ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.09.024
УДК 519.21

Є.О. Лебєдєв, М.М. Шарапов, Г.В. Лівінська
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: leb@unicyb.kiev.ua, sharapov@unicyb.kiev.ua, hanna.livinska@univ.kiev.ua

Про одну систему з повторними викликами і ненадійним приладом

Представлено членом-кореспондентом НАН України М.М. Савчуком

Розглядається модель системи з повторними викликами і одним ненадійним приладом. Процес обслуговування в системі задається двовимірним ланцюгом Маркова. Перша компонента вказує на число джерел повторних викликів, а друга фіксує стан приладу у поточний момент часу: зайнятий обслуговуванням, вільний і готовий до обслуговування, вийшов з ладу і відновлюється. Головною особливістю системи, що розглядається, є те, що інтенсивність вхідного потоку залежить від величини черги повторних викликів.

Для процесу обслуговування знайдено умову існування стаціонарного режиму та векторно-матричні формули, які подають стаціонарні імовірності через параметри моделі у явному вигляді. Для контролю точності обчислень за цими формулами отримана оцінка залишку ряду, який задає нормуючу сталу. У випадку, коли вхідний потік є пуассонівським, для нормуючої сталої отримано точний вираз. Застосування отриманих результатів продемонстровано на числових прикладах, у яких наведена залежність блокуючої ймовірності в стаціонарному режимі від параметрів системи.

Ключові слова: *стаціонарний режим, система з повторними викликами, ненадійний прилад, умова ергодичності, матрично-векторне подання, нормуюча стала.*

Увага до стохастичних систем з повторними викликами зумовлена їх широким застосуванням у різних сучасних комп'ютерних, супутникових, телефонних, охоронних та інших телекомунікаційних системах. У таких системах вимога, яка отримала відмову в обслуговуванні, стає джерелом повторних викликів. У порівнянні з класичними моделями систем з повторними викликами, яким присвячена значна кількість робіт (див., наприклад, [1—7]), випадок ненадійних приладів ([8—14]) є значно менш вивчений. В цих моделях задача знаходження основних характеристик, як правило, істотно ускладнюється.

Марковські процеси, що описують роботу систем з повторними викликами, мають зліченну множину станів, а матриця локальних характеристик, як правило, не має яких-небудь

Цитування: Лебєдєв Є.О., Шарапов М.М., Лівінська Г.В. Про одну систему з повторними викликами і ненадійним приладом. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 9. С. 24—30. https://doi.org/10.15407/dopovidi 2020.09.024

спеціальних властивостей, які б допомогли отримати розв'язок рівнянь для стаціонарних імовірностей у явному вигляді. У роботі, що пропонується, ми розглянемо одну з таких моделей і підходи до обчислення її стаціонарного розподілу.

Постановка задачі і основні результати. Будемо досліджувати систему з повторними викликами і одним ненадійним приладом. Припускається, що інтенсивність потоку первинних викликів $\lambda=\lambda_k>0$ залежить від числа повторних викликів $k=0,1,\ldots$ (від числа викликів на орбіті). Заданими є також такі основні характеристики системи: інтенсивність обслуговування $\mu>0$, інтенсивність виходу з ладу працюючого приладу $\alpha>0$, інтенсивність відновлення $\beta>0$ приладу, що вийшов з ладу, інтенсивність генерації повторних викликів $\theta>0$ джерелом повторних викликів. Коли прилад виходить з ладу, обслуговування вимоги переривається і ця вимога стає джерелом повторних викликів.

