УДК 539.3

Статистический критерий прочности для хрупких материалов

Д. В. Бабич

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

На основе вероятностной модели механизма хрупкого микроразрушения (микроповреждаемости), приводящего к макроразрушению материалов, предлагается статистическая интерпретация критериев прочности, связывающих начало макроразрушения в виде образования макротрещин при растяжении либо потери устойчивости во внутренней структуре при сжатии с достижением некоторого (критического) значения плотности микродефектов в материале. Суть критерия заключается в сравнении значений концентрации микродефектов, обусловленных заданным видом нагружения тела, с их критическим значением, которое для данного материала не зависит от вида напряженного состояния.

Ключевые слова: рассеянное микроразрушение, критическая плотность микроразрушений, макротрещина, статистический критерий макроразрушения.

Введение. Большинство современных силовых, деформационных и энергетических критериев прочности носит феноменологический характер и является результатом обобщения опытных данных, не касаясь физический сути явления разрушения. Поэтому каждый из инженерных критериев прочности применим только к материалам, для которых получены положенные в его основу экспериментальные результаты [1, 2].

Раскрытию механизмов разрушения различных материалов посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования [1–11]. Одним из наиболее важных результатов таких исследований является раскрытие сути физического процесса разрушения, состоящего из этапов, включающих накопление до определенного уровня рассеянных повреждений (микротрещин) с последующим нарушением целостности тела в результате образования макротрещин, и др.

Цель настоящей работы заключается в разработке структурного подхода к построению статистических критериев прочности для упругохрупких материалов на основе вероятностной модели механизма хрупкого микроразрушения (микроповреждаемости).

Имеется значительное количество статистических моделей разрушения материалов [1–4, 8, 10, 11]. В частности, в работе [2], по-видимому, впервые введено понятие статистического критерия прочности в виде аналога первой теории прочности.

В данной работе для описания механизма хрупкого разрушения используется статистическая модель Даниэльса [1].

Физическая постановка задачи. Известно [1–11], что разрушение материалов является сложным многоэтапным процессом с рассеянным микроразрушением структурных элементов. Разрушение последних может происходить путем образования плоских микротрещин при отрыве и сдвиге либо при наличии обоих механизмов. На первой стадии разрушения размеры повреж-

© Д. В. БАБИЧ, 2011

дений микроструктуры малы по сравнению с линейными размерами частиц, на второй они достигают размеров порядка размеров структурных элементов. В отличие от субмикроскопических повреждений, которые при снятии нагрузки исчезают (залечиваются), микроскопические повреждения имеют необратимый характер (остаются в виде микротрещин). Они накапливаются в объеме материала с ростом нагрузки и влияют на механические свойства материала, в частности на его деформационную и прочностную способность. Третья стадия (начало разрушения материала) наступает по достижении концентрацией микротрещин некоторого критического значения, когда расстояние между микродефектами приближается к их характерным размерам.

В случае растягивающих напряжений начало разрушения связано со слиянием микротрещин, приводящим к образованию макротрещины и нарушению целостности тела [1–3, 5, 7, 9–11], в то время как при сжимающих напряжениях начало разрушения, по-видимому, обусловлено потерей устойчивости во внутренней структуре поврежденного материала [6].

Связь начала макроразрушения с достижением концентрацией микротрещин в объеме тела некоторого (критического) значения при заданном виде и уровне нагружения позволяет ввести в рассмотрение статистический критерий прочности [2]. Статистическая природа такого критерия обусловлена случайным (вероятностным) характером микроразрушений в материале. Суть критерия заключается в сравнении значений концентрации микродефектов, возникших при заданном виде нагружения тела, с их критическими значениями, которые для данного материала являются причиной начала макроразрушения (образование макротрещины при растяжении либо потеря устойчивости во внутренней структуре при сжатии) независимо от многокомпонентности и вида напряженного состояния.

Критические значения концентрации микротрещин определяются на основании опытных данных о разрушении образцов материала при одноосном растяжении и сжатии.

Таким образом, для формулировки статистического критерия прочности необходимо располагать критическими значениями концентрации микротрещин в образцах материала при растяжении и сжатии, соответствующими их разрушению, и появляющихся микротрещин в теле при заданном виде и уровне нагружения. Обладая такой информацией, путем сравнения значений увеличивающейся концентрации микродефектов в теле с критическим значением можно судить о состоянии тела при различных уровнях нагружения, включая макроразрушение.

Ниже рассмотрен вариант статистического критерия прочности для упругохрупких материалов, разрушающихся путем образования трещин отрыва при малых упругих деформациях. Аналогично могут быть построены определяющие соотношения для статистических критериев прочности при других механизмах образования микротрещин.

Структурная модель накопления плоских микродефектов в упругохрупком материале. Для получения информации о прогрессирующей концентрации микротрещин в материале следует воспользоваться приемлемой моделью связанного процесса микроповреждаемости и деформирования при нагружении тела.

