{K} \right)^{1/m}, \quad (11)$$

где  $K$ ,  $m$  – коэффициенты на стадии стабилизации НДС.

На основании проведенного анализа НДС принимаем функцию  $f(\sigma_a, D_\varepsilon)$  как:

$$f(\sigma_a, D_\varepsilon) = L_0(\sigma_a) + D_\varepsilon (L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a)); \quad (12)$$

$$L_0(\sigma_a) = L_{0,0} + \frac{L_{0,cr} - L_{0,0}}{\sigma_{cr} - \sigma_{-1}} (\sigma_a - \sigma_{-1}); \quad (13)$$

$$L_{cr}(\sigma_a) = L_{cr,0} + \frac{L_{cr,cr} - L_{cr,0}}{\sigma_{cr} - \sigma_{-1}} (\sigma_a - \sigma_{-1}),$$

где  $L_0(\sigma_a)$ ,  $L_{cr}(\sigma_a)$  – единичные функции относительной неупругой деформации;  $\sigma_{cr}$  – критическое напряжение (согласно В. С. Ивановой);  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости при симметричном цикле;  $L_{0,0}$ ,  $L_{0,cr}$ ,  $L_{cr,0}$ ,  $L_{cr,cr}$  – значения НДС на начальной

и конечной стадиях нагружения, отнесенные к ее среднему значению при  $\sigma_{-1}$  и  $\sigma_{cr}$  соответственно.

С использованием приведенных зависимостей (9)–(13) уравнение ДЦД запишем так:

$$\varepsilon_a(\sigma_a, D_\varepsilon) = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K}\right)^{1/m} [L_0(\sigma_a) + D_\varepsilon(L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a))]. \quad (14)$$

Таким образом, уравнение (14) представляет аналитическое описание ДЦД, включающее изменение неупругих свойств материала при накоплении усталостного повреждения, и может быть использовано при расчете долговечности элементов конструкций в условиях эксплуатационного нагружения.

**Конкретизация модели.** Для конкретизации данной модели необходимо задать вид функции исчерпания пластичности. Для этого предположим, что ядро функции исчерпания пластичности определяется некоторой степенной функцией, зависящей от НД:

$$f(\varepsilon_{ine}) = b(\varepsilon_{ine})^a, \quad (15)$$

где  $a, b$  – показатели нелинейности и пропорциональности соответственно.

Согласно модели критерием предельного состояния материала является условие  $\sigma_T = \sigma_{T,cr}$ . Вначале нагружения при  $\sigma_T = \sigma_{T,0}$  функция усталостного повреждения  $D_\varepsilon = 0$ , по достижении предельного состояния  $D_\varepsilon = 1$ . Тогда функцию усталостного повреждения  $D_\varepsilon$  можно определить исходя из описанной ранее модели предельного исчерпания циклической пластичности:

$$D_\varepsilon = \frac{\sigma_T - \sigma_{T,0}}{\sigma_{T,cr} - \sigma_{T,0}}, \quad (16)$$

где  $\sigma_T, \sigma_{T,0}, \sigma_{T,cr}$  – текущий, исходный и критический циклические пределы текучести соответственно.

Подставив (15) в (5), получим уравнение для определения предела циклической текучести в каждом полупериоде нагружения:

$$\sigma_{T,i+1} = \sigma_{T,i} \pm E \frac{ab(\varepsilon_{ine,i})^{a-1}}{(1 \mp ab(\varepsilon_{ine,i})^{a-1} L_2)E - ab(\varepsilon_{ine,i})^{a-1} L_1} \varepsilon_{ine,i}, \quad (17)$$

где значение НД в каждом полупериоде нагружения записано с учетом зависимостей (9)–(14), (16), преобразованных для  $i$ -го полупериода:

$$\varepsilon_{ine,i} = \left(\frac{\sigma_a}{K}\right)^{1/m} \left( L_0(\sigma_a) + \frac{\sigma_{T,i} - \sigma_{T,0}}{\sigma_{T,cr} - \sigma_{T,0}} (L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a)) \right). \quad (18)$$

После определения значения предела текучести  $\sigma_{T,i}$  найден размах НД  $\Delta\varepsilon_{ine,j}$ , соответствующий каждому циклу нагружения и рассчитанный как сумма значений НД в двух полупериодах, которые составляют один цикл нагружения:

$$\Delta\varepsilon_{ine,j} = \varepsilon_{ine,2j-1} + \varepsilon_{ine,2j}. \quad (19)$$

Выражение (19) с учетом (18) имеет следующий вид:

$$\Delta \varepsilon_{ine,j} = \left( \frac{\sigma_a}{K} \right)^{1/m} \left( 2L_0(\sigma_a) + \frac{\sigma_{T,2j-1} + \sigma_{T,2j} - 2\sigma_{T,0}}{\sigma_{T,cr} - \sigma_{T,0}} (L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a)) \right). \quad (20)$$

