НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 620.178.5:620.179

Влияние амплитудно-зависимого демпфирования на вибродиагностические параметры наличия закрывающейся трещины в балке при субгармоническом резонансе

В. В. Матвеев, А. П. Яковлев, О. Е. Богинич

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Представлены результаты приближенного расчета влияния амплитудно-зависимого демпфирования на вибродиагностические параметры наличия закрывающейся краевой трещины нормального отрыва в балках прямоугольного поперечного сечения при различных граничных условиях их закрепления и виде гармонического возбуждения субгармонического резонанса какой-либо собственной формы колебаний.

Ключевые слова: вибродиагностика усталостного повреждения, закрывающаяся трещина, балка, изгибные колебания, субгармонический резонанс, амплитудно-зависимое демпфирование.

Введение. Как отмечалось ранее [1–4], анализ взаимосвязи параметров трещины усталости и колебаний упругих тел с целью разработки эффективных методов вибродиагностики таких повреждений продолжает привлекать внимание исследователей. Весомое место в исследованиях занимает изучение спектра колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной при супер- и субгармонических резонансах. Более детально исследуются одномассовая модель упругого тела и конструкции балочного типа. Однако известные исследования как аналитические, так и численные ограничиваются рассмотрением вынужденных колебаний упругого тела при учете только линейного вязкого трения.

В настоящем исследовании в развитие работ [3, 4] представлены результаты аналитического расчета значений вибродиагностических параметров наличия краевой закрывающейся трещины нормального отрыва в балке прямоугольного поперечного сечения (рис. 1) с различными граничными условиями и видом гармонического возбуждения субгармонического резонанса порядка 1/2 первой формы изгибных колебаний при амплитудно-зависимом демпфировании.

Методика расчета. Согласно результатам [3, 4] для случая настроенного субгармонического резонанса порядка 1/2 j-й формы изгибных колебаний основным вибродиагностическим параметром наличия в некотором сечении балки $x = x_т$ закрывающейся краевой трещины глубиной a является отношение максимальных амплитуд первой (резонирующей) A_{1jC} и второй $A_{2\Sigma}$ гармоник прогиба балки в каком-либо выбранном сечении x_0:

$$\overline{A}_{1/2} = \frac{A_{1jC}}{A_{2\Sigma}} = \frac{4\alpha}{3\delta(\omega_{0j},\, A_{1jC})}(1+0{,}6\alpha)\left\{\theta^2(x_0) + \frac{1}{9}\left[\frac{8(\alpha(1+0{,}6\alpha))^2}{9\pi\delta(\omega_{0j},\, A_{1jC})}\right]^2\right\}^{-0{,}5}. \qquad (1)$$

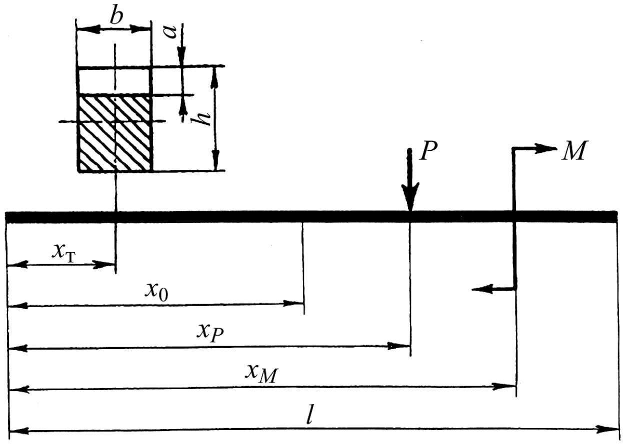

Рис. 1. Схема балки прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной и различным видом гармонического возбуждения изгибных колебаний.

Здесь $\theta(x_0)$ – отношение амплитуд суммарного прогиба N учитываемых форм колебаний $A_{2\Sigma}$ и прогиба A_{2j} по резонирующей j-й форме колебаний балки, рассматриваемой с определенным приближением как неповрежденная, в сечении x_0 при частоте возбуждения $\nu = 2\omega_j$:

$$\theta(x_0) = \frac{A_{2\Sigma}}{A_{2j}} \equiv \frac{1}{y_j(x_0)} \sum_{i=1}^{N} y_i(x_0), \tag{2}$$

где $y_i(x)$ – амплитудная функция линии прогибов цельной балки при ее вынужденных колебаниях по i-й собственной форме.