Существуют различные подходы к моделированию микроповреждаемости материалов [1–4, 12, 13]. Для рассматриваемой задачи наиболее подходящей является структурная модель повреждаемости материала в виде образования рассеянных по объему плоских микротрещин [4, 10, 12].

В соответствии с этой моделью принято, что единичный объем материала состоит из N структурных элементов эллипсоидальной (a', b' – большая и меньшая полуоси эллипсоида вращения) либо сферической (a' – радиус сферы) формы. Каждый структурный элемент может растрескиваться, в результате чего появляется плоский дефект эллиптической либо круговой формы с размерами порядка размеров структурных элементов. Для оценки степени поврежденности материала вводится численная характеристика $\varepsilon = N_0 \langle v' \rangle$, где N_0 – количество микротрещин в единичном объеме; $\langle v' \rangle$ – средний объем частиц материала, $\langle v' \rangle = \dfrac{4\pi}{3} \langle a' b'^2 \rangle$.

Если общее число частиц в единице объема $N = 1 / \langle v' \rangle$, то объемная концентрация поврежденности будет определяться выражением $p = N_0 / N$. Средние расстояния между центрами микрочастиц R и разрушенных микроэлементов R_0 приближенно определяются по формулам $R = 1/\sqrt[3]{N}$ и $R_0 = 1/\sqrt[3]{N_0}$ [10].

Процесс накопления плоских микродефектов описывается на основе модели сплошной среды, использование которой правомочно при исследовании механического поведения материалов с большим количеством рассеянных по объему дефектов, расстояния между которыми превышают размеры структурных элементов: $h^* = \dfrac{1}{\sqrt[3]{N_0}} >> b'(a')$ [12]. Предполагается также, что в процессе деформирования микротрещины не растут и не взаимодейст- вуют между собой ввиду значительных расстояний между центрами близ- лежащих дефектов [1, 10, 12].

Таким образом, размеры и характер распределения микротрещин в реальных телах связаны с разрывами структурных элементов. Форма и размеры трещин отождествляются с таковыми для сечений разрыва структурных элементов материала. Поскольку степень влияния поврежденности на механические свойства материала обусловлена величиной площади нарушения сплошности материала, из соображений обеспечения определенных гарантий можно принять, что структурные элементы в виде вытянутых и сплюснутых эллипсоидов вращения растрескиваются по меридиональным и экваториальным сечениям максимальной площади.

Для описания процесса микроповреждаемости используется структурная модель накопления повреждений Даниэльса, физический смысл которой применительно к структурно-неоднородной среде раскрыт в [1]. Суть модели сводится к следующему.

Пусть в лабораторной (неподвижной) системе координат $0x_1x_2x_3$, оси которой направлены по взаимно перпендикулярным радиусам случайного шара единичного радиуса, выбранного в качестве представительного объема, заданы средние напряжения σ_{ij}. Локальные системы координат $0'x_1'x_2'x_3'$ выбираются таким образом, чтобы оси $0'x_3'$ были направлены по нормали к поверхности шара. На поверхности случайного шара вокруг направления $0'x_3'$ в географической системе координат выделяется элементарная область площадью $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\psi$, которая пересекает N структурных элементов. В сечениях пересекаемых структурных элементов действуют одинаковые локальные истинные напряжения $\overline{\sigma}_{33}'$, которые относятся к площадкам поврежденной среды, а условные σ_{33}' – к площадкам сплошной среды. В качестве критерия разрушения микроэлементов материала путем отрыва принимается соотношение 1-й теории прочности:

$$\overline{\sigma}_{33}' \geq \sigma, \tag{1}$$

где σ – случайная величина, обозначающая предельные значения истинного растягивающего либо сжимающего нормального напряжения для различным образом ориентированных структурных элементов.

Для аппроксимации распределения прочностных свойств кристаллитов и зерен различной ориентации в микронеоднородных материалах используются различные законы: степенной [1, 13]; нормальный закон распределения микропрочности [2]; функция распределения Вейбулла [1, 13] и др.

Ограничимся рассмотрением степенного закона. Плотность и интегральная функция распределения микропрочности при степенном законе представляются в виде соотношений

$$f_i(\sigma) = \frac{\alpha_i (\sigma - \sigma_{0i})^{\alpha_i - 1}}{(\sigma_i - \sigma_{0i})^{\alpha_i}}; \tag{2а}$$

$$F_i(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_{0i}; \\ (\sigma - \sigma_{0i})^{\alpha_i} \big/ (\sigma_i - \sigma_{0i})^{\alpha_i}, & \sigma_{0i} \leq \sigma \leq \sigma_i; \\ 1, & \sigma > \sigma_i, \end{cases} \tag{2б}$$

где σ_{0i}, σ_i – минимальная и максимальная величины предельных значений σ при растяжении ($i=1$) и сжатии ($i=2$); α_i – параметр разброса микропрочности.