При этом значение усталостного повреждения на  $i$ -м полуцикле можно определить как:

$$D_{\varepsilon,i} = \frac{\sigma_{T,i} - \sigma_{T,0}}{\sigma_{T,cr} - \sigma_{T,0}}. \quad (21)$$

Согласно изложенному выше критерий предельного состояния запишем следующим образом:

$$D_{\varepsilon,i} = 1. \quad (22)$$

С использованием полученных выше соотношений уравнение кривой усталости (8), составленное для предельного состояния, после упрощений окончательно примет такой вид:

$$N(\sigma_a) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{T,cr} - \sigma_{T,0}}{L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a)} \left( \pm \frac{(L_{cr}(\sigma_a))^{1-a} - (L_0(\sigma_a))^{1-a}}{ab(1-a) \left( \frac{\sigma_a}{K} \right)^{a/m}} - \frac{\ln \frac{L_{cr}(\sigma_a)}{L_0(\sigma_a)}}{\left( \frac{\sigma_a}{K} \right)^{1/m}} \right). \quad (23)$$

Уравнение (23) представляет кривую усталости для описанного критерия предельного состояния материала при циклическом нагружении и не включает в себя интегральных зависимостей (в отличие от модели Афанасьева [12]), что упрощает дальнейшие расчеты при нахождении параметров исчерпания пластичности. Согласно (23) для определения долговечности для данной амплитуды нагружения  $\sigma_a$  необходимо знать параметры исчерпания пластичности  $a$  и  $b$ , которые являются характеристиками материала, зависят от характера исчерпания пластичности, отвечают за изменение неупругости материала с накоплением усталостных повреждений и подлежат определению.

**Механические характеристики материалов, используемые для апробации модели.** Для дальнейших исследований были выбраны известные данные с разным характером исчерпания циклической пластичности [5, 16–19]. Механические и усталостные характеристики материалов представлены соответственно в табл. 1 и 2.

**Анализ кинетики неупругих деформаций.** На основе анализа экспериментальных данных по кинетике НД определены следующие группы материалов:

упрочняющиеся;

разупрочняющиеся по выпуклой траектории;

разупрочняющиеся по вогнутой траектории.

На рис. 2 схематически представлена кинетика размаха НД с характерными участками для различных групп материалов.

Согласно приведенной классификации материалов (рис. 2) в табл. 3 они распределены по группам. Для исследованных материалов изменение размаха неупругой деформации в зависимости от числа циклов нагружения имеет три характерные стадии [5] (рис. 2):

Т а б л и ц а 1

## Механические характеристики исследуемых материалов

Материал	$\sigma_T^{CT}, \sigma_{0,2}^{CT}$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$E \cdot 10^{-5}$ , МПа	$K$	$m$	$\delta$ , %	$\psi$ , %	Лит. ист.
Сталь 45(I)	468	716	2,10	483,71	0,05962	22,8	46,9	[16]
Сталь 15кп	267	413	2,00	396,93	0,10660	40,1	68,9	[16]
Сталь 45(II)	316	580	2,09	435,89	0,08359	25,6	47,4	[17]
Сталь 1X13(I)	390	620	2,16	596,74	0,07573	25,8	67,3	[17]
Сталь 40X(I)	590	853	1,96	749,78	0,09178	25,0	58,0	[5]
Сталь ЭИ612(I)	595	1000	2,11	911,82	0,09363	24,0	36,6	[5]
Медь	125	325	1,13	721,47	0,18683	15,4	82,5	[5]
Латунь Л62	371	449	0,98	2232,07	0,28224	25,3	73,0	[5]
Сталь 15Г2АФДпс	410	532	2,09	508,27	0,07519	32,3	72,0	[18]
Сталь 45(III)	476	668	2,09	556,45	0,08012	27,0	48,0	[18]
Сталь 1X13(II)	614	746	2,20	769,95	0,05910	20,0	64,0	[18]
Сталь 40X(II)	675	840	2,12	1232,54	0,10796	20,0	67,0	[18]
Сталь ЭИ612(II)	582	896	2,04	2274,63	0,16877	26,0	36,0	[18]
Сталь 45(IV)	316	580	2,09	574,15	0,08229	25,6	47,4	[19]
Сталь 1X2M	332	529	2,17	564,48	0,07305	30,6	76,6	[19]

**Примечание.**  $\sigma_T^{CT}$  ( $\sigma_{0,2}^{CT}$ ) – предел статической текучести;  $\sigma_B$  – предел прочности;  $\delta$  – относительное удлинение;  $\psi$  – относительное сужение.

