

## Модификация метода продолжения решения по параметру для анализа динамики виброударных систем

В. А. Баженов, О. С. Погорелова, Т. Г. Постникова

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

*Предложена модификация метода продолжения решения по параметру для исследования динамики виброударных систем, находящихся под действием периодической внешней нагрузки. Проанализировано поведение двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы в зависимости от интенсивности нагрузки. Проведено сравнение особенностей применения метода при двух способах моделирования удара: силой контактного взаимодействия на базе квазистатической теории Герца и граничными условиями с использованием коэффициента восстановления на основе стереомеханической теории удара. Представлены результаты численного анализа динамических состояний системы при двух способах моделирования удара.*

**Ключевые слова:** виброударное движение, моделирование удара, сила контактного взаимодействия, коэффициент восстановления, метод продолжения решения по параметру.

**Введение.** Метод продолжения решения по параметру является мощным численным инструментом решения нелинейных дифференциальных уравнений. Свое развитие метод получил в работах, опубликованных в отечественной и зарубежной литературе, например [1, 2]. Большой вклад в совершенствование и применение этого метода к анализу эволюции установившихся регулярных режимов колебаний нелинейных механических систем был внесен исследованиями, проводившимися в НИИ строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры [3]. Ранее [3] был предложен и развит метод построения периодических решений существенно нелинейных систем, который совместно с методикой продолжения решения по параметру позволяет решать широкий класс задач для разного рода нелинейных систем. Эту методику удалось применить к исследованию динамики виброударных систем [4]. Была разработана теория применения метода продолжения решения по параметру к исследованию многомерных виброударных систем при моделировании удара граничными условиями на основе стереомеханической теории удара с использованием коэффициента восстановления [5, 6]. При таком способе моделирования удара для двухмассовых систем с внутренним и внешним ударным контактом была создана теория и выполнен численный анализ динамических состояний, в частности, построены амплитудно-частотные характеристики систем и проанализирована устойчивость их колебательного движения [7].

Однако в виброударных системах, где продолжительность удара достаточно велика и сравнима с таковой междударного интервала (например, в системах с мягким ограничителем колебаний), моделирование удара граничными условиями, предполагающее его мгновенность, не дает хорошего результата. В таких системах удар лучше моделируется контактной силой, описанной тем или иным законом взаимодействия тел [8]. Этот подход позволяет получить хороший результат и в тех виброударных системах, где продолжительность удара мала и его можно считать мгновенным (например, в системах с твердым ограничителем колебаний) [9].

В данной работе предлагаются модификация и численная реализация метода продолжения решения по ведущему параметру для исследования динамики виброударных систем при моделировании удара силой контактного взаимодействия. При-

менение метода позволяет эффективно проводить исследования широкого класса виброударных систем с любым типом ограничителя колебаний [10], анализировать зависимость характеристик их динамического поведения от тех или иных параметров системы, существенно сокращать вычислительные затраты. Модифицированная процедура метода излагается на примере исследования динамики двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы.

**Постановка задачи.** Двухмассовая виброударная система с двумя степенями свободы состоит из основного тела и присоединенного, которые связаны между собой линейными пружинами и демпферами. Присоединенное тело может играть роль ударного или безударного динамического гасителя колебаний (рис. 1). Подробное описание модели приведено ранее [7, 9]. Поведение виброударной системы анализируется в зависимости от интенсивности внешнего периодического воздействия

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $\lambda$  – параметр интенсивности нагрузки. Удары предполагаются низкоскоростными, коллинеарными, без трения.

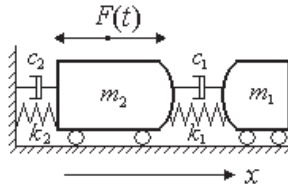


Рис. 1. Расчетная схема двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы.