Параметры распределения α_i, σ_{0i}, σ_i находятся по экспериментальным данным, например, методом моментов [4]. Суть метода состоит в приравнивании определенного количества выборочных моментов к соответствующим моментам распределения, которые являются функциями неизвестных параметров α_i, σ_{0i}, σ_i. Рассматривая количество моментов, равное числу подлежащих определению параметров, и решая полученные уравнения относительно этих параметров, получаем искомые оценки параметров распределения.

При двухпараметрическом ($\sigma_{0i} = 0$) распределении микропрочности интегральная функция распределения (2) и соотношения, связывающие основные выборочные моменты (среднее значение предела микропрочности $\sigma_{\text{в}i}'$, дисперсия D_i^2) с соответствующими моментами закона (2), имеют вид

$$F_i(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^{\alpha_i}; \tag{3}$$

$$\sigma'_{\text{в}i} = \int_0^{\sigma_i} \sigma f_i(\sigma) d\sigma = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + 1} \sigma_i; \tag{4}$$

$$D_i^2 = \int_0^{\sigma_i} (\sigma - \sigma'_{\text{в}i})^2 f_i(\sigma) d\sigma = \frac{\alpha_i}{2 + \alpha_i} \sigma_i^2 - \frac{2\alpha_i \sigma'_{\text{в}i} \sigma_i}{1 + \alpha_i} + \sigma'^2_{\text{в}i} =$$

$$= \frac{\alpha_i}{(1 + \alpha_i)^2 (2 + \alpha_i)} \sigma_i^2. \tag{5}$$

Коэффициент вариации k_{wi} запишем в виде

$$k_{wi} = \sqrt{\frac{1}{\alpha_i (2 + \alpha_i)}}. \tag{6}$$

Из выражений (4)–(6) следует

$$\alpha_i = -1 + \frac{1}{k_{wi}} \sqrt{1 + k_{wi}^2}; \qquad \sigma_i = \frac{\sqrt{1 + k_{wi}^2}}{\sqrt{1 + k_{wi}^2} - k_{wi}} \sigma'_{\text{в}i}. \tag{7}$$

Интегральная функция распределения микропрочности $F_i(\sigma)$ обозначает долю единичной площади случайного сечения тела, на которой предел микропрочности меньше некоторого определенного значения σ. Указанная доля площади случайного сечения тела представляет собой суммарную площадь сечений структурных элементов, на которых пределы прочности меньше значения действующего нормального напряжения, что приводит к их растрескиванию.

Структурные элементы будут разрушаться по достижении напряжениями $\bar{\sigma}'_{33}$ предельных значений. Разрушение отдельных элементов образует совокупность независимых случайных событий. Взаимодействие элементов между собой состоит в том, что после разрушения части из них происходит перераспределение напряжений между оставшимися целыми элементами.

Число разрушенных элементов n_i является случайной величиной, для которой справедлива схема независимых испытаний по Бернулли. Согласно схеме вероятность разрушения n_i элементов из общего числа структурных элементов N определяется формулой

$$P_N^{n_i} = C_N^{n_i} \rho_i^{n_i} q_i^{N - n_i},$$

где $C_N^{n_i}$ – биномиальные коэффициенты; p_i – вероятность данного результата в наугад взятом испытании; $q_i = 1 - p_i$. В нашем случае $p_i = F_i(\sigma)$.

По достижении истинными растягивающими нормальными напряжениями $\bar{\sigma}'_{33}$ предельных значений эти элементы разрушаются путем появления в них микротрещин с плоскостями, нормальными к направлению действия данных напряжений. В случае сжимающих напряжений образующиеся микротрещины ориентируются преимущественно параллельно направлению действия $\overline{\sigma}'_{33}$ [1, 4]. Учитывая это, можно записать равенство $\overline{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}$, так как разрушенные структурные элементы материала сопротивляются сжатию как сплошные.

Если условное локальное растягивающее напряжение σ'_{33} является независимым параметром нагружения, то в рамках рассматриваемой модели истинное локальное напряжение в сечениях не разрушенных структурных элементов будет случайной величиной $\overline{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}/(1-n_1/N)$. Распределение напряжения $\overline{\sigma}'_{33}$ зависит от распределения числа разрушенных элементов n_1. Математическое ожидание этого числа будет $\langle n_1 \rangle = NF_1(\overline{\sigma}'_{33})$, а коэффициент вариации – $k_{w1} = \left[\dfrac{1-F_1(\overline{\sigma}'_{33})}{NF_1(\overline{\sigma}'_{33})}\right]^{1/2}$ [1]. Из этой формулы следует, что для реальных материалов допустимо пренебречь разбросом величины n_1 и, следовательно, $\overline{\sigma}'_{33}$. В результате имеем

$$\overline{\sigma}'_{33} \approx \frac{\sigma'_{33}}{1-F_1(\overline{\sigma}'_{33})}. \tag{8}$$

