

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВТОРИЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЭНЕРГИЮ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ

*В.А. Буц, А.П. Толстолужский*

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,  
Харьков, Украина*

*E-mail: vbuts@kipt.kharkov.ua*

Рассмотрены динамика линейных слабосвязанных колебательных систем при наличии низкочастотного возмущения, а также системы с двумя степенями свободы и распределенные. Найдены условия, когда воздействие низкочастотных колебаний может приводить к параметрическому усилению амплитуд высокочастотных колебаний.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что вторичные резонансы могут играть существенную роль в динамике гамильтоновых систем только при достаточно большой величине возмущения (см, например, [1]). Действительно, если величина возмущения мала ( $\varepsilon \ll 1$ ), то величины эффектов, связанных со вторичными резонансами, малы (например, ширина вторичных нелинейных резонансов) и пропорциональны  $1/(1/\varepsilon)!$ . В работах [2-4] было показано, что для многих динамических систем, которые не описываются уравнениями Гамильтона, наличие внешнего периодического возмущения может приводить к параметрическому усилению амплитуд высокочастотных колебаний, которые участвуют в резонансном взаимодействии (первичные резонансы). Оказалось, что это могут быть либо нелинейные системы, либо системы с невзаимными связями. Возможность параметрического усиления высокочастотных колебаний с помощью внешнего низкочастотного возмущения, кроме общефизического интереса, представляет большой практический интерес. Действительно, такой механизм потенциально позволяет преобразовывать энергию, например, лазерного излучения в энергию рентгеновского излучения и, вообще, открывает новые каналы связи между высокочастотными и низкочастотными колебаниями. Простым примером реализации вторичных резонансов может служить детская игрушка, которая представляет собой пуговицу, в которую продета нитка. Быстрое вращение пуговицы в одном направлении можно рассматривать как одну колебательную моду. Вращение пуговицы на другую сторону, соответственно, будет второй колебательной модой. Взаимодействие (между этими модами) происходит через закрученную нить. Медленное (по сравнению с вращением пуговицы) растягивание нити руками можно рассматривать как внешнее низкочастотное возмущение. Энергия этого возмущения переходит в энергию быстрых вращений пуговицы. Нужно сказать, что математическая модель такой простой детской игрушки оказывается достаточно сложной. Эта модель является существенно нелинейной.

В настоящей работе мы ограничимся более простыми линейными динамическими системами. Од-

нако механизм преобразования энергии низкочастотных движений в этих системах в энергию высокочастотных движений принципиально оказывается тем же самым. Вначале, в разд. 2, будут рассмотрены самые простые линейные колебательные системы, в которых возможно наблюдать эффект вторичных резонансов. Наиболее интересной является возможность параметрического усиления колебаний двух связанных резонаторов. Аналитически и численно будет показано, что только при наличии взаимной связи между такими резонаторами возможно преобразование энергии низкочастотных колебаний в высокочастотные. В третьем разделе анализируется возможность преобразования энергии низкочастотного излучения в энергию высокочастотных колебаний в распределенных периодически неоднородных средах (лазерного излучения в энергии рентгеновского излучения в идеальных кристаллах).

## 2. СИСТЕМЫ С НЕБОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Проиллюстрируем сформулированное утверждение на простейшем примере. Этим примером может быть система двух связанных одинаковых осцилляторов, связи между которыми зависят от времени и, в общем случае, невзаимные. Систему уравнений, которая описывает динамику таких осцилляторов, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= \mu_1(\tau) \cdot x_2, \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= \mu_2(\tau) \cdot x_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Если  $(\mu_1/\mu_2) \neq const$  система (1) не может быть записана в гамильтоновом виде (гамильтониан для системы (1) в общем случае может быть написан в расширенном фазовом пространстве). Причина отсутствия гамильтониана заключается в том, что виртуальная работа реакций связей не равна нулю, т.е. связи в этом случае являются неидеальными.

Физическим примером системы, которая может быть описана системой уравнений (1), является динамика полей двух связанных одинаковых резонаторов (Рис.1). Причем связи между этими резонаторами  $\mu_k(t)$ , в общем случае, разные. Такие связи можно осуществить, например, с помощью каналов, которые имеют гиротропные вставки.