При моделировании удара силой контактного взаимодействия нелинейные дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\xi_1 \omega_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2 (x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1} F_{\text{кон}}(t); \\ \ddot{x}_2 &= -2\xi_2 \omega_2 \dot{x}_2 - \omega_2^2 x_2 - 2\xi_1 \omega_1 \chi (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2 \chi (x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2} [F(t) - F_{\text{кон}}(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ ;  $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ ;  $\xi_1 = c_1/(2m_1\omega_1)$ ;  $\xi_2 = c_2/(2m_2\omega_2)$ ;  $\chi = m_2/m_1$ ;  $D$  – начальное расстояние между телами;  $F_{\text{кон}}(t)$  – сила контактного взаимодействия, действующая лишь во время удара. Начальные условия задачи таковы:

$$x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \quad (2)$$

Контактная сила  $F_{\text{кон}}(t)$  описывается нелинейным законом на основе квазистатической теории Герца, рассматривающей лишь локальные деформации контактирующих тел при упругом ударе. Использование теории Герца позволяет, в частности, подробнее учитывать механические характеристики соударяющихся тел [8, 11]:

$$F_{\text{кон}} = K\alpha(t)^{3/2}, \quad K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1\pi}, \quad \delta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2\pi}, \quad (3)$$

где  $\alpha(t)$  – относительное сближение тел,  $\alpha(t) = x_2 - x_1$ ;  $A, B$  и  $q$  – константы, характеризующие местную геометрию зоны контакта;  $\mu_i$  и  $E_i$  – коэффициенты

Пуассона и модули Юнга материалов обоих тел ( $i = 1, 2$ ). Предполагается, что в зоне контакта тела ограничены криволинейными поверхностями с “герцевой” геометрией, которые можно аппроксимировать в соответствии с известными таблицами [11].

Модификация данного метода разработана для исследования  $T$ -периодических установившихся режимов колебаний, т. е. таких режимов, период колебаний которых совпадает с периодом  $T$  внешнего периодического воздействия .

При моделировании удара граничными условиями в уравнениях движения (1) член  $F_{\text{кон}}(t)$  отсутствует. Граничные условия в момент удара имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(t_0) = x_1(t_0 + T), \quad \dot{x}_1(t_0) &= \frac{(\chi - R)\dot{x}_1(t_0 + T) + (1 + R)\dot{x}_2(t_0 + T)}{1 + \chi}, \\ x_2(t_0) = x_2(t_0 + T), \quad \dot{x}_2(t_0) &= \frac{\chi(1 + R)\dot{x}_1(t_0 + T) + (1 - R\chi)\dot{x}_2(t_0 + T)}{1 + \chi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $t_0$  – время начала периода колебаний непосредственно после удара;  $t_0 + T$  – время конца периода колебаний непосредственно перед ударом;  $R$  – коэффициент восстановления ( $0 \leq R \leq 1$ ).

Граничные условия (4) дополняются условием контакта в конце периода колебаний в момент времени  $t = t_0 + T$ :

$$x_1(t_0 + T) = x_2(t_0 + T). \quad (5)$$

Введем матрицу

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\chi - R}{1 + \chi} & \frac{1 + R}{1 + \chi} \\ 0 & 0 & \frac{\chi(1 + R)}{1 + \chi} & \frac{1 - R\chi}{1 + \chi} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тогда граничные условия (4) запишутся следующим образом:

$$\bar{x}(t_0) = V \bar{x}(t_0 + T), \quad (7)$$

где вектор

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^T,$$

верхний индекс обозначает транспонирование. Равенство (7) является одновременно условием периодичности.