На основании изложенного средние плотности микродефектов на поверхности случайного шара при заданных растягивающих и сжимающих напряжениях σ_{ij} соответственно определяются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\overline{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_1(\overline{\sigma}'_{33})\, d\Omega = \frac{1}{\overline{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_1(\overline{\sigma}'_{33}) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\overline{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_2(\sigma'_{33})\, d\Omega = \frac{1}{\overline{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_2(\sigma'_{33}) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi, \end{aligned} \tag{9}$$

где истинные локальные напряжения $\overline{\sigma}'_{33}$ через условные локальные напряжения σ'_{33} определяются по формуле (8); $\overline{N} = 4\pi$ – нормирующий множитель, который определяется из условия

$$\frac{1}{\overline{N}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_i(\overline{\sigma}'_{33}) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi = 1 \qquad \text{при} \qquad \overline{\sigma}'_{33} = \sigma_i. \tag{10}$$

Условные локальные напряжения σ'_{33} и заданные в теле средние напряжения σ_{kl} связаны преобразованием [4]

$$\sigma'_{33} = \alpha_{3k} \alpha_{3l} \sigma_{kl}, \tag{11}$$

где α_{3k}, α_{3l} – определяемые углами ϑ, ψ $(0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \psi \le 2\pi)$ направляющие косинусы локальной системы координат по отношению к лабораторной системе координат [14],

$$\alpha_{31} = \sin\psi \sin\vartheta; \qquad \alpha_{32} = -\cos\psi \sin\vartheta; \qquad \alpha_{33} = \cos\vartheta. \tag{12}$$

Таким образом, физическая суть величин ε_i $(i = 1, 2)$ состоит в том, что они представляют собой доли единицы площади поверхности случайного шара, на которой истинные нормальные растягивающие и сжимающие напряжения достигают пределов прочности σ пересекаемых поверхностью шара микрочастиц, вследствие чего происходит растрескивание структурных элементов, приводящее к уменьшению эффективной площади поверхности представительного объема.

Объемная концентрация плоских микродефектов будет определяться отношением числа разрушенных микрочастиц при растяжении либо сжатии N_{0i} к их общему числу $(p_i = N_{0i}/N)$ в представительном объеме. Воспользовавшись приемом, применяемым в петрографии для анализа тонких срезов осадков [15], можно показать, что $p_i = \varepsilon_i$.

Для определения с помощью соотношений (3), (9) концентрации растрескивающихся индивидуальных структурных элементов материала необходимо знать параметры распределения α_i, σ_i.

Ввиду малости размеров структурных элементов прямое определение данных параметров невозможно. Воспользуемся опосредованным приемом их определения по экспериментальным значениям условных параметров макропрочности для выборки макрообразцов ($\sigma'_{\text{в}i}$, D_i^2, k_{wi}). Необходимо отметить, что значения коэффициентов вариации микропрочности структурных элементов материала как относительные величины в условных и истинных напряжениях совпадают. Поэтому параметры α_i в функциях распределения макропрочности материала (образцов) и структурных элементов будут совпадать. Определению подлежат лишь параметры σ_i.

В случае сжатия $(\sigma_{ii} < 0,\ i = 1, 2, 3)$ указанные параметры определяются по формулам (7) в силу совпадения условных и истинных напряжений.

При растяжении $(\sigma_{ii} > 0,\ i = 1, 2, 3)$ определяется параметр σ_1 следующим образом. В соответствии с (8) среднее предельное значение независимого параметра нагружения (условное напряжение) $\langle \sigma'_{\text{в}33} \rangle$ через истинные напряжения определяется по выражению

$$\langle \sigma'_{\text{в}33} \rangle = \bar{\sigma}'_{33\max}[1 - F_1(\bar{\sigma}'_{33\max})], \tag{13}$$

где $\bar{\sigma}'_{33\max}$ – максимальное значение напряжения в структурном элементе при разрушении экспериментальных образцов.

На основании (13) значение $\bar{\sigma}'_{33\max}$ определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\sigma}\{\sigma[1 - F_1(\sigma)]\}_{\sigma = \bar{\sigma}'_{33\max}} = 0. \tag{14}$$

С учетом (3), (4), (14) значение $\bar{\sigma}'_{33\max}$ выражается следующим образом:

$$\bar{\sigma}'_{33\max} = [1/(1+\alpha_1)]^{1/\alpha_1}\sigma_1 \qquad \text{или} \qquad \bar{\sigma}'_{33\max} = \langle \sigma'_{\text{в}33} \rangle (1+\alpha_1)/\alpha_1, \tag{15}$$

откуда при $\langle \sigma'_{в33} \rangle = \sigma'_{в1}$ для параметра распределения прочности структурных элементов σ_1 следует

$$\sigma_1 = \frac{\sigma'_{в1}(1+\alpha_1)^{1/\alpha_1+1}}{\alpha_1}. \tag{16}$$