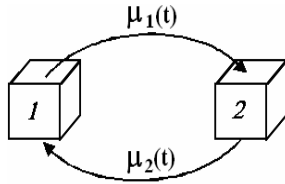


Рис.1. Резонаторы с обратной связью

В самом деле систему уравнений, которая описывает динамику взаимодействия таких резонаторов, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E}_1 &= \mu_1(t) \cdot \bar{E}_2, \\ \Delta \bar{E}_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E}_2 &= \mu_2(t) \cdot \bar{E}_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение этой системы уравнений будем искать в виде  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \exp(i\vec{k}\vec{r})$ . Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \bar{E}_1 + \bar{E}_1 &= \mu_1(t) \cdot \bar{E}_2, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} \bar{E}_2 + \bar{E}_2 &= \mu_2(t) \cdot \bar{E}_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где введены безразмерные переменные  $\tau = kc \cdot t$ ,  $\mu_i(\tau) = -\mu_i(t) / k^2$ .

Для наших целей, не нарушая общности, исследование системы (3) можно проводить в одномерном приближении. При этом, полагая, что  $x_i \equiv x_i(\tau)$  представляет собой одну из компонент поля  $\vec{E}_i$ , нетрудно убедиться в полном соответствии системы (3) с системой (1).

При малых коэффициентах связи ( $\mu_i \ll 1$ ) для определения медленно меняющихся амплитуд  $a_i(t)$  колебаний маятников, для решения  $x_i = a_i(t) \cdot \exp(it)$ , получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2i} \mu_1 \cdot a_2, \quad \dot{a}_2 = \frac{1}{2i} \mu_2 \cdot a_1. \quad (4)$$

Пусть коэффициенты связи имеют вид:  $\mu_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \cos(\gamma \cdot t)$ , где  $\alpha_i, \beta_i$  – постоянные. Если  $\beta_i = 0$ , то возникает периодическая модуляция амплитуд  $a_i$  с частотой  $\Omega = \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2} / 2$ , т.е. энергия одного маятника перекачивается в энергию другого и обратно. На Рис. 2-3 представлены графики зависимости амплитуд  $x_1(\tau), a_1(\tau)$  и  $x_2(\tau), a_2(\tau)$  от времени при  $\beta_i = 0, \alpha_1 = 0.09$  и  $\alpha_2 = 0.04$ .

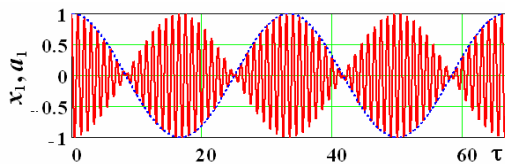


Рис.2. Зависимость амплитуд  $x_1(\tau)$  и  $a_1(\tau)$  от времени:  $x_1(\tau)$  – сплошная линия;  $a_1(\tau)$  – пунктирная

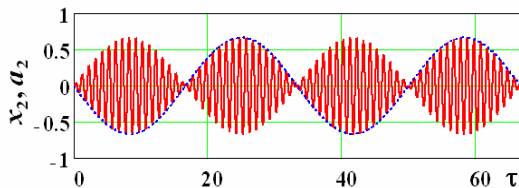


Рис.3. Зависимость амплитуд  $x_2(\tau)$  и  $a_2(\tau)$  от времени:  $x_2(\tau)$  – сплошная линия;  $a_2(\tau)$  – пунктирная

Начальные амплитуды  $x_1(\tau=0) = a_1(\tau=0) = 1$ . Время счета  $\tau_{fin} = 2T = 4\pi/\Omega$ . Время измеряется в периодах основной частоты  $T_{bas} = 2\pi$ , равной единице.

При  $\beta_i \neq 0$  система уравнений (4) эквивалентна уравнению Хилла. При этом возможен рост амплитуды взаимодействующих осцилляторов. Отметим, что из системы (4), в частности, следует

$$d(a_i^2) = (\mu_1/\mu_2) d(a_2^2). \quad (5)$$

Если отношение коэффициентов связи не зависит от времени ( $(\mu_1/\mu_2) \neq const$ ), то система (4) имеет следующий интеграл:

$$a_1^2 - (\mu_1/\mu_2) a_2^2 = const. \quad (6)$$

При выполнении (6) система (4) не имеет нарастающих решений. Действительно, наличие интеграла (6) позволяет выразить одну из амплитуд через другую. Этот факт, в свою очередь позволяет получить решение системы (4) в элементарных функциях. Усиление при этом отсутствует. На Рис.4-5 показаны графики зависимости амплитуд  $x_1(\tau), a_1(\tau)$  и  $x_2(\tau), a_2(\tau)$  от времени при  $\alpha_1 = 0.09, \alpha_2 = 0.04; \beta_1 = 0.045, \beta_2 = 0.02; \gamma_1 = \gamma_2 = 2\Omega$ .