Параметр нелинейности α, равный относительному изменению при открытии трещины изгибной жесткости балки при ее деформировании по резонирующей форме в составе остальных возбуждаемых форм колебаний, выражается через энергетическую характеристику повреждения κ:

$$\alpha = \frac{\kappa}{1+\kappa}. \tag{3}$$

Характеристика κ вычисляется на основе данных о коэффициенте интенсивности нормальных напряжений и расчета методом главных координат вынужденных колебаний неповрежденной балки при $\nu = 2\omega_j$ по формуле

$$\kappa = 6\pi h \frac{B(x_т) H_1(\gamma)}{\int\limits_0^l \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)^2 dx}, \tag{4}$$

где

$$B(x_т) = \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)_{x=x_т} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_т}\right]; \tag{5}$$

$$H_1(\gamma) = 0{,}078\lambda^2[(1-\gamma)^{-2} + 0{,}5(1-\gamma)^4 - 1{,}5]; \tag{6}$$

$\lambda = 1{,}15 - 60\gamma^2$ при $0 < \gamma < 0{,}05$ и $\lambda = 1$ при $\gamma > 0{,}05$; h – высота поперечного сечения; l – длина балки; γ – относительная глубина трещины, $\gamma = a/h$.

Логарифмический декремент колебаний $\delta(\omega_{0j}, A_{1jC})$, входящий в формулу (1), является функцией максимальной амплитуды первой гармоники прогиба j-й резонирующей формы колебаний поврежденной балки A_{1jC} в сечении x_0 и соответствующей ей собственной частоты

$$\omega_{0j} = \frac{2\sqrt{1-\alpha_j}}{1+\sqrt{1-\alpha_j}}\omega_j \approx \sqrt{1-0{,}5\alpha_j}\,\omega_j, \tag{7}$$

где α_j – параметр нелинейности балки с закрывающейся трещиной при ее деформировании по одной j-й резонирующей форме колебаний, определяемый с использованием формул (3), (4) при $B(x_т) = B_j(x_т) = (d^2 y_j / dx^2)^2_{x=x_т}$; ω_j – j-я собственная частота колебаний неповрежденной балки.

Выражения для логарифмического декремента колебаний балки $\delta(\omega_{0j}, A_{1jC})$, привязанные к максимальной амплитуде первой гармоники прогиба по резонирующей форме A_{1jC}, приведены в таблице для разных видов неупругого сопротивления. Характерную для этих видов неупругого сопротивления амплитудную зависимость декремента удобно представить единой зависимостью, соответствующей эллиптической петле гистерезиса

$$\delta = k_n A_{1jC}^{n-1} \tag{8}$$

при условии

$$k_n = 4h_n\omega_0^{n-2}\phi(n) = \frac{2^{n+1}(n-1)\eta_n}{n(n+1)}. \tag{9}$$

Как видно из (1) и (3), при известной зависимости декремента от амплитуды и частоты колебаний основная задача заключается в определении характеристики повреждения (4).

Логарифмический декремент колебаний

Вид неупругого сопротивления	$\delta(\omega_{0j}, A_{1jC})$
Вязкое, пропорциональное n-й степени скорости	$4h_n\omega_{0j}^{n-2}A_{1jC}^{n-1}\phi(n)$
Эллиптическая петля гистерезиса	$k_n A_{1jC}^{n-1}$
Петля гистерезиса Давиденкова ($n > 1$)	$\frac{2^{n+1}(n-1)\eta}{n(n+1)} A_{1jC}^{n-1}$

Примечание. h_n, k_n, η – постоянные; $\phi(n) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{n+1}\varphi d\varphi$.

Для амплитудной функции линии прогибов $y_i(x)$, соответствующей i-й форме вынужденных колебаний цельной балки, имеем следующие зависимости для разных случаев гармонического возбуждения при частоте субрезонанса порядка 1/2 j-й собственной формы колебаний ($\nu = 2\omega_j$).

1. Сосредоточенная сила $P = P_0 \sin 2\omega_j t$, приложенная в сечении x_P:

$$y_i(x_P, x) = \frac{P_0 l^4}{EI(k_j l)^4} X_i(k_i x_P) X_i(k_i x) \beta_i.$$

2. Сосредоточенный момент $M = M_0 \sin 2\omega_j t$, приложенный в сечении x_M:

$$y_i(x_M, x) = \frac{M_0 l^4}{EI(k_j l)^4} X_i'(k_i x_M) X_i(k_i x) \beta_i.$$

3. Перемещение заделки $(x = 0)$ $D = D_0 \sin 2\omega_j t$:

$$y_i(x) = \frac{D_0 m \nu^2 l^4}{EI(k_j l)^4} X_i(k_i x) \int_0^t X_i(k_i x) dx \beta_i,$$

где $\beta_i = \left[\left(\dfrac{k_i l}{k_j l}\right)^4 - 4\right]^{-1}$; $X_i(k_i x)$ – i-я нормированная собственная форма изгибных колебаний (балочная функция) неповрежденной балки, соответствующая условию $\int_0^l X_i^2 dx = 1$; $k_i l$ – i-й корень частотного уравнения; m – масса единицы длины балки; EI – изгибная жесткость поперечного сечения.