Т а б л и ц а 2

## Усталостные характеристики исследуемых материалов

Материал	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\sigma_{cr}$ , МПа	$N_0 \cdot 10^{-6}$ , цикл	$A$	$B$	$R$	$m_0$
Сталь 45(I)	270,0	320,4	0,995	48,455	-17,461	-0,709	76
Сталь 15кп	157,5	198,0	5,055	51,050	-20,186	-0,951	34
Сталь 45(II)	210,0	247,2	0,3857	34,651	-12,514	-0,800	44
Сталь 1X13(I)	270,0	331,2	10,020	70,119	-25,961	-0,904	41
Сталь 40X(I)	300,0	372,3	2,320	50,409	-17,781	-0,982	6
Сталь ЭИ612(I)	300,0	421,8	3,142	36,607	-12,154	-0,996	10
Медь	100,0	179,8	11,150	25,484	-9,217	-0,991	9
Латунь Л62	150,0	324,3	8,926	21,587	-6,725	-0,984	7
Сталь 15Г2АФДпс	250,0	297,9	1,579	53,395	-19,681	-0,917	28
Сталь 45(III)	260,0	318,9	2,554	52,907	-19,253	-0,838	28
Сталь 1X13(II)	360,0	443,1	1,208	45,278	-15,333	-0,923	10
Сталь 40X(II)	330,0	459,1	9,969	47,386	-16,036	-0,768	16
Сталь ЭИ612(II)	260,0	433,3	6,887	30,125	-9,643	-0,927	15
Сталь 45(IV)	264,6	323,4	2,000	50,837	-18,386	-0,946	13
Сталь 1X2M	270,5	333,6	2,000	49,059	-17,584	-0,913	9

**Примечание.**  $N_0$  – число циклов до разрушения по экспериментальной кривой усталости для предела выносливости;  $A, B$  – параметры уравнения кривой усталости в виде  $\lg N = A + B \lg \sigma_a$ ;  $R$  – коэффициент корреляции;  $m_0$  – число экспериментальных точек для построения кривой усталости.

Распределение материалов по группам по кинетике НД

Группа материала	Характеристика	Материал
I	Упрочняющиеся (рис. 2,а)	Сталь 45(I, II, III, IV), 15кп, 15Г2АФДпс
II	Разупрочняющиеся по выпуклой траектории (рис. 2,б)	Сталь 40Х(I), медь, латунь Л62
III	Разупрочняющиеся по вогнутой траектории (рис. 2,в)	Стали 1Х13(I, II), ЭИ612(I, II), 40Х(II), 1Х2М

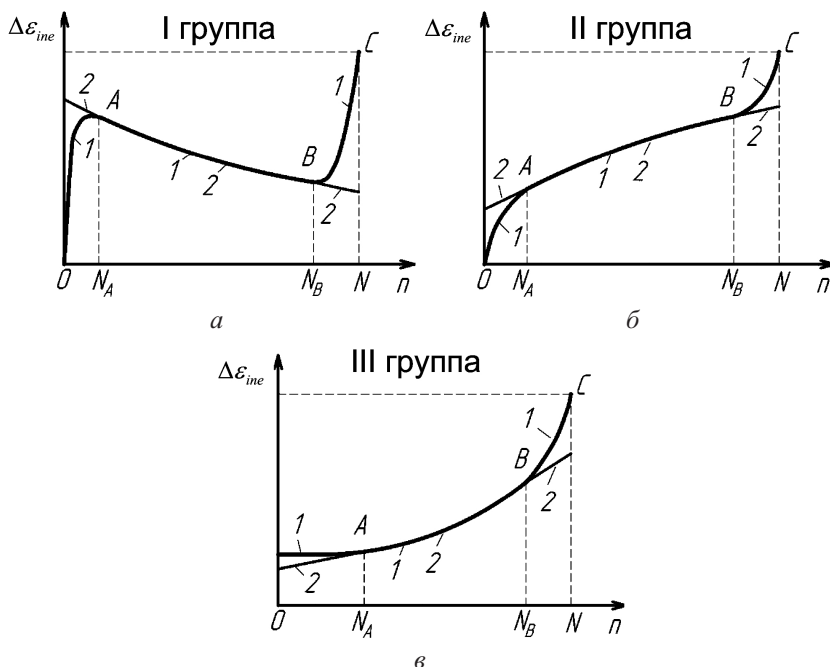


Рис. 2. Схематическое представление кинетики размаха неупругой циклической деформации для упрочняющихся (а), разупрочняющихся по выпуклой (б) и по вогнутой (в) траектории материалов: 1, 2 – экспериментальные и теоретические кривые соответственно;  $N_A$ ,  $N_B$  – числа циклов нагружения, соответствующие переходным процессам в материале, т.е. началу и концу монотонной стадии соответственно.

ОА – стадия стабилизации неупругих деформаций (конкурирующие процессы упрочнения и разупрочнения с уровнем неупругих деформаций, выходящим на устоявшийся режим их изменения);

АВ – стадия монотонного снижения или увеличения пластических деформаций – стадия упрочнения или разупрочнения соответственно;

ВС – стадия резкого увеличения неупругих деформаций – долом, связанный с ростом макротрещины.

Как известно [5], характер изменения экспериментальных кривых кинетики размаха НД немонотонный на начальной и конечной стадиях нагружения.