Таким образом, при известных значениях средней прочности, дисперсии или коэффициента вариации для выборки образцов из некоторого материала соответствующие параметры для структурных элементов материала согласно (4), (5), (16) определяются по формулам

$$\begin{gathered} \langle \bar{\sigma}'_{в33} \rangle = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}\sigma_1 = \sigma'_{в1}(1+\alpha_1)^{1/\alpha_1}; \\ D_1^2 = \frac{\sigma'^2_{в1}(1+\alpha_1)^{2/\alpha_1}}{\alpha_1(2+\alpha_1)}. \end{gathered} \tag{17}$$

В (13)–(17) величина $\langle \sigma'_{в33} \rangle = \sigma'_{в1}$ представляет собой среднее значение предела прочности некоторого материала; σ_1, $\langle \bar{\sigma}'_{в33} \rangle$, $\bar{\sigma}'_{33\max}$ – соответственно максимальное и среднее значение прочности индивидуальных структурных элементов и наибольшее среднее значение прочности структурных элементов, реализуемое в разрушающихся образцах.

С помощью приведенных соотношений можно определять критические значения плотности микротрещин ε_{ik}, по достижении которых начинается макроразрушение тел в виде образования макротрещины либо потери устойчивости во внутренней структуре поврежденного материала, что позволяет ввести в рассмотрение статистический критерий прочности.

Статистический критерий прочности. Пусть в лабораторной системе координат, связанной с представительным объемом тела, заданы напряжения σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$. С учетом изложенного выше концентрация микротрещин в случайном сечении тела будет определяться по выражению вида (3)

$$\varepsilon_i = F_i(\bar{\sigma}'_{33}) = \left(\frac{\bar{\sigma}'_{33}}{\sigma_i}\right)^{\alpha_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{18}$$

где для локального напряжения $\bar{\sigma}'_{33}$ при растяжении $(\sigma_{ij} > 0)$ и сжатии $(\sigma_{ij} < 0)$ соответственно имеют место формулы

$$\bar{\sigma}'_{33} \approx \frac{\sigma'_{33}}{1 - F_1(\bar{\sigma}'_{33})}, \qquad \bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}, \tag{19}$$

σ'_{33} – нормальное к плоскости случайного сечения напряжение, которое через заданные в лабораторной системе координат напряжения определяется по формулам (11), (12).

Статистический критерий прочности представим в виде соотношения

$$\varepsilon_{im} = F_i(\bar{\sigma}'_{33m}) \le \varepsilon_{icr}, \qquad i = 1, 2. \tag{20}$$

Здесь $\varepsilon_{im} = F_i(\bar{\sigma}'_{33m})$ – концентрация трещин в сечении с максимальным локальным нормальным истинным напряжением $\bar{\sigma}'_{33m}$, которая при растяжении определяется из уравнения

$$\varepsilon_{1m}(1-\varepsilon_{1m})^{\alpha_1} = (\sigma'_{33m}/\sigma_1)^{\alpha_1},$$

где σ'_{33m} – максимальное условное напряжение в случайном сечении тела. При сжатии имеем $\varepsilon_{2m} = (\sigma'_{33m}/\sigma_2)^{\alpha_2}$ в силу совпадения истинных и условных напряжений.

Критические значения концентрации микротрещин ε_{icr} при растяжении либо сжатии в (20) определяются по соотношениям

$$\varepsilon_{1cr}(1-\varepsilon_{1cr})^{\alpha_1} = (\sigma'_{\text{в}1}/\sigma_1)^{\alpha_1}, \qquad \varepsilon_{2cr} = (\sigma'_{\text{в}2}/\sigma_2)^{\alpha_2}. \tag{21}$$

Отметим, что накопление микротрещин в материале зависит от особенностей нагружения тела (многократность, скорость, продолжительность нагружения и др.). Предположим, что до начала деформирования в материале существовала начальная микроповрежденность плотностью ε_{i0}. Функция распределения $F_i(\sigma)$ в этом случае будет определять относительную долю оставшихся в сечении тела с относительной площадью $(1-\varepsilon_{i0})$ неразрушенных структурных элементов, в которых предел прочности равен или меньше некоторого значения σ. Поэтому, если в неразрушенной части сечения материала напряжения $\bar{\sigma}'_{33} \ge \sigma$, то функция $F(\bar{\sigma}'_{33})$ будет определять относительное содержание разрушенных микроэлементов в оставшейся относительной части $(1-\varepsilon_{i0})$. Тогда при монотонном (статическом) повышении условных локальных напряжений до значений σ'_{33} концентрация микротрещин в случайном сечении тела достигнет величины, определяемой выражением

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i0} + (1-\varepsilon_i)F_i(\bar{\sigma}'_{33}) = \varepsilon_{i0} + (1-\varepsilon_i)(\bar{\sigma}'_{33}/\sigma_i)^{\alpha_i}, \qquad i = 1, 2,$$