При учете только одной j-й резонирующей формы колебаний в соответствии с приведенными выражениями для линии прогибов получим независящую от способа возбуждения единую формулу для определения характеристики κ_j:

$$\kappa_j = 6\pi h \frac{[X_j''(x_т)]^2}{k_j^4} H_1(\gamma). \qquad (10)$$

Результаты расчета. Рассмотрим случай субгармонического резонанса более легко возбуждаемой первой собственной формы изгибных колебаний балки $(j = 1)$ при ее размерах $b = 4 \cdot 10^{-2}$ м; $h = 5 \cdot 10^{-2}$ м; $l = 0{,}6$ м, модуле упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и наличии краевой трещины относительной глубины $\gamma = 0{,}2$. Для других значений γ характеристика повреждения κ и вибродиагностический параметр $\overline{A}_{1/2}$ вычисляются из следующих соотношений:

$$\kappa(\gamma) = \kappa(0{,}2) \frac{H_1(\gamma)}{H_1(0{,}2)}; \qquad \overline{A}_{1/2}(\gamma) \approx \overline{A}_{1/2}(0{,}2) \frac{H_1(\gamma)}{H_1(0{,}2)}. \qquad (11)$$

В расчетах были использованы три вида крепления балки: свободно опертая, консольная и с защемленными концами при учете восьми-девяти собственных форм колебаний.

Вначале определим характеристику повреждения κ и соответственно параметр $\alpha = \kappa/(1+\kappa)$. Как пример, для консоли на рис. 2 приведена зависимость κ и α от относительной глубины трещины γ при $x_т = 0{,}1l$ и $0{,}25l$ для случая возбуждения колебаний сосредоточенной силой, приложенной в сечении $x_P = l$, и регистрации перемещения в сечении $x_0 = l$, на рис. 3 – зависимость κ от места приложения сосредоточенных силы P и момента M при расположении трещины, имеющей относительную глубину $\gamma = 0{,}2$, в сечениях $x_т = 0{,}1l$ и $0{,}25l$.

Для всех видов неупругого сопротивления характерна существенная зависимость вибродиагностического параметра (1) от показателя степени n амплитудной зависимости декремента колебаний, поскольку частота является постоянной и определяется собственной частотой резонирующей, в данном случае первой, формы колебаний балки (ω_{01}).

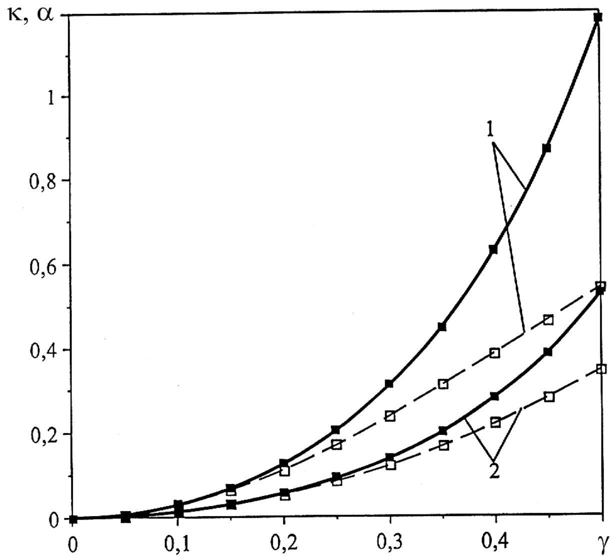

Рис. 2. Зависимость κ (сплошные линии) и α (штриховые линии) от относительной глубины трещины γ в консольной балке для случая возбуждения колебаний сосредоточенной силой, приложенной в сечении $x_P = l$, и регистрации перемещения в сечении $x_0 = l$: *1* – $x_т = 0{,}1l$; *2* – $x_т = 0{,}25l$.