На начальной стадии нагружения экспериментальные кривые отображают процессы стабилизации деформирования в объемах с упрочнением и разупрочнением материала (на рис. 2 участки ОА), и в зависимости от этих конкурирующих процессов



в объеме рабочей части образца начальная стадия может свидетельствовать как об увеличении, так и уменьшении размаха неупругой деформации.

На конечной стадии циклического нагружения, перед разрушением образца, происходит резкое повышение уровня пластических деформаций, что соответствует росту макротрещины (на рис. 2 участки BC). Исходя из анализа экспериментальной кинетики НД для представленных в табл. 1 материалов в табл. 4 приведены усредненные параметры функции кинетики неупругих деформаций  $f(\sigma_a, D_\varepsilon)$ .

Т а б л и ц а 4

Усредненные параметры функции кинетики неупругих деформаций  $f(\sigma_a, D_\varepsilon)$

Группа материала	$L_{0,0}$	$L_{0,cr}$	$L_{cr,0}$	$L_{cr,cr}$
I	1,060	1,250	0,950	0,890
II	0,880	0,250	1,110	1,500
III	0,610	0,510	1,420	2,060

На рис. 3 для стали 45(I) представлена поверхность усталости в координатах амплитуда напряжения  $\sigma_a$  – деформация  $\varepsilon_a$  – число циклов нагружения  $n$ , которая соответствует уравнениям (14) и (18), а также ее проекции (для дискретных значений  $n$ ) на координатную плоскость амплитуда  $\sigma_a$  –  $\varepsilon_a$ , т.е. расчетная полная ДЦД.

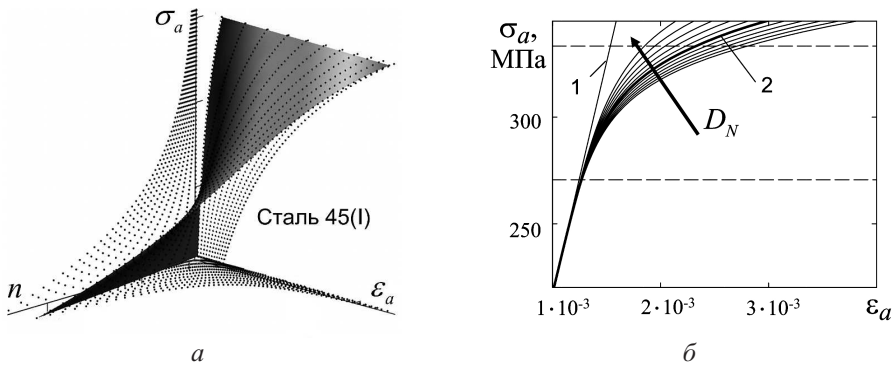


Рис. 3. Кинетическая поверхность усталости (а) и расчетная полная ДЦД (б) стали 45(I): 1 – упругая составляющая уравнения полной ДЦД; 2 – стабилизированная составляющая уравнения полной ДЦД; стрелкой показано направление увеличения относительной наработки  $D_N = n/N$ .

**Определение параметров модели.** Для определения начального и критического значений ПЦТ используются зависимости, полученные в результате анализа неупругих деформаций для разных групп материалов:

$$\sigma_{T,0} = \sigma_{-1}; \quad \sigma_{T,cr} = \sigma_{cr} \quad (\text{упрочняющиеся}); \quad (24a)$$

$$\sigma_{T,0} = \sigma_{cr}; \quad \sigma_{T,cr} = 0,9\sigma_{-1} \quad (\text{разупрочняющиеся}). \quad (24б)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  кривой усталости (23) необходимо определить для каждого уровня напряжений многоциклового кривой усталости, для которых следует составить системы из двух уравнений. Принимаем, что область действия уравнения (23)

определяется по двум координатам, взятым из экспериментальной кривой усталости по полному разрушению. Для описания многоциклового области этими координатами являются:  $(N_{cr}; \sigma_{cr})$  и  $(N_0; \sigma_{-1})$ . Здесь  $N_{cr}$  принято равным  $5 \cdot 10^4$  цикл;  $N_0$  – абсцисса излома кривой усталости.

Систему уравнений составляем с помощью уравнения модели (23) и условия связи усталостных повреждений  $D_\varepsilon$  и  $D_N$ , найденных из условия  $D_N = n/N$ , при  $D_N = 0,5$ . Это условие связи вытекает из условия нормирования при рассмотрении модифицированной части уравнения полной циклической диаграммы деформирования (10). Так, если известна экспериментальная кривая усталости в виде  $N(\sigma_a) = f(\sigma_a)$ , то, используя уравнение кривой усталости согласно модели в виде  $N(\sigma_a) = F(a, b, \sigma_a)$  и условия нормирования (значение функции  $f(\sigma_a, D_\varepsilon) = 1$  при  $D_N = 0,5$ ), получаем систему нелинейных уравнений относительно параметров исчерпания пластичности, составленную для напряжения  $\sigma_a$  в предельном состоянии материала:

$$\begin{cases} f(\sigma_a) = F(a, b, \sigma_a); \\ D_\varepsilon|_{D_N=0,5} = \frac{1 - L_0(\sigma_a)}{L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a)}. \end{cases} \quad (25)$$

Поскольку данная система уравнений относительно параметров является нелинейной, решение получено численными методами.