**Построение решений уравнений движения.** Решение нелинейных уравнений движения (1) отыскиваем методом продолжения решения по ведущему параметру, каковым является параметр интенсивности внешней нагрузки  $\lambda$ . Выберем его начальное значение  $\lambda = \lambda_{(k)}$ . Проведем прямое численное интегрирование уравнений движения (1) при обоих способах моделирования удара с заданными начальными условиями (2) до достижения установившегося режима. Отметим, что для рассматриваемой виброударной системы с твердым ударом оба полученных решения совпадают. Пропускаем переходный процесс и выбираем в установившемся  $T$ -периодическом режиме в зависимости от способа моделирования удара состояние виброударной системы в некоторый момент времени, которое будет исходным для  $k$ -го шага. При моделировании удара контактной силой можно выбрать состояние системы

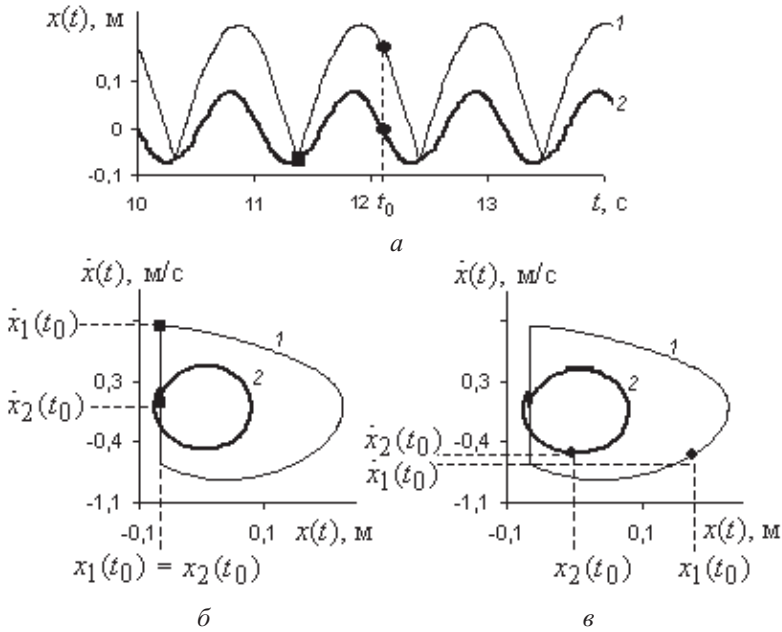


Рис. 2. Выбор начального состояния при моделировании удара граничными условиями (а, б) и контактной силой (а, в): 1, 2 – характеристики присоединенного  $m_1$  и основного  $m_2$  тела соответственно.

в установившемся режиме при любом  $t = t_0$  (рис. 2,а,в), при моделировании удара граничными условиями начальным временем  $t_0$  служит момент удара, только такой выбор обеспечит возможность выполнения граничных условий (4) – рис. 2,а,б.

Все числовые результаты получены при характеристиках виброударной системы, приведенных в таблице. Дадим приращение ведущему параметру  $\lambda_{(k+1)} = \lambda_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}$ . Очевидно, что при новом значении амплитуды внешней нагрузки процесс колебаний будет другим, и начальные значения перемещений и скоростей изменятся, что наглядно видно из рис. 3. Естественно, что решения уравнений движения зависят от начальных значений переменных:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \varphi(t_0), \lambda); \\ \dot{x}_i(t) &= \dot{x}_i(t, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \varphi(t_0), \lambda), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

При моделировании удара контактной силой решение (8) и приведенных ниже соотношений не зависит от изменения фазы внешней нагрузки  $\varphi(t)$ . Необходимость введения начальной фазы  $\varphi(t_0)$  на каждом шаге в соотношениях (8) обусловлена тем, что при моделировании удара граничными условиями начальное время  $t_0$  должно совпадать с моментом удара, который смещается во времени с изменением амплитуды внешней нагрузки, что и компенсируется учетом сдвига фазы. Решения уравнений движения на периоде зависят от начальных условий на этом периоде, значит, зависимости типа (8) существуют на каждом шаге. Чтобы решить уравнения движения на периоде при каждом новом значении  $\lambda_{(k+1)}$ , необходимо знать новые начальные значения переменных. Для этого следует найти их приращения при переходе с  $k$ -го на  $(k+1)$ -й шаг:

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)}(t_0) &= x_{i(k)}(t_0) + \Delta x_{i(k)}(t_0), \quad \dot{x}_{i(k+1)}(t_0) = \dot{x}_{i(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2; \\ \varphi_{(k+1)}(t_0) &= \varphi_{(k)}(t_0) + \Delta \varphi_{(k)}(t_0). \end{aligned} \quad (9)$$

**Параметры двухмассовой виброударной системы**

Характеристика	Присоединенное тело	Основное тело
Масса $m_i$ , кг	100,0	1000,0
Парциальная частота колебаний $\omega_i$ , рад/с	4,727	6,283
Коэффициент демпфирования $\xi_i$	0,2	0,036
Модуль Юнга $E_i$ , Н/м <sup>2</sup>	2,099 · 10 <sup>11</sup>	
Коэффициент Пуассона $\mu_i$	0,3	
Начальное расстояние между телами $D$ , м	0,05	
Константы $A, B, m^{-1}, q$	$A = 0,5; B = 0,5; q = 0,318$	
Коэффициент восстановления $R$	1,0	
Амплитуда внешней нагрузки $F_0$ , Н	400,0	
Частота нагрузки $\omega$ , рад/с	6,0	
Начальная фаза нагрузки $\varphi_0$ , рад	0	

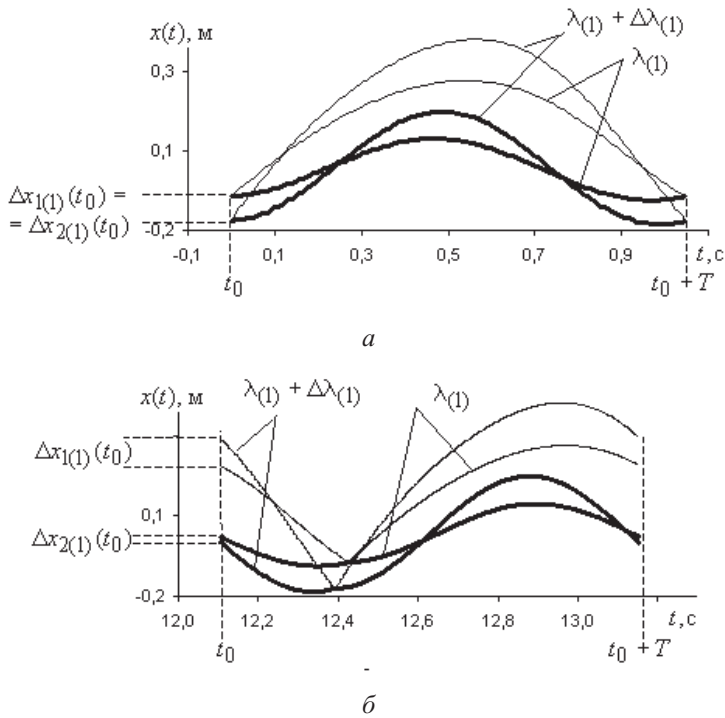


Рис. 3. Приращение начальных значений переменных на шаге изменения параметра интенсивности нагрузки  $\Delta\lambda$  при моделировании удара граничными условиями (а) и контактной силой (б).

Воспользуемся условиями периодичности, которые выполняются на каждом шаге для  $T$ -периодических установившихся режимов колебаний. В соответствии с (7) на  $(k+1)$ -м шаге имеем

$$V \bar{x}_{(k+1)}(t_0 + T) = \bar{x}_{(k+1)}(t_0). \quad (10)$$

При моделировании удара контактной силой матрица  $V$  в условии периодичности является единичной. Подставив (9) в условие (10), получим систему четырех нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными приращениями при моделировании удара контактной силой. В то время как при моделировании граничными условиями имеем систему из пяти неизвестных ( $\Delta x_{1(k)}(t_0)$ ,  $\Delta x_{2(k)}(t_0)$ ,  $\Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0)$ ,  $\Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0)$ ,  $\Delta \varphi_{(k)}(t_0)$ ):

$$\begin{aligned} & V \bar{x}_{(k+1)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0) + \Delta x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0) + \Delta x_{2(k)}(t_0), \\ & \dot{x}_{1(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \varphi_{(k)}(t_0) + \Delta \varphi_{(k)}(t_0), \\ & \lambda_{(k)} + \Delta \lambda_{(k)}) = \bar{x}_{(k)}(t_0) + \Delta \bar{x}_{(k)}(t_0), \end{aligned} \quad (11)$$