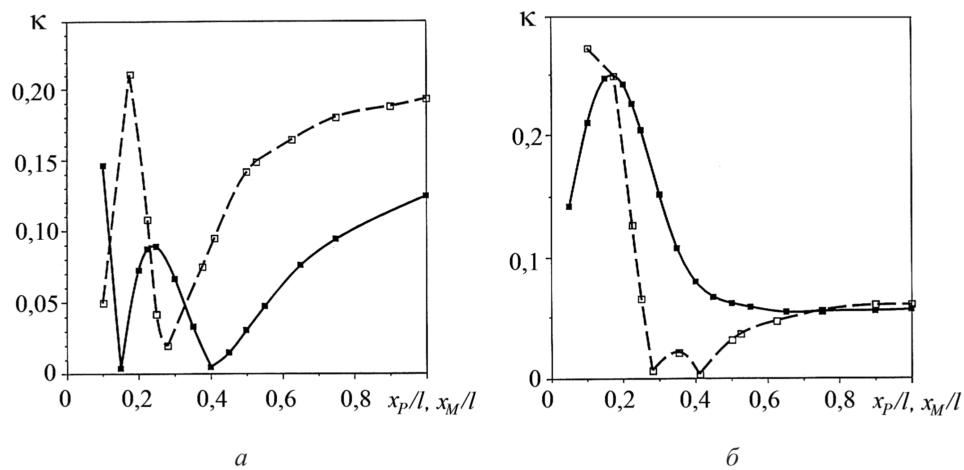

Рис. 3. Зависимость κ от места приложения вынуждающих гармонических сосредоточенных силы P (сплошные линии) и момента M (штриховые линии) для консольной балки при расположении трещины, имеющей относительную глубину $\gamma = 0{,}2$, в сечениях $x_т = 0{,}1l$ (*а*) и $0{,}25l$ (*б*).

При известной величине α вибродиагностический параметр (1) будет определяться постоянными k_n, n $(n > 1)$ амплитудной зависимости декремента (8). Поскольку из (1) связь относительной амплитуды $\overline{A}_{1/2}$ с k_n и n в явном виде не просматривается, исследуем вначале зависимость от их величины абсолютного значения резонансной амплитуды первой гармоники A_{11C}, выражение для которой при $q = 3\omega_0^2 A_{2B1}$ согласно [3] можно представить в виде

$$A_{11C} = \sqrt[n]{\frac{4\alpha(1+0{,}6\alpha)}{3k_n} A_{2B1}}, \tag{12}$$

где A_{2B1} – амплитуда второй гармоники, т.е. основных вынужденных колебаний по первой, резонирующей собственной форме балки с закрывающейся трещиной, которую примем равной амплитуде вынужденных колебаний по этой форме цельной балки при $\nu = 2\omega_1$, т.е. $A_{2B1} = y_1(x_P, x_0)$.

Рассмотрим зависимость A_{11C} от k_n и n на примере консольной балки при возбуждении колебаний сосредоточенной силой P_{0C}, приложенной в сечении $x_P = l$. В этом случае амплитуда прогиба балки A_{2B1} при ее регистрации в сечении $x_0 = l$ будет

$$A_{2B1} = y_1(x_P = l;\ x_0 = l) = \frac{P_{0C} l^4}{3EI} \frac{X_1^2(l)}{(k_1 l)^4} \approx 1{,}2945 \left(\frac{l}{h}\right)^3 \frac{P_{0C}}{bE},$$

и формула (12) примет вид

$$A_{11C} = \sqrt[n]{1{,}726 \frac{\alpha}{k_n} (1+0{,}6\alpha) \frac{P_{0C}}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3}. \tag{13}$$

На рис. 4 приведена зависимость A_{11C} от параметра α и относительной глубины трещины γ, расположенной в сечениях $x_т = 0{,}1l$ и $0{,}25l$ при разных показателях степени n, для случая $P_{0C} = 334$ Н и $k_n = 8$ м$^{1-n}$, на рис. 5 – зависимость декремента колебаний δ от A_{11C}. Амплитуды прогиба балки во всех случаях определялись при $x_0 = l$.

Наблюдаемая картина существенного влияния n на резонансную амплитуду A_{11C} согласуется со значительным уменьшением декремента колебаний с увеличением n при заданной величине k_n.

В качестве безразмерного вибродиагностического параметра можно использовать отношение амплитуды A_{11C} (12) к максимальной амплитуде A_{110} при основном резонансе исследуемой – первой собственной формы колебаний ($\nu = \omega_{01}$), равной

$$A_{110} = \sqrt[n]{\frac{\pi P_{01} l^4}{EI} \frac{X_1(x_P) X_1(x_0)}{(k_1 l)^4 k_n}},$$

т.е.

$$\overline{A}_{11C} = \frac{A_{11C}}{A_{110}} = \sqrt[n]{\frac{4\alpha(1+0{,}6\alpha)}{9\pi} \frac{P_{0C}}{P_{01}}}. \tag{14}$$

Как видно, на значение параметра $\overline{A}_{11C}$ величина коэффициента k_n не оказывает влияния. Общая зависимость $\overline{A}_{11C}$ от параметра α при разных значениях показателя степени n и отношения амплитуд вынуждающих сил при субгармоническом (P_{0C}) и основном (P_{01}) резонансах представлена на рис. 6, на рис. 7 – зависимость $\overline{A}_{11C}$ от места приложения вынуждающей силы (P_{01}) при $P_{0C}/P_{01} = 30$ и разных значениях показателя степени n для консольной балки с трещиной относительной глубины $\gamma = 0{,}2$, расположенной в сечении $x_т = 0{,}1l$.