Для численного решения системы уравнений (25) упростим ее: из первого уравнения определим параметр  $b$ :

$$b = \pm \frac{(L_{cr}(\sigma_a))^{1-a} - (L_0(\sigma_a))^{1-a}}{a(1-a) \left(\frac{\sigma_a}{K}\right)^{a/m} \left( \frac{2f(\sigma_a)(L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a))}{\sigma_{T,cr} - \sigma_{T,0}} \right) + \ln \frac{L_{cr}(\sigma_a)}{L_0(\sigma_a)} \left(\frac{\sigma_a}{K}\right)^{-1/m}}. \quad (26)$$

Значение предела циклической текучести, которое соответствует второму уравнению системы (25), запишем с помощью уравнения (16) как:

$$\sigma_T = \sigma_{T,0} + \frac{(1 - L_0(\sigma_a))(\sigma_{T,cr} - \sigma_{T,0})}{L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a)}. \quad (27)$$

Второе уравнение системы (25) с учетом соотношения (27) приведем к виду, аналогичному (26). Для этого уравнения (7), (8) запишем не для предельного состояния материала, а для наработки, равной половине усталостной долговечности для заданной амплитуды напряжения  $\sigma_a$ , заменив в (7) верхний предел интегрирования уравнением (27). После аналитических выкладок, аналогичных (7)–(23), получим уравнение, которое отвечает второму уравнению системы (25):

$$f(\sigma_a) = \frac{1}{2} \frac{(1 - L_0(\sigma_a))(\sigma_{T,cr} - \sigma_{T,0})}{(L_{cr}(\sigma_a) - L_0(\sigma_a))^2} \left[ \frac{\ln(L_0(\sigma_a))}{\left(\frac{\sigma_a}{K}\right)^{1/m}} \pm \frac{1 - (L_0(\sigma_a))^{1-a}}{ab(1-a) \left(\frac{\sigma_a}{K}\right)^{a/m}} \right]. \quad (28)$$

Для нахождения параметров  $a$  и  $b$  разработана следующая численная процедура: для заданного значения напряжения и начального приближения параметра  $a$  в соответствии с уравнением (26) определяется такой параметр  $b$ , который удовле-

творит проверку согласно уравнению (28) системы (25). Если уравнение (26) не удовлетворяется, то выбирается следующее начальное приближение параметра  $a$ .

Рассмотрим уравнения (26) и (28) модифицированной системы (25). Их решением будет бесконечное множество значений в виде функции, аргументами которой есть два параметра исчерпания пластичности  $a$  и  $b$ , которые, в свою очередь, также являются функциями от приложенного напряжения. Полученное бесконечное множество решений для различных значений усталостных наработок, определенных на половине усталостной долговечности для заданного уровня нагружения, представлено в виде проекций на координатные плоскости срезов гиперповерхности вероятных решений уравнений (25) для значений напряжения, выбранных с некоторым шагом дискретизации (рис. 4). В качестве примера рассмотрена сталь 45(1) и применена описанная численная процедура.

Из рис. 4 видно, что для одного уровня нагружения существует бесконечное множество пар параметров исчерпания пластичности. Последние являются решением первого уравнения системы (26) и приводят к одной и той же экспериментальной долговечности, т.е. удовлетворяют уравнению (28), но по-разному накапливают усталостные повреждения (рис. 5).

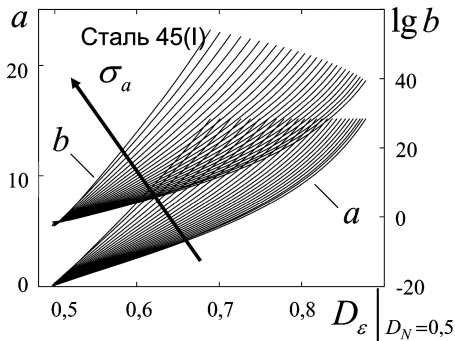


Рис. 4

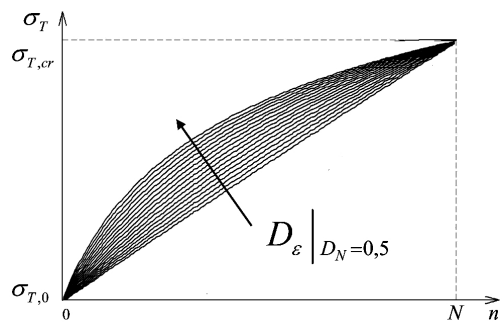


Рис. 5

Рис. 4. Проекция на координатные плоскости срезов гиперповерхности полученных вероятных решений уравнений системы (25) для дискретных значений напряжения, взятых в пределах многоциклового усталости.