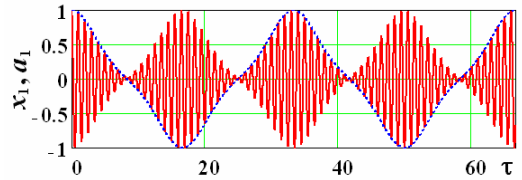


Рис.4. Зависимость амплитуд  $x_1(\tau)$  и  $a_1(\tau)$  от времени:  $x_1(\tau)$  – сплошная линия;  $a_1(\tau)$  – пунктирная

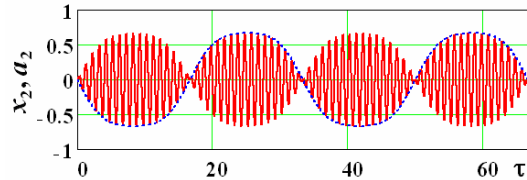


Рис.5. Зависимость амплитуд  $x_2(\tau)$  и  $a_2(\tau)$  от времени:  $x_2(\tau)$  – сплошная линия;  $a_2(\tau)$  – пунктирная

Как видно из этих графиков, при малых значениях параметра связи,  $\mu_i \ll 1$ , решение системы уравнений (4) является огибающей для полной системы уравнений (1). При численном решении закон сохранения (6) выполнялся с относительной точностью до величины порядка  $10^{-13}$ .

Из (4) также следует, что в первом приближении по параметру  $\beta_i/\alpha_i$  интеграл (6) существует, если  $\beta_1/\alpha_1 \rightarrow \beta_2/\alpha_2$ . Можно показать, что чем больше различие в величинах  $\beta_1/\alpha_1$  и  $\beta_2/\alpha_2$ , тем большим будет инкремент параметрического усиления.

Если  $(\mu_1/\mu_2) \neq const$  и выполнено условие параметрического резонанса  $\gamma = 2\Omega$ , тогда наблюдается нарастание амплитуд связанных осцилляторов. Пусть для определенности  $\beta_1/\alpha_1 \gg \beta_2/\alpha_2$  и выполнено условие параметрического резонанса  $\gamma = 2\Omega$ . Тогда, воспользовавшись теорией возмущения, найдем, что амплитуды связанных осцилляторов экспоненциально увеличиваются:

$$a_1 \sim a_2 \sim \exp(\Phi t), \quad (7)$$

где  $\Phi = (\beta_1/2 \cdot \alpha_1)$ .

На Рис.6-7 представлены графики зависимости амплитуд  $x_1(\tau)$ ,  $a_1(\tau)$  и  $x_2(\tau)$ ,  $a_2(\tau)$  от времени при  $\alpha_1 = 0.09$ ,  $\alpha_2 = 0.04$ ;  $\beta_1 = 0.09$ ,  $\beta_2 = 0.004$ ;  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2\Omega$ .

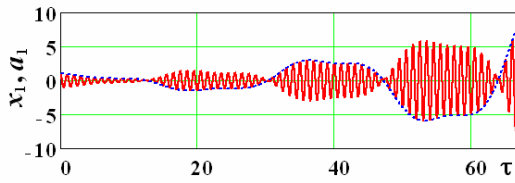


Рис.6. Зависимость амплитуд  $x_1(\tau)$  и  $a_1(\tau)$  от времени:  $x_1(\tau)$  – сплошная линия;  $a_1(\tau)$  – пунктирная

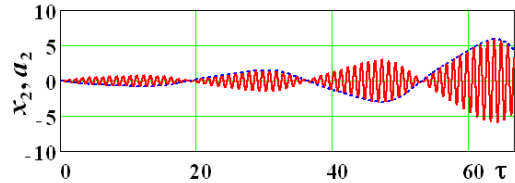


Рис.7. Зависимость амплитуд  $x_2(\tau)$  и  $a_2(\tau)$  от времени:  $x_2(\tau)$  – сплошная линия;  $a_2(\tau)$  – пунктирная

Из этих графиков хорошо видно, что имеет место нарастание амплитуд колебаний обоих осцилляторов. При этом  $\exp(\Phi \tau_{fin}) = 5.45$ , а максимальные значения:  $x_1(\tau) = 6.01$  и  $x_2(\tau) = 5.91$ , что хорошо согласуется с приведенными выше аналитическими оценками.