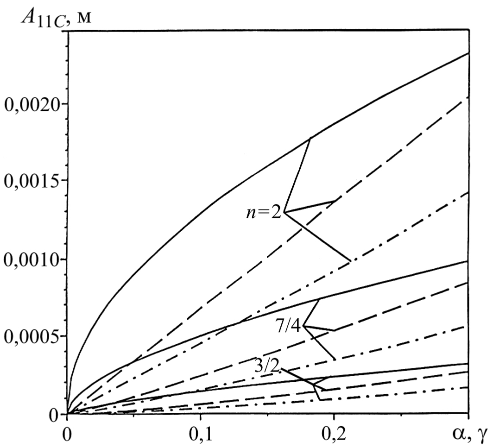

Рис. 4

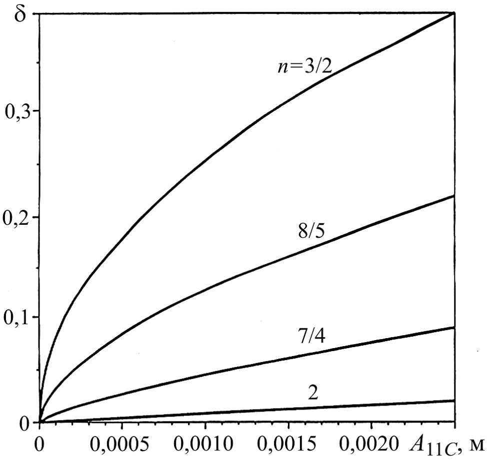

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость параметра A_{11C} от α (сплошные линии) и относительной глубины трещины γ, расположенной в сечениях $x_т = 0{,}1l$ (штриховые линии) и $x_т = 0{,}25l$ (штрихпунктирные линии) при разных показателях степени n для консольной балки при возбуждении колебаний сосредоточенной силой, приложенной на ее конце.

Рис. 5. Зависимость логарифмического декремента колебаний δ (8) от амплитуды колебаний A_{11C} при разных показателях степени n.

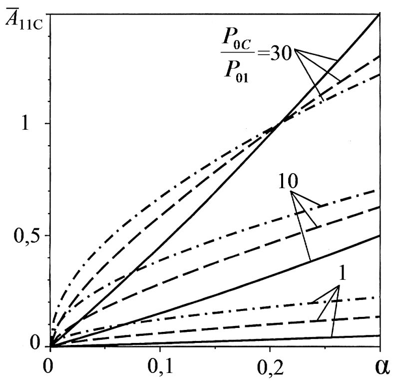

Рис. 6

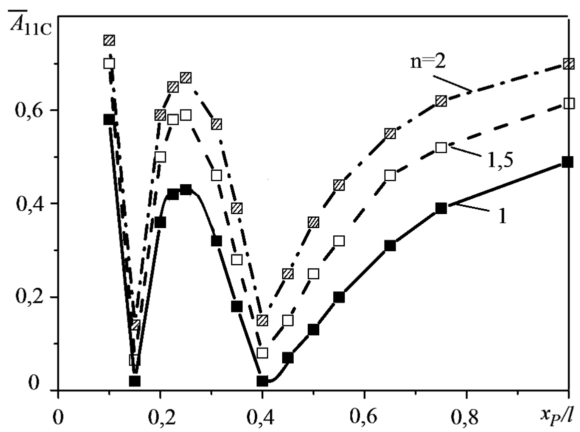

Рис. 7

Рис. 6. Зависимость параметра $\overline{A}_{11C}$ от α при разных отношениях амплитуд вынуждающих сил P_{0C} и P_{01} и значениях показателя степени n: сплошные линии – $n = 1$; штриховые линии – $n = 1{,}5$; штрихпунктирные линии – $n = 2$.

Рис. 7. Зависимость параметра $\overline{A}_{11C}$ от места приложения вынуждающей силы для консольной балки с трещиной, расположенной в сечении $x_т = 0{,}1l$, при $P_{0C}/P_{01} = 30$ и разных значениях показателя степени n.