Рис. 5. Семейство кривых исчерпания пластичности стали 45(1), построенных для напряжения  $\sigma_a = 250$  МПа и различных пар параметров исчерпания пластичности.

Решением модифицированной системы (25) на одном уровне напряжения являются численные значения двух искоемых параметров  $a$  и  $b$ , по которым можно построить действительные кривые повреждения и диаграммы исчерпания пластичности для этой амплитуды напряжения.

Параметры исчерпания пластичности  $a$  и  $b$  для исследуемых материалов из табл. 1 для ряда условий нагружения найдены с использованием модифицированной системы уравнений (25), составленной по уравнению (26) в соответствии с условием (28), по методике, представленной выше. На рис. 6 приведены расчетные параметры исчерпания пластичности в зависимости от относительной амплитуды напряжений.

Как видно из рис. 6, параметры исчерпания пластичности  $a$  и  $b$  для выбранных материалов изменяются в широком диапазоне. Однако для материалов в пределах одной группы характер их изменения очень похож.

С использованием рассчитанных параметров кривой исчерпания пластичности могут быть построены кривые усталости по уравнению (23). Погрешность в определении кривых усталости путем расчета по зависимости (23) и экспериментально составляет не более одного цикла.

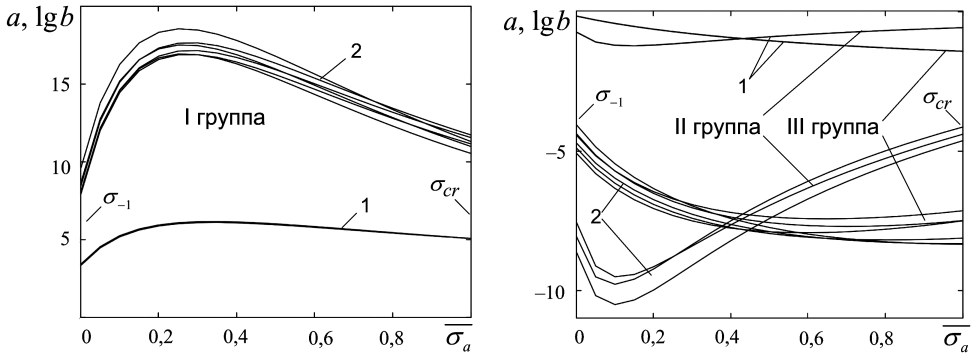


Рис. 6. Расчетные значения параметров исчерпания пластичности  $a$  (1) и  $b$  (2) для выбранных материалов ( $\sigma_a = (\sigma_a - \sigma_{-1}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{-1})$ ).

**Определение кинетики неупругих деформаций и повреждения на основе разработанной модели.** Для определения расчетной неупругой деформации  $\varepsilon_{ine,i}$  в каждом  $i$ -м полупериоде необходимо найти значение предела текучести  $\sigma_{T,i}$  и далее текущее значение повреждения  $D_{\varepsilon,i}$ .

С помощью уравнений (1)–(28) разработана процедура определения усталостной долговечности и кинетики предела циклической текучести, неупругой деформации и повреждения, которая состоит в следующем: для заданной амплитуды напряжения определяются значения параметров  $a$  и  $b$ , затем производится последовательный пополуцикловый расчет до достижения предельного состояния таких взаимозависимых значений: повреждения, неупругой деформации и предела циклической текучести.

С использованием уравнений (1)–(28) на рис. 7 построены схематические графики расчетной кинетики предела циклической текучести, повреждения и неупругой

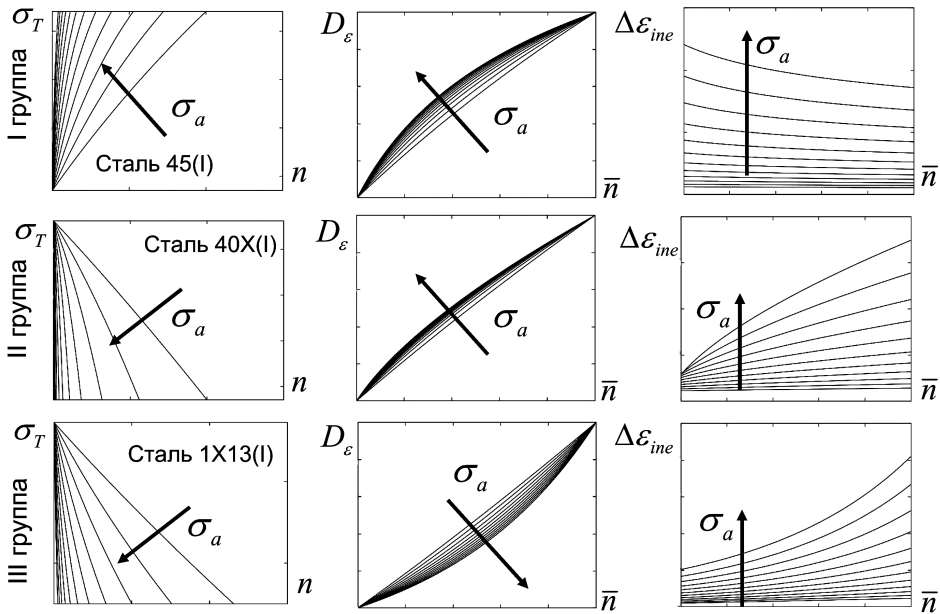


Рис. 7. Расчетная кинетика предела циклической текучести, повреждения и неупругой деформации на примере сталей 45(I) (I группа), 40X(I) (II группа), 1X13(I) (III группа). Принято  $\bar{n} = n/N$ .