где вектор  $\Delta \bar{x}_{(k)} = (\Delta x_{1(k)}, \Delta x_{2(k)}, \Delta \dot{x}_{1(k)}, \Delta \dot{x}_{2(k)})^T$ .

Чтобы линеаризовать систему (11), разложим ее левые части в ряды Тейлора относительно неизвестных приращений и, предположив их малость, отбросим члены выше первого порядка. Получим линейную алгебраическую систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными при моделировании удара контактной силой и пятью при моделировании граничными условиями, которую запишем таким образом:

$$(VC - E)\Delta \bar{x}_{(k)} + V \bar{c}_\varphi \Delta \varphi_{(k)} = -V \bar{c}_\lambda \Delta \lambda_{(k)} - \bar{r}_{(k)}, \quad (12)$$

где квадратная матрица четвертого порядка  $V$  описывается формулой (6);  $E$  – единичная матрица;  $C$  – квадратная матрица четвертого порядка, элементы которой представлены ниже; компоненты векторов  $\bar{c}_\varphi$  и  $\bar{c}_\lambda$  описываются также ниже. В системе (12) введен вектор невязки на  $k$ -м шаге метода продолжения решения по параметру:

$$\bar{r}_{(k)} = (r_{1(k)}, r_{2(k)}, \dot{r}_{1(k)}, \dot{r}_{2(k)})^T,$$

где

$$\begin{aligned} r_{i(k)} &= x_{i(k)}(t_0 + T) - x_{i(k)}(t_0); \\ \dot{r}_{i(k)} &= \dot{x}_{i(k)}(t_0 + T) - \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Наличие невязок обусловлено численным методом решения задачи. Их значения характеризуют погрешность выполнения условий периодичности и регулируются величиной шага ведущего параметра. Элементы матрицы  $C$  определяются соотношениями:

$$\left\{ \begin{aligned} c_{ij} &= \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial x_{j(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \varphi_{(k)}(t_0), \\ & \lambda_{(k)}), \quad i, j = 1, 2; \\ c_{ij} &= \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \dot{x}_{j-2(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \\ & \varphi_{(k)}(t_0), \lambda_{(k)}), \quad i = 1, 2, j = 3, 4; \\ c_{ij} &= \frac{\partial \dot{x}_{i-2(k)}}{\partial x_{j(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \\ & \varphi_{(k)}(t_0), \lambda_{(k)}), \quad i = 3, 4, j = 1, 2; \end{aligned} \right. \quad (14a)$$

$$\begin{cases} c_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_{i-2(k)}}{\partial \dot{x}_{j-2(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \\ \varphi_{(k)}(t_0), \lambda_{(k)}), \quad i, j = 3, 4; \end{cases} \quad (146)$$

компоненты вектора  $\bar{c}_\varphi = (c_{\varphi 1}, c_{\varphi 2}, c_{\varphi 3}, c_{\varphi 4})^T$ :

$$\begin{aligned} c_{\varphi i} &= \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \varphi_{(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \varphi_{(k)}(t_0), \lambda_{(k)}), \\ &\quad i = 1, 2; \\ c_{\varphi i} &= \frac{\partial \dot{x}_{i-2(k)}}{\partial \varphi_{(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \varphi_{(k)}(t_0), \lambda_{(k)}), \\ &\quad i = 3, 4; \end{aligned} \quad (15)$$