На Рис.8-9 приведены графики зависимости амплитуд  $x_1(\tau)$ ,  $a_1(\tau)$  и  $x_2(\tau)$ ,  $a_2(\tau)$  от времени при  $\alpha_1 = 0.09$ ,  $\alpha_2 = 0.04$ ;  $\beta_1 = 0.09$ ;  $\beta_2 = 0.01$ ;  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2\Omega$ .

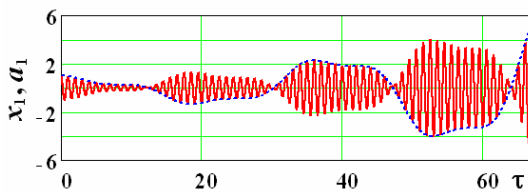


Рис.8. Зависимость амплитуд  $x_1(\tau)$  и  $a_1(\tau)$  от времени:  $x_1(\tau)$  – сплошная линия;  $a_1(\tau)$  – пунктирная

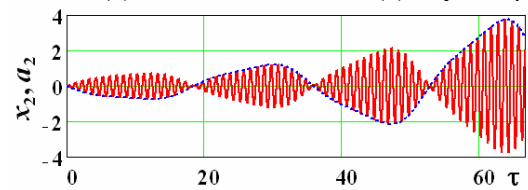


Рис.9. Зависимость амплитуд  $x_2(\tau)$  и  $a_2(\tau)$  от времени:  $x_2(\tau)$  – сплошная линия;  $a_2(\tau)$  – пунктирная

Из графиков 8-9 также видно, что имеет место нарастание амплитуд колебаний обоих осцилляторов.

### 3. ИЗУЧЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ И ОСОБЕННОСТЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОРОТКОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Таким образом, в линейной системе с двумя степенями свободы с идеальными связями отсутствует механизм параметрической перекачки энергии низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных движений. В такой системе для перекачки необходим элемент нелинейности, или связи должны быть неидеальными. Однако для многих интересных для приложений случаев, например, для рентгеновского

излучения, величины нелинейностей исчезающе малы. Для реализации условий параметрической неустойчивости в линейных системах следует организовать невзаимную (неидеальную) связь между взаимодействующими частями. Такими свойствами, по-видимому, могут обладать системы с большим числом степеней свободы. Действительно, в таких системах энергия возмущения может распространяться только в одну сторону. Если распределенную систему представить в виде бесконечной системы связанных осцилляторов, то воздействие одного осциллятора будет передаваться по цепочке вперед, не возвращаясь назад, т.е. в таких системах можно надеяться на осуществление невзаимных связей между осцилляторами. Ниже мы проанализируем такую возможность.

В качестве примера рассмотрим возможность усиления высокочастотного излучения в периодически неоднородной среде с помощью внешней волны, частота которой значительно меньше частоты усиливаемого высокочастотного (рентгеновского) излучения. Рассмотрим такой процесс. Пусть в среде со слабой периодической пространственной неоднородностью (например, в кристалле) распространяется волна. Диэлектрическую проницаемость такой среды представим в виде  $\varepsilon = 1 + q \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$  ( $q \ll 1$ ). При выполнении условий Лауэ энергия этой волны преобразовывается в энергию волны минус первого порядка дифракции. Такое преобразование происходит на длине экстинкции. По порядку величины длину экстинкции можно оценить величиной  $L \sim \lambda / q$ , где  $\lambda$  – длина волны распространяющегося излучения. Видно, что преобразование происходит на расстоянии, значительно большем длины волны. Такой процесс носит периодический характер – энергия волны минус первого порядка дифракции, в свою очередь, преобразуется в энергию исходной волны. Амплитуды волн исходной волны и волны минус первого порядка дифракции периодически меняются. Такое решение для амплитуд носит название маятниковое решение. Можно считать, что у нас имеется два маятника, которые связаны друг с другом через слабую неоднородность. В наших моделях такое взаимодействие волн можно рассматривать как первичное резонансное взаимодействие. До взаимодействия волны имели один характерный размер – длина волны. При наличии взаимодействия появляется другой, значительно больший, характерный размер – длина экстинкции. Можно рассчитывать, что если мы организуем внешнее низкочастотное возмущение, которое будет находиться в резонансе с маятниковым решением, то мы добьемся усиления исходных высокочастотных волн. Пусть теперь среда, в которой взаимодействуют волны, подвергается внешнему возмущению. Причем, внешнее возмущение таково, что оно меняет диэлектрическую проницаемость среды. Ниже мы рассмотрим две модели такого изменения:

- 1)  $\varepsilon = 1 + q \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) + Q(z, t)$ ;
- 2)  $\varepsilon = 1 + q \cdot (1 + Q(z, t)) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$ .