где $\bar{\sigma}'_{33}$ при растяжении и сжатии соответственно имеет вид

$$\bar{\sigma}'_{33} \approx \frac{\sigma'_{33}}{1-\varepsilon_1}, \qquad \bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}.$$

Соотношения типа (21) в этом случае при $\varepsilon_{i0} = 0$ принимают вид

$$\varepsilon_{1cr}(1-\varepsilon_{1cr})^{\alpha_1 - 1} = (\sigma'_{33}/\sigma_1)^{\alpha_1}; \qquad \varepsilon_{2cr} = (1-\varepsilon_{2cr})(\sigma'_{33}/\sigma_2)^{\alpha_2}. \tag{21a}$$

Аналогичный подход к определению накопления микродефектов описан в [10]. Формулы (18)–(21) следует считать справедливыми при мгновенном достижении средними по телу напряжениями σ_{ij} заданных значений.

Предлагаемый статистический критерий прочности более универсален по сравнению с классическими силовыми либо энергетическими, поскольку критическое значение плотности микродефектов является общим признаком начала разрушения материала независимо от характера нагружения. При растягивающих напряжениях разрушение отождествляется с началом слияния микротрещин по достижении критического значения плотности микротрещин. При сжатии разрушение происходит по другому механизму, связанному со структурной локальной потерей устойчивости [6]. Представляется, что рассматриваемый критерий имеет перспективы при исследовании разрушения при повторном и циклическом нагружении тел.

Критерий (20) относительно локального распределения микроразрушений в плоскостях случайных сечений можно обобщить на случай сложного напряженного состояния, связав его с осредненными значениями объемной плотности микротрещин для различных вариантов нагружения. В этом случае имеют место соотношения

$$p_i \le p_{icr}, \qquad i = 1, 2, \tag{22}$$

где p_i – объемные концентрации микродефектов при растяжении и сжатии, определяемые формулами (9); p_{icr} – критические значения объемной плотности, определяемые по опытным данным для одноосного нагружения.

В частности, при $\alpha_i = 2$ $(i = 1, 2)$ в соответствии с формулами (9), (18) при трехосном напряженном состоянии $(\sigma_{11} \ne \sigma_{22} \ne \sigma_{33} \ne 0)$ плотности объемной концентрации микродефектов при растяжении p_1 и сжатии p_2 находим из выражений

$$p_1(1 - p_1)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}{\sigma_1^2}\right) + \frac{2}{15}\left(\frac{\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}}{\sigma_1^2}\right); \tag{23}$$

$$p_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}{\sigma_2^{22}}\right) + \frac{2}{15}\left(\frac{\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}}{\sigma_2^2}\right). \tag{24}$$

На основании (23), (24) значения концентрации трещин при одноосном $(\sigma_{11} \ne 0,\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0)$, равномерных двухосном $(\sigma_{11} = \sigma_{22} \ne 0,\ \sigma_{33} = 0)$ и трехосном $(\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} \ne 0)$ растяжении и сжатии соответственно определяются из соотношений

$$\begin{gathered} p_1(1 - p_1)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1}\right)^2 = c_1; \qquad p_1(1 - p_1)^2 = \frac{8}{15}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1}\right)^2 = c_2; \\ p_1(1 - p_1)^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1}\right)^2 = c_3; \end{gathered} \tag{25}$$

$$p_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_2}\right)^2; \qquad p_2 = \frac{8}{15}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_2}\right)^2; \qquad p_2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_2}\right)^2. \tag{26}$$

С учетом формул Кардана из уравнений (25) следуют выражения для объемной плотности микродефектов при одно- ($i=1$), двух- ($i=2$) и трехосном ($i=3$) напряженном состоянии:

$$p_1^i = -\sqrt[3]{|a|_i}\left(\cos\frac{\varphi_i}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\varphi_i}{3}\right) + \frac{2}{3},$$

где

$$|a|_i = \sqrt{\left(\frac{1}{2}c_i - \frac{1}{27}\right)^2 + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{4}c_i^2\right)}; \qquad \varphi_i = \arccos\frac{27c_i - 2}{54|a|_i}. \tag{27}$$

Числовой пример. Рассмотрим процедуру применения статистического критерия прочности к некоторым вариантам напряженного состояния материала, имеющего следующие характеристики:

$$\begin{cases} E = 4{,}2\cdot 10^{11}\ \text{Па}; \quad \nu = 0{,}2; \quad \sigma'_{\text{в}1} = 1{,}33333\cdot 10^9\ \text{Па}; \\ D_1 = 0{,}47139\cdot 10^9\ \text{Па}; \quad \sigma_1 = 3{,}46409\cdot 10^9; \quad \langle \bar{\sigma}'_{\text{в}33}\rangle = 2{,}30939\cdot 10^9\ \text{Па}; \\ \bar{\sigma}'_{\text{в}33\max} = 2\cdot 10^9\ \text{Па}; \quad \alpha_1 = 2; \quad \sigma'_{\text{в}2} = 1{,}86666\cdot 10^9\ \text{Па}; \\ D_2 = 0{,}65996\cdot 10^9\ \text{Па}; \quad \sigma_2 = 2{,}8\cdot 10^9; \quad \alpha_2 = 2; \quad k_{w1} = k_{w2} = 0{,}35355. \end{cases} \tag{28}$$