Учитывая, что на практике системы с разными показателями степени n обычно имеют также разные значения k_n, представляется логичным оценить влияние характера амплитудной зависимости декремента колебаний, например, при условии равенства на каком-либо уровне возбуждающей нагрузки Q_{01} максимальной амплитуды A_{110} при основном резонансе ($\nu = \omega_{01}$) таковой в случае линейного вязкого трения ($n = 1$) с декрементом колебаний $\delta_1 = 2\pi h_1 / \omega_{01}$. Это условие определяет следующее значение постоянной неупругого сопротивления k_n и декремента колебаний δ:

$$k_n = \frac{2\pi h_1}{\omega_{01} A_{110}^{n-1}} = \frac{\delta_1}{A_{110}^{n-1}}; \qquad \delta(\omega_{01}, A_{11C}) = k_n A_{11C}^{n-1} = \delta_1 \left(\frac{A_{11C}}{A_{110}} \right)^{n-1}, \tag{15}$$

где A_{110} и A_{11C} – амплитуды первой гармоники рассматриваемой собственной формы колебаний балки при основном и субгармоническом резонансах, отношение которых, независимо от граничных условий балки и вида возбуждения колебаний, будет определяться выражением, аналогичным (14). Тогда с учетом различия в уровне возбуждающей нагрузки при этих резонансах, определяемого коэффициентом $\lambda = Q_{01} / Q_{0C}$, найдем

$$\delta(\omega_{01}, A_{1C}) = \delta_1 \left(\frac{4\alpha(1 + 0{,}6\alpha)}{9\pi\lambda} \right)^{n-1/n}. \tag{16}$$

В этом случае зависимость (1) для определения вибродиагностического параметра принимает следующий вид:

$$\overline{A}_{1/2} = \frac{3\dfrac{\pi}{\delta_1} \left[\dfrac{4\alpha(1 + 0{,}6\alpha)}{9\pi} \right]^{1/n} \lambda^{n-1/n}}{\sqrt{\theta^2(x_0) + \left[\dfrac{3\pi}{2\delta_1} \left(\dfrac{4\alpha(1 + 0{,}6\alpha)}{9\pi} \right)^{n+1/n} \lambda^{n-1/n} \right]^2}}. \tag{17}$$

Вибродиагностический параметр, выраженный через отношение амплитуд ускорений (обозначим индексом a), которые обычно фиксируют при испытаниях, при рассматриваемом субгармоническом резонансе будет $\overline{A}_{1/2}^{a} = A_{11C}^{a} / A_{2\Sigma}^{a} = \frac{1}{4} \overline{A}_{1/2}$.

При возбуждении супергармонического резонанса с выбранным уровнем вынуждающей нагрузки Q_{1C} коэффициент λ определяет уровень такой нагрузки при основном резонансе $Q_{01} = \lambda Q_{1C}$, который обусловливает одинаковый задаваемый уровень амплитуды колебаний A_{110} независимо от характера сопротивления, т.е. показателя степени n. Например, при использовании сосредоточенной вынуждающей силы P_{01} имеем

$$A_{110} = \frac{\pi P_{01} l^4}{EI\delta_1 (k_1 l)^4} X_1(x_P) X_1(x_0).$$

Расчетные зависимости вибродиагностического параметра $\overline{A}_{1/2}$ от интегрального параметра нелинейности колебательной системы α при $\lambda = 1$ и разных значениях δ_1 и n представлены на рис. 8. Как и для абсолютного значения амплитуды резонирующей гармоники A_{11C}, также наблюдается существенный рост ее относительной величины с увеличением показателя степени n во всем диапазоне значений параметра α.

На рис. 9 для различных случаев возбуждения колебаний рассматриваемой консоли приведены зависимости вибродиагностического параметра $\overline{A}^{a}_{1/2}$ наличия закрывающейся трещины, расположенной в сечении $x_{т} = 0{,}1l$, от ее относительной глубины γ при разных значениях n и $\delta_1 = 0{,}01$, на рис. 10–13 для балок с различными условиями закрепления – зависимости параметра $\overline{A}^{a}_{1/2}$ от места приложения x_P возбуждающей силы P или момента M при характерном местоположении трещины, имеющей относительную глубину $\gamma = 0{,}2$, и разных значениях n при $\delta_1 = 0{,}01$. Зависимости при $n = 1$ соответствуют результатам ранее [4] проведенного расчета в случае линейного вязкого трения, для которого было показано удовлетворительное согласование расчетных зависимостей с данными численных решений, полученных с использованием разных конечноэлементных моделей балки.