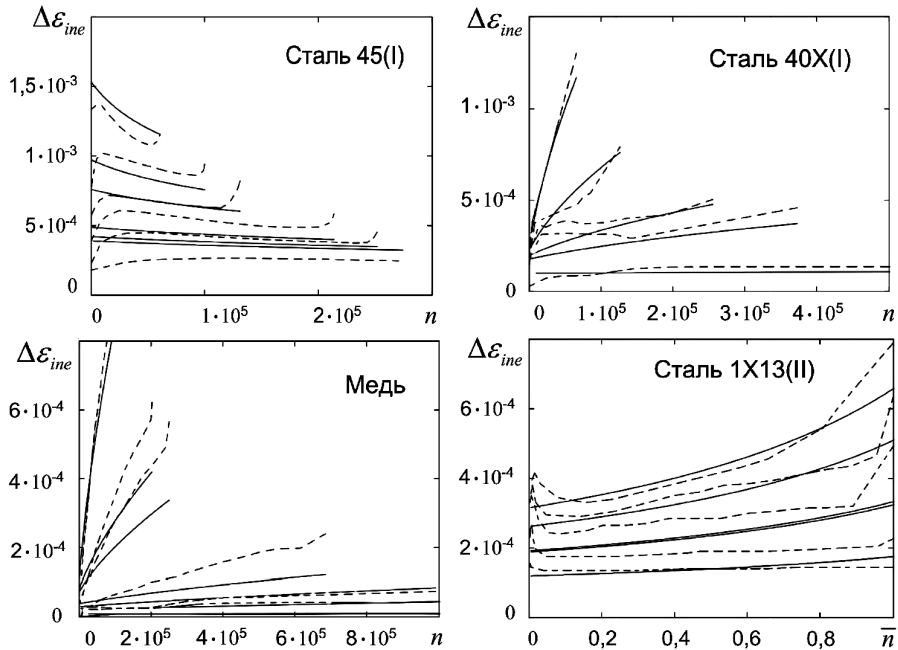


Рис. 8. Расчетная (сплошные линии) и экспериментальная (штриховые линии) кинетика размаха неупругой деформации за цикл  $\Delta\varepsilon_{ine}$  для разных значений амплитуды напряжения  $\sigma_a$  для материалов, приведенных в табл. 1.

деформации для каждой группы материалов, где шкалы для  $D_e$  и  $n$  изменяются от нуля до единицы.

С использованием разработанной модели могут быть построены графики расчетной кинетики НД. Для некоторых материалов, приведенных в табл. 1, они показаны на рис. 8. Видно, что характер расчетных зависимостей монотонный и соответствует разработанной модели и полной ДЦД. Максимальное отклонение расчетных НД от экспериментальных на монотонном участке составляет 17,8%, тогда как среднее отклонение не превышает 5%.

## Выводы

1. Разработана модель предельного исчерпания циклической пластичности для определения долговечности до наступления предельного состояния различных групп конструкционных материалов в области многоциклового усталости. Модель позволяет прогнозировать кинетику неупругого деформирования и процесс накопления усталостного повреждения материалов при циклическом нагружении. Для нахождения параметров модели ПИЦП необходимо знать механические характеристики материала и кривые многоциклового усталости при симметричном растяжении–сжатии в мягком режиме нагружения. Модель вводит понятие процесса исчерпания пластичности и позволяет определить его параметры.

2. На основе анализа экспериментальных результатов по кинетике неупругого деформирования при многоциклового усталости предложены уравнения для их описания и способы определения параметров этих уравнений.

3. Предложена модификация уравнения Осгуда–Рамберга для циклического деформирования, которое определяет упругопластическое поведение материала с накоплением усталостных повреждений от начала нагружения и до разрушения в диапазоне многоциклового усталости. Диаграмма циклического деформирования пред-

ставляется в трехмерном пространстве: амплитуда напряжения – амплитуда деформации – текущее число циклов нагружения.

4. Показано согласование между экспериментальной и расчетной по модели ПИЦП кинетикой неупругого циклического деформирования.