компоненты вектора  $\bar{c}_\lambda = (c_{\lambda 1}, c_{\lambda 2}, c_{\lambda 3}, c_{\lambda 4})^T$  в правых частях уравнений:

$$\begin{aligned} c_{\lambda i} &= -\frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \lambda_{(k)}}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \varphi_{(k)}(t_0), \\ &\quad \lambda_{(k)})\Delta\lambda_{(k)}, \quad i = 1, 2; \\ c_{\lambda i} &= -\frac{\partial \dot{x}_{i-2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \varphi_{(k)}(t_0), \\ &\quad \lambda_{(k)})\Delta\lambda_{(k)}, \quad i = 3, 4. \end{aligned} \quad (16)$$

При моделировании удара граничными условиями система четырех алгебраических уравнений (12) содержит пять неизвестных. Дополним ее пятым уравнением – условием контакта в момент удара (5) на  $(k+1)$ -м шаге:  $x_{1(k+1)}(t_0 + T) = x_{2(k+1)}(t_0 + T)$ . Подставим (9) в это уравнение и разложим обе части в ряд Тейлора относительно приращений начальных значений переменных. Отбросим члены выше первого порядка, тогда в обозначениях (14)–(16) получим уравнение

$$\begin{aligned} &(c_{11} - c_{21})\Delta x_{1(k)}(t_0) + (c_{12} - c_{22})\Delta x_{2(k)}(t_0) + (c_{13} - c_{23})\Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0) + \\ &+ (c_{14} - c_{24})\Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0) + (c_{\varphi 1} - c_{\varphi 2})\Delta \varphi_{(k)}(t_0) = (c_{\lambda 1} - c_{\lambda 2})\Delta \lambda_{(k)}(t_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Для вычисления коэффициентов системы (12) и уравнения (17), представленных соотношениями (14)–(16), найдем частные производные по начальным значениям переменных от обеих частей уравнений движения (1) на  $k$ -м шаге. Получим четыре системы дифференциальных уравнений 2-го порядка одинакового вида:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - \omega_1^2(y_1 - y_2) + \frac{1}{m_1}\frac{3}{2}K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1); \\ \ddot{y}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{y}_2 - \omega_2^2y_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \omega_1^2\chi(y_2 - y_1) - \\ &\quad - \frac{1}{m_2}\left(\frac{3}{2}K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1)\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь введены обозначения:  $y_1 = \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}$ ;  $y_2 = \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}$ ,  $i = 1, 2$ .

При моделировании удара граничными условиями члены, представляющие производные от контактной силы, отсутствуют. Решая системы (18) с определенными начальными условиями, т.е. четыре задачи Коши, найдем элементы матрицы  $C$ , описанные формулами (14). Начальные условия для этих систем согласно теории дифференциальных уравнений таковы:

$$y_1(t_0) = \delta_{1l}, \quad y_2(t_0) = \delta_{2l}, \quad \dot{y}_1(t_0) = \delta_{3l}, \quad \dot{y}_2(t_0) = \delta_{4l}, \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad (19)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $l$  – номер соответствующей задачи Коши.

Элементы матрицы  $C$  (14) определяются решением четырех задач Коши в момент  $t = t_0 + T$ :

$$c_{1l} = y_1(t_0 + T), \quad c_{2l} = y_2(t_0 + T), \quad c_{3l} = \dot{y}_1(t_0 + T), \quad c_{4l} = \dot{y}_2(t_0 + T), \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

Аналогично формулируются пятая и шестая задачи Коши для определения компонент векторов  $\bar{c}_\varphi$  (15) и  $\bar{c}_\lambda$  (16), которые решаются с нулевыми начальными условиями:

$$y_1(t_0) = 0, \quad y_2(t_0) = 0, \quad \dot{y}_1(t_0) = 0, \quad \dot{y}_2(t_0) = 0. \quad (20)$$

На этом построение решений исходных уравнений движения (1) на периоде установившегося режима колебаний при изменении параметра интенсивности внешней нагрузки заканчивается. Отметим, что при моделировании удара контактной силой построение решений несколько проще, поскольку в качестве исходного состояния может быть выбрано любое состояние в установившемся  $T$ -периодическом режиме, и поэтому нет необходимости учитывать изменение фазы внешней нагрузки. Это обстоятельство обеспечивает более простой вид алгебраической системы (12) и меньшее количество задач Коши, требующих решения для определения ее коэффициентов.