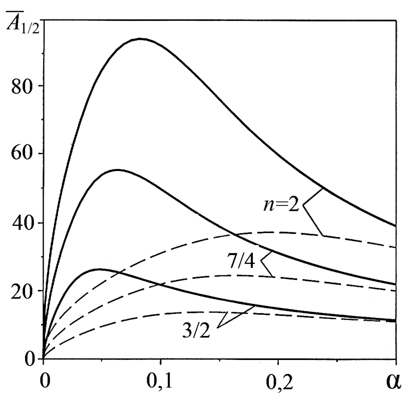

Рис. 8

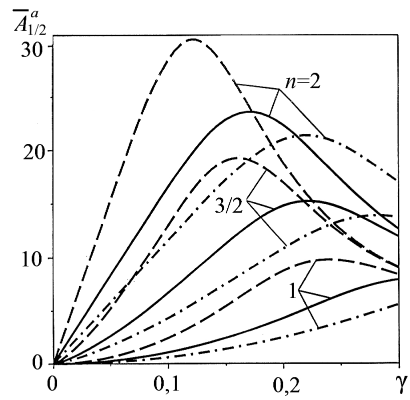

Рис. 9

Рис. 8. Зависимость параметра $\overline{A}_{1/2}$ от интегрального параметра нелинейности колебательной системы α при разных значениях n и δ_1: сплошные линии – $\delta_1 = 0{,}01$; штриховые линии – $\delta_1 = 0{,}04$.

Рис. 9. Зависимость параметра $\overline{A}^{a}_{1/2}$ от относительной глубины трещины γ, расположенной в сечении $x_{т} = 0{,}1l$, для случаев возбуждения колебаний сосредоточенной силой (сплошные линии), сосредоточенным моментом (штриховые линии), приложенными в сечении $x = l$, и кинематическим (штрихпунктирные линии) при разных значениях показателя степени n.

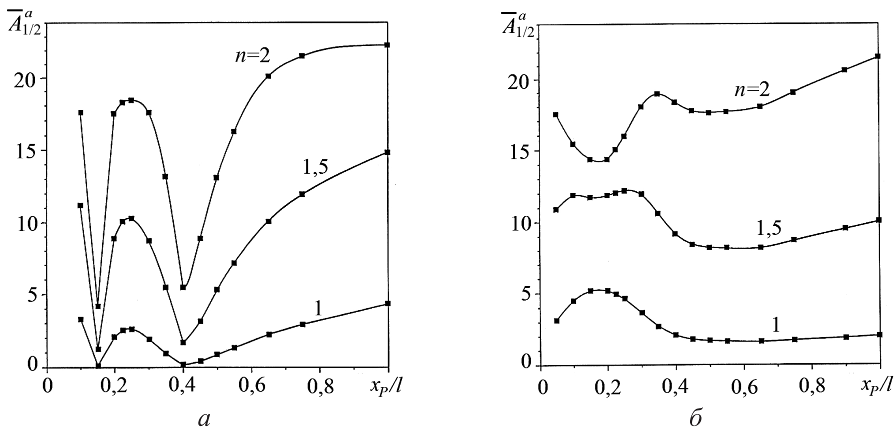

Рис. 10. Зависимость параметра $\overline{A}^{a}_{1/2}$ от места приложения вынуждающей силы при разных значениях показателя степени n для консольной балки с трещиной, расположенной в сечении $x_{т} = 0{,}1l$ (*а*) и $0{,}25l$ (*б*).

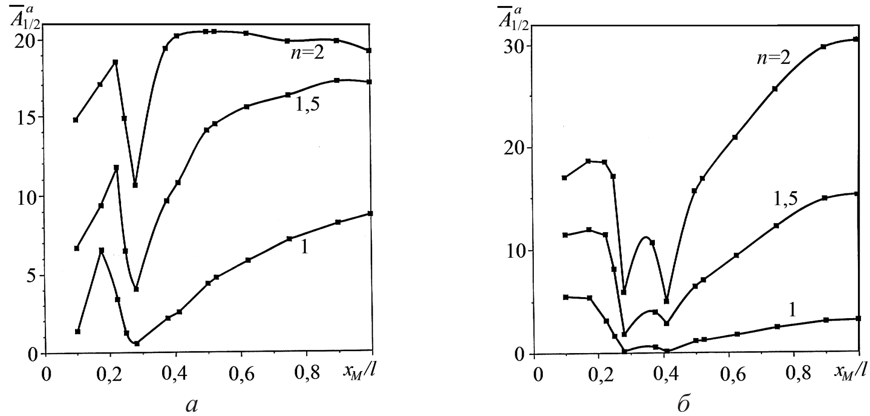

Рис. 11. Зависимость параметра $\overline{A}_{1/2}^{a}$ от места приложения вынуждающего сосредоточенного момента при разных значениях показателя степени n для консольной балки с трещиной, расположенной в сечении $x_{\text{т}} = 0{,}1l$ (*а*) и $0{,}25l$ (*б*).