Отметим, что такие изменения диэлектрической проницаемости, например кристаллов, можно осуществить путем воздействия на него лазерным излучением. Первая модель модификации диэлектрической проницаемости была рассмотрена в работе [2, 3]. В ней  $Q(z, t) \leq q$ . Однако, как мы увидим, она, по-видимому, не позволяет добиться параметрического усиления. Вторая модель, как мы покажем, позволяет осуществить параметрическое усиление исходных высокочастотных волн. В ней  $Q(z, t) \leq 1$ .

Укороченные уравнения, описывающие эволюцию амплитуд высокочастотных для первой модели волн, можно представить в виде [5]:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial A_0}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial A_0}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i} \left[ Q_0 A_0 + \frac{q_0}{2} A_1 \right], \\ \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i} \left[ Q_1 A_1 + \frac{q_0}{2} A_0 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A_0, A_1$  – медленно меняющиеся амплитуды внешней и дифрагированной волн соответственно, коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  определяются волновыми векторами волн. Коэффициенты  $\mu_0$  и  $\mu_1$  обусловлены нестационарностью. Эта нестационарность возникает вследствие внешней низкочастотной волны накачки, которая описывается функциями  $Q_i = \varepsilon_i \cos(Kz - \Omega\tau)$  ( $i=0,1$ ), где  $K$  – волновое число волны накачки,  $\Omega$  – ее частота. При этом значения этих величин значительно меньше, чем соответствующие значения для высокочастотных (рентгеновских) волн. Величины  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  определяют амплитуды волн накачки, а  $q_0$  и  $q_1$  – влияние кристаллической решетки на внешнюю и дифрагированную высокочастотные (рентгеновские) волны. По физическому содержанию решаемой задачи эти коэффициенты удовлетворяют условиям  $0 < q_0, q_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \leq 1$ .

Укороченные уравнения, описывающие эволюцию амплитуд высокочастотных волн для второй модели, можно записать в аналогичном (8) виде:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial A_0}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial A_0}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{q \cdot (1+Q)}{2} A_1 \right], \\ \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{q \cdot (1+Q)}{2} A_0 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Определим сначала наиболее общие условия, при выполнении которых система уравнений (8) может иметь нарастающие решения. Для этого системе уравнения (8) в частных производных перепишем в виде системы характеристических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dz} &= \frac{1}{2i\alpha_0} \left[ Q_0 \cdot A_0 + \frac{q_0}{2} A_1 \right], \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{\mu_0}{\alpha_0}, \\ \frac{dA_1}{dz} &= \frac{1}{2i\alpha_1} \left[ Q_1 \cdot A_1 + \frac{q_1}{2} A_0 \right], \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{\mu_1}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Первая пара уравнений в (10) эквивалентна первому уравнению системы (8), вторая пара – второму уравнению. Легко увидеть, что если функции  $Q_0$  и  $Q_1$  совпадают и совпадают характеристики  $(\mu_0/\alpha_0 = \mu_1/\alpha_1)$ , то система (8) полностью интегрируема. Наличие низкочастотных возмущений при этом приводит только к усложнению динамики ам-

плитуд  $A_k$ . Легко также видеть, что если хотя бы одно из этих условий (совпадение характеристик и равенство функций  $Q_0$  и  $Q_1$ ) не выполняется, то в общем случае система уравнений (8) (или (10)) может иметь решение, которое описывает параметрическое усиление.

Система уравнений (8) была проанализирована в работах [2, 4]. Были найдены условия параметрического усиления высокочастотных волн. Однако, как показали численные расчеты, усиление отсутствовало. Такой довольно неожиданный результат обусловлен тем фактом, что, как оказалось, наряду с основным параметрическим резонансом существует второй параметрический резонанс. Причем, амплитуды и фазы этих резонансов таковы, что они гасят друг друга. Чтобы показать это, мы ограничимся случаем, когда характеристики первого и второго уравнений системы (8) совпадают.