Для материала с упругими параметрами (28) критические значения концентрации микротрещин в плоских сечениях на основании (21) составляют

$$\varepsilon_{1cr} = 0{,}33333, \qquad \varepsilon_{2cr} = 0{,}44444. \tag{29}$$

Осредненные критические объемные концентрации микродефектов согласно (25)–(27) с учетом (28) при одноосном растяжении и сжатии таковы:

$$p_{1cr} = 0{,}031547; \qquad p_{2cr} = 0{,}08889. \tag{30}$$

Предельные значения напряжений при двух- и трехосном напряженном состоянии при заданных критических концентрациях микродефектов (30) определяются по формулам (25), (26). В случае двухосного равномерного растяжения в соответствии с (25) имеем

$$0{,}031547(1-0{,}031547)^2 = \frac{8}{15}(\sigma_{11}/\sigma_1)^2,$$

откуда следует $\sigma_{11} = 0{,}81529\cdot 10^9$ Па, при трехосном напряженном состоянии – $\sigma_{11} = 0{,}59586\cdot 10^9$ Па.

Аналогично определяются предельные напряжения при сжимающих напряжениях. В таблице приведено сравнение предельных напряжений для указанных вариантов напряженного состояния, рассчитанных по статистическому критерию прочности (22) (значения в квадратных скобках), с таковыми, найденными по критериям прочности Миролюбова и Ягна [16]. В качестве напряженного состояния неограниченной среды рассмотрены одно-, двух- и трехосное равномерные растяжение и сжатие. Сравнение приведено для среды с параметрами упругости (28) при критических значениях плотности микродефектов (30).

Предельные значения напряжений, рассчитанные по различным критериям прочности

σ_{ii}	По критерию прочности Миролюбова		По критерию прочности Ягна		По (22)	
	$\sigma_{11}^{+}\cdot 10^{-9}$, Па	$\sigma_{11}^{-}\cdot 10^{-9}$, Па	$\sigma_{11}^{+}\cdot 10^{-9}$, Па	$\sigma_{11}^{-}\cdot 10^{-9}$, Па	$\sigma_{11}^{+}\cdot 10^{-9}$, Па	$\sigma_{11}^{-}\cdot 10^{-9}$, Па
$\sigma_{11}\neq 0$	1,3333	1,8667	1,3333	1,8667	1,3333	1,8667
$\sigma_{11}=\sigma_{22}$	1,1667	2,3333	$\frac{1{,}1320}{0{,}9577}$	$\frac{2{,}1987}{1{,}6243}$	[0,8153] (1,6804) 1,2639*	[1,3067] (2,0869) 1,7394*
$\sigma_{11}=\sigma_{22}=$ $=\sigma_{33}$	3,1111	3,1111	$\frac{1{,}5556}{0{,}8126}$	$\frac{1{,}5556}{1{,}7015}$	[0,5959] (1,2272) 0,9230*	[0,6969] (1,5241) 1,2703*

Примечание. Знаками "+" и "–" соответственно обозначены растягивающие и сжимающие предельные напряжения; данные над чертой соответствуют критерию Баландина, под чертой – критерию Шлейхера [16].

Допустимые значения напряжений по критерию Ягна связаны с предельными значениями сдвиговой прочности:

$$\tau_{\text{в}}=\sqrt{\frac{\sigma'_{\text{в}1}\sigma'_{\text{в}2}}{3}};\qquad \tau_{\text{в}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\sigma'_{\text{в}1}\sigma'_{\text{в}2}}{\sigma'_{\text{в}1}+\sigma'_{\text{в}2}}}.$$

В рассмотренном примере критерий (22) дает заниженные значения предельных напряжений, поскольку в основу его положены осредненные критические значения плотности микродефектов (30). Результаты можно уточнить путем подходящего выбора критических значений объемной концентрации микротрещин, например, увязав их с расстояниями между микродефектами на плоскости и в объеме.

На единичной площади плоского сечения с разрушающим нормальным напряжением $\sigma_{i\text{в}}$ ($i=1$ – растяжение, $i=2$ – сжатие) критическая концентрация микродефектов может быть представлена отношением $\varepsilon_{icr}=N_{0in}/N_n$ (N_{0in}, N_n – соответственно число разрушенных и общее число структурных элементов, пересекаемых нормальной к направлению одноосного нагружения плоскостью сечения). Расстояния между центрами указанных элементов определяются по формулам

$$R_{0in} = 1/\sqrt{N_{0in}}; \qquad R_n = 1/\sqrt{N_n}.$$

Аналогичные соотношения можно записать для единичного представительного объема материала:

$$p_{ik} = N_{0i\text{o}} / N_\text{o}; \qquad R_{0i\text{o}} = 1/\sqrt[3]{N_{0i\text{o}}}; \qquad R_\text{o} = 1/\sqrt[3]{N_\text{o}}.$$