## Резюме

Проанализовано експериментальні дані по непружних циклічних деформаціях різних металічних матеріалів для встановлення закономірностей їх зміни у процесі циклічного навантаження. Виділено групи матеріалів із подібною кінетикою непружного деформування і запропоновано аналітичні залежності для їх опису. Характер зміни непружних деформацій при втомі матеріалів зумовлений процесами їх зміцнення–знеміцнення, для опису яких використано розрахункову модель поциклової зміни циклічної границі плинності. За допомогою моделі можна описати непружну деформацію матеріалів та їх пошкодження в процесі втоми.

1. *Manson S. S.* Fatigue: a complex subject – some simple approximation // *Exp. Mech.* – 1965. – **5**. – P. 193–226.
2. *Coffin L. F.* A study of the effect of cyclic thermal stresses on a ductile metals // *Trans. ASME.* – 1954. – **76**. – P. 931–950.
3. *Троценко В. Т., Хамаза Л. А.* Деформационные кривые усталости сталей и методы определения их параметров. Сообщ. 1. Традиционные методы // *Пробл. прочности.* – 2010. – № 6. – С. 26–43.
4. *Jisa D., Liskutin P., Kruml T., and Polak J.* Small fatigue growth in aluminium alloy EN-AW6082/T6 // *Int. J. Fatigue.* – 2010. – **32**. – P. 1913–1920.
5. *Троценко В. Т., Хамаза Л. А., Цыбанев Г. В.* Методы ускоренного определения пределов выносливости металлов на основе деформационных и энергетических критериев. – Киев: Наук. думка, 1979. – 175 с.
6. *Троценко В. Т.* Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1981. – 344 с.
7. *Троценко В. Т., Хамаза Л. А., Покровский В. В. и др.* Циклические деформации и усталость металлов: в 2-х т. – Киев: Наук. думка, 1985. – Т. 1. – 216 с.; Т. 2. – 221 с.
8. *Троценко В. Т.* Усталость металлов при неоднородном напряженном состоянии. – Киев: Ин-т проблем прочности имени Г. С. Писаренко НАН Украины, 2011. – 129 с.
9. *Троценко В. Т., Хамаза Л. А.* Механика рассеянного усталостного повреждения металлов и сплавов. – Киев: Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2016. – 412 с.
10. *Orowan E.* Theory of the fatigue of metals // *Proc. Roy. Soc. London A.* – 1939. – **171**, No. 944. – P. 79–106.
11. *Dang van K., Criveau B., and Message O.* On new multiaxial fatigue limit criterion: Theory and application // *Biaxial and Multiaxial Fatigue.* – 1989. – **1**. – P. 479–496.
12. *Афанасьев Н. Н.* Статистическая теория усталостной прочности металлов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1953. – 128 с.
13. *Runciman A., Xu D., Pelton A. R., and Ritchie R. O.* An equivalent strain/Coffine–Manson approach to multiaxial fatigue and life prediction in superelastic Nitinol medical devices // *Biomaterials.* – 2011. – **32**, No. 22. – P. 4987–4993.

14. *Socha G.* Experimental investigations of fatigue crack nucleation, growth and coalescence in structural steel // *Int. J. Fatigue.* – 2003. – **25**, No. 2. – P. 139–147.
15. *Socha G.* Prediction of the fatigue life on the basis of damage progress rates curves // *Ibid.* – 2004. – **26**, No. 4. – P. 339–347.
16. *Троценко В. Т., Митченко Е. И.* Прогнозирование долговечности при программном циклическом нагружении с учетом рассеяния свойств // *Пробл. прочности.* – 1984. – № 10. – С. 3–8.
17. *Коваль Ю. И.* Кинетика изменения неупругих циклических деформаций в сталях 45 и 1Х13 при стационарном и программном нагружении // *Там же.* – 1974. – № 3. – С. 14–19.
18. *Троценко В. Т., Жабко Н. И.* Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении в условиях неоднородного напряженного состояния. Сообщ. 1 // *Там же.* – 1981. – № 9. – С. 3–11.
19. *Троценко В. Т., Жабко Н. И.* Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении в условиях неоднородного напряженного состояния. Сообщ. 2 // *Там же.* – 1981. – № 11. – С. 3–10.
20. *Троценко В. Т., Хамаза Л. А., Мищенко Ю. Д.* Исследование усталостной прочности образцов с концентраторами напряжений с учетом неупругих деформаций // *Там же.* – 1978. – № 4. – С. 13–16.
21. *Tsyban'ov G. V. and Novikov A. I.* Ultimate hardening/softening model of material for fatigue crack initiation onset and determination of its parameters // *Int. J. Fatigue.* – 2012. – **39**. – P. 15–24.
22. *Цыбанев Г. В., Новиков А. И.* Описание процессов усталостной деградации материалов по параметрам виртуального неупругого деформирования // *Металл и литье Украины.* – 2010. – № 4. – С. 36–45.
23. *Цыбанев Г. В., Новиков А. И.* Расчетная модель предельного упрочнения материалов при многоциклового усталости и определение ее параметров. Сообщ. 1. Описание модели // *Пробл. прочности.* – 2010. – № 6. – С. 122–136.

Поступила 21. 11. 2016