Пусть коэффициенты  $Q_i$  являются периодическими функциями времени  $\tau$  и координаты  $z$ . Выберем эту зависимость в виде  $Q_i = \varepsilon_i \cdot \cos(Kz + \Omega\tau)$ . Для совпадающих характеристик эту зависимость можно записать:  $Q_i = \varepsilon_i \cdot \cos(K\xi)$ ,  $\Omega/K = \alpha/\mu$ ,  $\xi_k = z + \alpha_k \cdot \tau / \mu_k$ .

Тогда для отыскания амплитуд взаимодействующих волн ( $A_0$  и  $A_1$ ) можно получить следующие независимые уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_0}{d\xi^2} + (1 + \eta \cos(2\Delta k \xi)) Y_0 + i\vartheta \sin(\Delta k \xi) Y_0 &= 0, \\ \frac{d^2 Y_1}{d\xi^2} + (1 + \eta \cos(2\Delta k \xi)) Y_1 - i\vartheta \sin(\Delta k \xi) Y_1 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $Y_k = A_k \exp\left(\frac{1}{2} i \int X_1 d\xi\right)$ ,  $X_1 = \frac{1}{4} i \left( \frac{Q_0}{\alpha_0} + \frac{Q_1}{\alpha_1} \right)$ ,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(\varepsilon_1 \alpha_0 - \varepsilon_0 \alpha_1)^2}{2q_0 q_1 \alpha_0 \alpha_1 + (\varepsilon_1 \alpha_0 - \varepsilon_0 \alpha_1)^2}, \quad \vartheta = \frac{1}{8} \frac{K}{\omega_0} \left( \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} - \frac{\varepsilon_0}{\alpha_0} \right), \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{64} \frac{q_0 q_1}{\alpha_0 \alpha_1} \left( 1 + \frac{(\varepsilon_1 \alpha_0 - \varepsilon_0 \alpha_1)^2}{2q_0 q_1 \alpha_0 \alpha_1} \right), \quad \xi = \omega_0 \xi; \quad \Delta k = \frac{K}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Как видно, уравнения системы (11) при  $\theta=0$  и  $\Delta k=1$  представляют собой уравнение Матье с действительными параметрами. Если, наоборот,  $\eta=0$ , а  $\vartheta \neq 0$ , то мы получим уравнение с комплексными параметрами. По своим характеристикам это уравнение аналогично уравнению Матье. Однако в общем случае и  $\theta \neq 0$ , и  $\eta \neq 0$ . Более того, в резонансе параметры  $\eta$  и  $\theta$  однозначно связаны. Причем связь всегда такова, что эти два резонанса гасят друг друга. Численные расчеты как системы уравнений (11), так и исходной системы (8) показали, что ни при каких значениях параметров системы усиления высокочастотных волн не происходит.

Рассмотрим теперь вторую модель диэлектрической проницаемости. Динамика амплитуд взаимодействующих волн при этом описывается системой уравнений (9). Легко видеть, что если характеристики первого и второго уравнений системы (9) совпадают, то эта система имеет интеграл:

$$\alpha_0 \cdot A_0^2 - \alpha_1 \cdot A_1^2 = const. \quad (12)$$

В этом случае так же, как и для случая взаимодействующих осцилляторов, система уравнений (9) интегрируется в элементарных функциях. Усиление такой системы отсутствует. К сожалению, так же, как это было сделано для осцилляторов (см. разд. 2), необходимо организовать невязимную связь между волнами. Покажем, что при такой невязимной связи легко добиться параметрического усиления взаимодействующих высокочастотных волн. Для простоты будем считать, что внешнее низкочастотное возмущение не действует на вторую волну (на волну минус первого порядка дифракции). При этом параметр  $Q$  исчезает из второго уравнения системы (9). Кроме того, будем считать, что параметр  $Q$  мал ( $Q \ll 1$ ). В этом случае, выбирая  $Q(\xi) = \varepsilon \cos(2K\xi)$ , система уравнений (9) может быть записана в виде уравнения Матье:

$$\frac{d^2 A_1}{d\xi^2} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \cos(2K\xi)) A_1 = 0, \quad (13)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{1}{64} \frac{q_0 q_1}{\alpha_0 \alpha_1}$ ,  $\xi = z + \alpha \cdot \tau / \mu$ .