**Анализ числовых результатов.** Параметры виброударной системы (рис. 1) приведены в таблице. Принимаем, что поверхности зоны контакта обоих тел сферические и достаточно больших радиусов  $R_1 = R_2 = 2$  м. Тогда в соответствии с данными известных таблиц [11] имеем  $A = B = \left( \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = 0,5 \text{ м}^{-1}$ . Константа  $q$  зависит от отношения  $A/B$ ,  $q(1) = 0,318$ .

Выберем значение ведущего параметра  $\lambda$  (параметра интенсивности внешней нагрузки) на первом шаге  $\lambda_{(1)} = 1$ , а его приращение  $\Delta\lambda_{(1)} = 0,5$ . Тогда, следуя описанному выше алгоритму, находим решения уравнений движения на периоде установившегося режима колебаний. На рис. 3 представлены перемещения тел виброударной системы на первом ( $\lambda_{(1)} = 1$ ) и втором ( $\lambda_{(2)} = \lambda_{(1)} + \Delta\lambda_{(1)} = 1,5$ ) шагах процесса продолжения решения по параметру при моделировании удара граничными условиями и контактной силой. Располагая решениями уравнений движения на этих и следующих шагах, построим кривые нагружения тел – зависимость максимальных полуразмахов колебаний  $A_{\max} = \frac{|x_{\max}| + |x_{\min}|}{2}$  от параметра  $\lambda$  (рис. 4).

На рис. 4 приведены кривые нагружения тел виброударной системы при моделировании удара граничными условиями и контактной силой. Чтобы убедиться в достоверности результатов, было выполнено прямое численное интегрирование уравнений движения в трех случаях ( $\lambda = 2, 4$  и  $6$ ). Полученные данные (на рис. 4 точки) совпали с кривыми нагружения с достаточной точностью, что свидетельствует о хорошем соответствии результатов, найденных методом продолжения по параметру и прямым численным интегрированием.



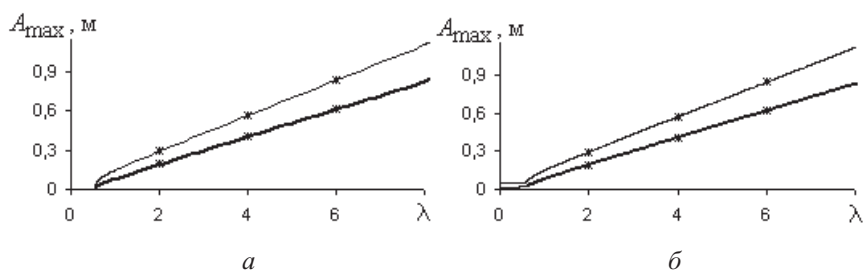


Рис. 4. Кривые нагружения тел виброударной системы при моделировании удара граничными условиями (а) и контактной силой (б).

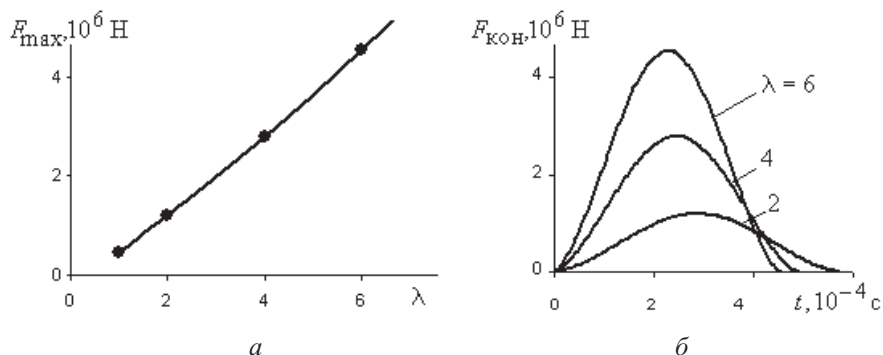


Рис. 5. Зависимость максимального значения контактной силы  $F_{\max}$  от  $\lambda$  (а) и контактной силы  $F_{\text{кон}}$  от времени  $t$  в одном периоде при разных  $\lambda$  (б). (Точки – значения, полученные при прямом численном интегрировании уравнений (1).)