Отношения расстояний между разрушенными структурными элементами к неразрушенным в плоском сечении и объеме соответственно определяются выражениями

$$a_{in} = \sqrt{N_n / N_{0in}} = \sqrt{1/\varepsilon_{icr}}; \qquad a_{i\text{o}} = \sqrt[3]{N_\text{o} / N_{0i\text{o}}} = \sqrt[3]{1/p_{icr}}. \tag{31}$$

Предполагаем, что разрушение в объеме начинается, если относительные расстояния между разрушенными элементами совпадают с таковыми в плоскости при одноосном нагружении. Тогда с учетом (31) при известном значении ε_{icr} объемная критическая концентрация микродефектов будет определяться формулой

$$p_{icr} = (\varepsilon_{icr})^{3/2}. \tag{32}$$

В рассматриваемом примере с учетом (29) имеем

$$p_{1cr} = 0{,}19245; \qquad p_{2cr} = 0{,}29629.$$

Соответствующие значения предельных напряжений, вычисленные на основании соотношений (25), (26), представлены цифрами в круглых скобках.

Критические значения микродефектов, вычисленные по формулам (21а), (32), составляют:

$$\varepsilon_{1cr} = 0{,}18086; \qquad \varepsilon_{2cr} = 0{,}30769; \qquad p_{1cr} = 0{,}076915; \qquad p_{2cr} = 0{,}17068.$$

Соответствующие значения допускаемых напряжений при равномерном двух- и трехосном растяжении и сжатии материала представлены в таблице цифрами со звездочкой.

Вычисленные с учетом статистического критерия прочности предельные значения напряжений при двух- и трехосном напряженном состоянии занимают промежуточное положение между таковыми, полученными по другим критериям [16].

Заключение. На основании современных представлений о механизме макроразрушения хрупких материалов предложен статистический критерий разрушения, связанный с увеличивающейся повреждаемостью в виде растрескивания структурных элементов. Данный критерий более универсален по сравнению с известными силовыми и энергетическими, поскольку критическое значение плотности микродефектов, с которым связывается наступление макроразрушения, является общим признаком разрушения материала независимо от вида нагружения.

Резюме

На основі імовірнісної моделі механізму крихкого мікроруйнування (мікропошкоджуваності), що призводить до макроруйнування матеріалів, запропоновано статистичну інтерпретацію критеріїв міцності, які пов'язують початок макроруйнування з виникненням макротріщин при розтягуванні або втратою стійкості у внутрішній структурі при стисканні з досягненням деякого (критичного) значення густини мікродефектів у матеріалі. Суть критерію полягає в порівнянні значень концентрації мікродефектів, зумовлених заданим видом навантаження тіла, з їх критичним значенням, яке для даного матеріалу не залежить від виду напруженого стану.

1. *Болотин В. В*. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
2. *Волков С. Д*. Статистическая теория прочности. – М.: Машгиз, 1960. – 176 с.
3. *Афанасьев Н. Н*. Статистическая теория усталостной прочности металлов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1953. – 128 с.
4. *Babich D. V. and Bastun V. N*. On dispersed microdamageability of elastic-brittle materials under deformation // J. Strain Analysis. – 2010. – **45**, No. 1. – P. 57 – 66.
5. *Владимиров В. И*. Физическая теория пластичности и прочности. Ч. II. Точечные дефекты. Упрочение и возврат. – Л.: Изд. ЛПИ им. М. И. Калинина, 1975. – 152 с.
6. *Гузь А. Н*. Основы механики разрушения композитов при сжатии. В 2 т. Т. 1. Разрушение в структуре материалов. – Киев: Литера, 2008. – 735 с.
7. *Журков С. Н*., *Куксенко В. С*. Микромеханика разрушения полимеров // Механика полимеров. – 1974. – № 5. – С. 792 – 801.
8. *Канторова Т. А*., *Френкель Я. И*. Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // Журн. техн. физики. – 1941. – **11**, вып. 3. – С. 173 – 183.
9. *Новиков И. И*., *Ермишкин В. А*. Микромеханизмы разрушения металлов. – М.: Наука, 1991. – 362 с.
10. *Тамуж В. П*., *Куксенко В. С*. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
11. *Фрейденталь А. М*. Статистический подход к хрупкому разрушению // Разрушение. В 7 т. / Под ред. Г. Либовица. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – С. 616 – 645.
12. *Салганик Р. Л*. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149 – 158.
13. *Khoroshun L. P*. Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, No. 10. – P. 1120 – 1127.

14. *Кильчевский Н. А*. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 479 с.

15. *Кендалл М*., *Моран П*. Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.

16. *Гольденблат И. И*., *Копнов В. А*. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.

Поступила 09. 09. 2010