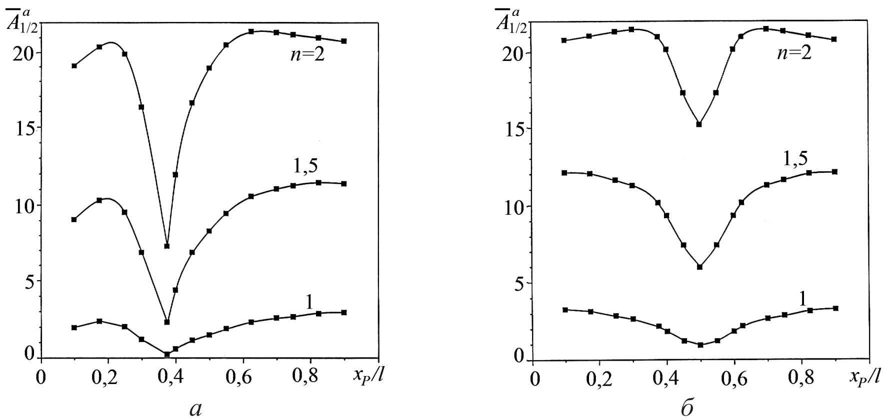

Рис. 12. Зависимость параметра $\overline{A}_{1/2}^{a}$ от места приложения вынуждающей силы при разных значениях показателя степени n для двухопорной балки с трещиной, расположенной в сечении $x_{\text{т}} = 0{,}25l$ (*а*) и $0{,}5l$ (*б*).

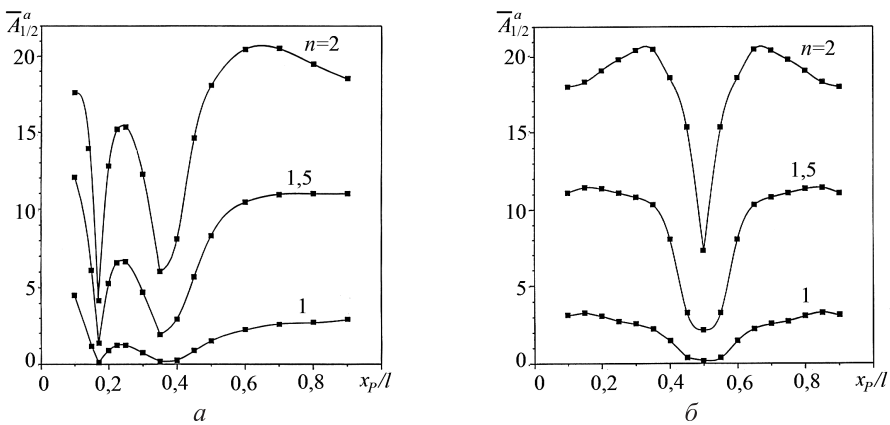

Рис. 13. Зависимость параметра $\overline{A}_{1/2}^{a}$ от места приложения вынуждающей силы при разных значениях показателя степени n для защемленной с двух сторон балки с трещиной, расположенной в сечении $x_{\text{т}} = 0{,}1l$ (*а*) и $0{,}5l$ (*б*).

Как видно, с увеличением показателя степени n амплитудной зависимости логарифмического декремента колебаний балок наряду с ростом значений вибродиагностического параметра возможно и некоторое изменение характера его зависимости как от относительной глубины трещины, так и места приложения возбуждающей силы.

Заключение. Ограничиваясь исследованием вынужденных колебаний неповрежденных балок, рассмотрен простой приближенный метод аналитического определения вибродиагностических параметров наличия закрывающейся краевой трещины нормального отрыва в балках прямоугольного поперечного сечения с различным видом неупругого сопротивления при субгармоническом резонансе интересующей собственной формы их изгибных колебаний. Показана существенная зависимость значения вибродиагностических параметров от показателя степени амплитудной зависимости логарифмического декремента колебаний системы.

Резюме

Представлено результати наближеного розрахунку впливу амплітудно-залежного демпфірування на вібродіагностичні параметри наявності крайової тріщини нормального відриву, що закривається, в балках прямокутного поперечного перерізу за різних граничних умов їх закріплення і виду гармонічного збудження субгармонічного резонансу потрібної власної форми коливань.

1. *Матвеев В. В.*, *Богинич О. Е.*, *Яковлев А. П.* Метод приближенного аналитического определения вибродиагностического параметра наличия трещины в упругой системе с распределенными параметрами при супер- и субгармоническом резонансах // Пробл. прочности. – 2010. – № 5. – С. 62 – 83.
2. *Матвеев В. В.*, *Богинич О. Е.* К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе // Там же. – 2012. – № 3. – С. 37 – 49.
3. *Матвеев В. В.*, *Богинич О. Е.* Влияние неупругого сопротивления на колебания упругого тела с закрывающейся трещиной при основном и субгармоническом резонансах // Там же. – 2014. – № 1. – С. 5 – 24.
4. *Матвеев В. В.*, *Яковлев А. П.*, *Богинич О. Е.*, *Синенко Е. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе // Там же. – 2014. – № 3. – С. 21 – 37.

Поступила 22. 09. 2014