Сравнение кривых нагружения, построенных по результатам, полученным методом продолжения решения по параметру при разных способах моделирования удара (рис. 4), свидетельствует об их идентичности. Отсутствие участков кривых на рис. 4,а при  $\lambda \leq 0,55$  обусловлено тем, что при таких значениях колебательный режим становится безударным, и граничные условия (4) не могут быть записаны, поскольку удар отсутствует.

На рис. 5 представлены зависимости контактной силы от параметра интенсивности нагрузки.

## Выводы

1. Представлены разработанные теория, методика применения и численная реализация метода продолжения решения по параметру совместно с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем. Предлагаемая модификация данного метода предназначена для анализа динамического поведения двухмассовых виброударных систем с двумя степенями свободы под действием периодической внешней нагрузки при моделировании удара контактной силой на базе квазистатической теории Герца. Созданные алгоритмы обеспечили построение кривых нагружения при значительном сокращении вычислительных затрат.

2. Сравнение кривых нагружения, полученных при двух способах моделирования удара (контактной силой Герца и граничными условиями в момент удара с использованием коэффициента восстановления), показывает их полную идентичность для рассматриваемой виброударной системы с твердым ударом. Однако построение кривых нагружения методом продолжения решения по параметру проще при моделировании удара контактной силой. Достоверность полученных результатов подтверж-

дається співпадінням з рішеннями, знайденими прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху.

## Резюме

Запропоновано модифікацію методу продовження розв'язку за параметром для дослідження динаміки віброударних систем, що знаходяться під дією періодичного зовнішнього навантаження. Проаналізовано поведінку двомасової віброударної системи з двома ступенями вільності в залежності від інтенсивності навантаження. Порівнюються особливості застосування методу при моделюванні удару двома способами: силою контактної взаємодії на базі квазістатичної теорії Герца та граничними умовами з використанням коефіцієнта відновлення на основі стереомеханічної теорії удару. Приведено результати чисельного аналізу динамічних станів системи при моделюванні удару двома способами.

1. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.
2. Allgower E. L. and Georg K. Introduction to Numerical Continuation Methods. – Berlin; New York: Springer-Verlag, 1990. – 397 p.
3. Гуляев В. И., Баженев В. А., Дехтярюк Е. С. и др. Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах. – Львов: Вища шк., 1983. – 286 с.
4. Баженев В. А., Гоцуляк Е. А., Кондаков Г. С., Оглобля А. И. Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями – Киев: Вища шк., 1989. – 399 с.
5. Дехтярюк Е. С., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Гончаренко С. М. Стійкість сталих режимів коливань віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2001. – Вип. 69. – С. 10 – 18.
6. Дехтярюк Е. С., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Гончаренко С. М. Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Там же. – 2002. – Вип. 70. – С. 69 – 81.
7. Дехтярюк Е. С., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Гончаренко С. М. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Там же. – 2003. – Вип. 73. – С. 31 – 44.
8. Баженев В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Гончаренко С. Н. Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах // Пробл. прочности. – 2009. – № 4. – С. 69 – 77.
9. Баженев В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Лукьянченко О. А. Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия // Там же. – 2008. – № 6. – С. 82 – 90.
10. Погорелова О. С., Постникова Т. Г. Застосування різних способів моделювання удару в віброударних системах з твердим та м'яким обмежниками // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010. – Вип. 86. – С. 87 – 93.
11. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.

Поступила 27. 09. 2011