На Рис.10 приведен график зависимости реальной части амплитуды  $\text{Re} A_0$  от  $\xi$ , полученный при решении системы уравнений (9) для случая, когда внешнее низкочастотное возмущение не действует на вторую волну (на волну минус первого порядка дифракции). Как видно из этого графика, наблюдается экспоненциальное нарастание амплитуды волны с ростом  $\xi$ .

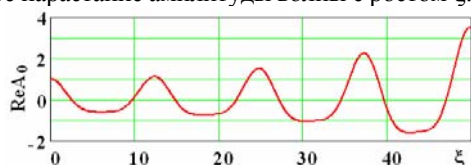


Рис.10. Зависимость  $\text{Re} A_0$  от  $\xi$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выше результаты показывают, что использование вторичных резонансов действительно позволяет преобразовать энергию низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных. Однако, как следует из этих же результатов, такая возможность является далеко нетривиальной. Как мы видели выше, во многих случаях были выполнены, казалось бы, все условия для такого преобразования, однако само преобразование не происходило. Амплитуды высокочастотных колебаний оставались без изменения. Как выяснилось, необходимы дополнительные условия на характер связей между высокочастотными модами. А именно – эти связи должны быть невязимными, т.е. влияние низкочастотной накачки, содер-

жащейся в коэффициентах связи, должно быть различным на каждую из высокочастотных мод. Действительно, как мы видели выше, при наличии взаимности (симметрии) возникают дополнительные интегралы. Наличие таких интегралов приводило к существенному упрощению динамики рассматриваемой колебательной системы и к отсутствию эффекта усиления высокочастотных колебаний за счет энергии низкочастотных колебаний. Следует, однако, заметить, что класс рассматриваемых в настоящей работе систем ограничивался только линейными системами. Кроме того, несмотря на тот факт, что в третьем разделе рассматривалась распределенная система с бесконечным числом степеней свободы, в действительности задачу удавалось свести практически к рассмотрению систем с небольшим числом степеней свободы. Более того, наш предварительный анализ указывает, что учет нелинейностей разрушает симметрию и позволяет организовать процесс с протеканием вторичных резонансов. Кроме того, можно ожидать, что не формальное, а истинное увеличение числа степеней свободы также позволит реализовать механизм вторичных резонансов. Под формальным мы понимаем, что, несмотря на большое число степеней свободы, задачу практически можно свести к малоразмерной.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Лихтенберг, М. Либман. *Регулярная и стохастическая динамика*. М.: «Мир», 1984.
2. V.A. Buts. Peculiar properties of systems under secondary resonances with an external perturbation // *Problems of Atomic Science and Technology. Special issue dedicated to the 90-th birthday anniversary of A.I. Akhiezer*. 2001, №6, с.329-333.
3. V.A. Buts. Using Secondary Resonances for Amplification of Short-Wave Radiation // *8<sup>th</sup> International Conference on Transparent Optical Networks*. Nottingham, United Kingdom, June 18-22, 2006. 2006, p.193-196.
4. В.А. Буц. Динамика систем при вторичных резонансах с низкочастотным возмущением // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2004, №1, т.9, с.59-68.
5. С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. *Введение в статистическую радиофизику и оптику*. М.: «Наука», 1981, с.640.

Статья поступила в редакцию 01.06.2010 г

### USING SECONDARY RESONANCES OF LINEAR SYSTEMS FOR TRANSFORMING ENERGY OF THE LOW FREQUENCY OSCILLATIONS TO THE ENERGY OF HIGH FREQUENCY

V.A. Buts, A.P. Tolstoluzhsky

Dynamics of linear weakly coupled oscillation systems at existing of low frequency disturbance are considered. The system with two degree of freedom and continuous systems are considered. The conditions at which the acting of the low frequency oscillations can result in parametric amplification of high frequency oscillations were found.

### ВИКОРИСТАННЯ ВТОРИННИХ РЕЗОНАНСІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ НИЗЬКОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ В ЕНЕРГІЮ ВИСОКЧАСТОТНИХ

В.О. Буц, О.П. Толстолужський

Розглянуто динаміку лінійних слабо зв'язаних коливальних систем при наявності низькочастотного збурення, а також системи з двома ступенями вільності і розподілені. Знайдено умови, коли дія низькочастотних коливальних може призводити до параметричного підсилення амплітуд високочастотних коливальних.