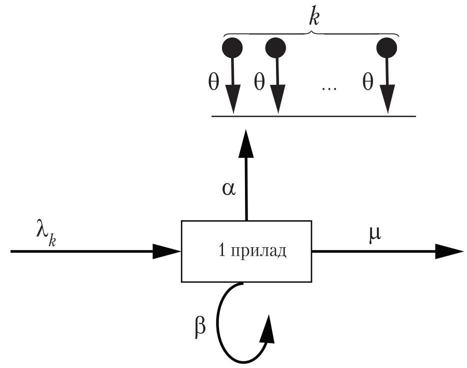

Рис. 1. Система з повторними викликами та ненадійним приладом

Процес обслуговування в системі (рис. 1) з повторними викликами і ненадійним приладом будемо моделювати двовимірним ланцюгом Маркова $Q^T(t)=$ $=(Q_1(t),Q_2(t))$, де перша компонента $Q_1(t)\in\{0,1,2\}$ задає стан приладу у момент часу t (0 — вільний і готовий до обслуговування, 1 — зайнятий обслуговуванням, 2 — відновлює робочий стан), а $Q_2(t)\in\{0,1,2\ldots\}$ — число джерел повторних викликів. Інтенсивності переходів $a_{(i,j)(i',j')}$ при $(i,j)\neq(i',j')$, $(i,j),(i',j')\in S=$ $=\{0,1,2\}\times\{0,1,\ldots\}$ марковського процесу $Q(t)$ через параметри системи $\lambda_k, k=0,1,\ldots,\ \mu,\alpha,\beta,\theta$ визначаються наступним чином:

$$a_{(i,j),(i',j')}=\begin{cases}\lambda_j,\ (i,j)=(0,j),(i',j')(i',j')=(1,j),\ j\geqslant 0,\\ j\cdot\theta,\ (i,j)=(0,j),(i',j')=(1,j-1),\ j\geqslant 1,\\ \lambda_j,\ (i,j)=(1,j),(i',j')=(1,j+1),\ j\geqslant 0,\\ \alpha,\ (i,j)=(1,j),(i',j')=(2,j+1),\ j\geqslant 0,\\ \mu,\ (i,j)=(1,j),(i',j')=(0,j),\ j\geqslant 0,\\ \lambda_j,\ (i,j)=(2,j),(i',j')=(2,j+1),\ j\ge\geqslant 1,\\ \beta,\ (i,j)=(2,j),(i',j')=(0,j),\ j\geqslant 1.\end{cases}$$

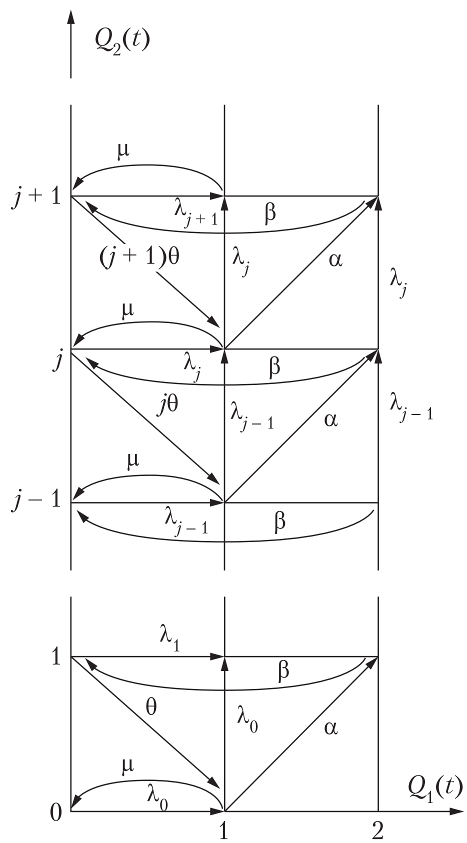

Рис. 2. Граф інтенсивностей переходів для системи з повторними викликами та ненадійним приладом

Граф інтенсивностей переходів для $Q(t)$ проілюстровано на рис. 2.

Головна мета роботи — знайти умови існування стаціонарного режиму для $Q(t)$, $t\geqslant 0$ і отримати явні векторно-матричні формули для обчислення стаціонарних імовірностей.

Якщо для $Q(t)$, $t \geqslant 0$ існує стаціонарний режим, то через π_{ij}, $(i, j) \in S$ будемо позначати стаціонарні імовірності. Введемо також такі позначення:

$$\pi_j = (\pi_{1j} \quad \pi_{2j})^T, \ j \geqslant 0, \ \tilde{A}_{j-1} = \begin{pmatrix} \mu j\theta & -\lambda_j(\beta + \lambda_j + j\theta) \\ 0 & \lambda_j + \beta \end{pmatrix}, \quad j \geqslant 1,$$

$$\tilde{A}_{j-1}^{-1} = \frac{1}{\mu j\theta(\lambda_j + \beta)} \begin{pmatrix} \lambda_j + \beta & \lambda_j(\beta + \lambda_j + j\theta) \\ 0 & \mu j\theta \end{pmatrix}, \quad j \geqslant 1,$$

$$\tilde{B}_{j-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{j-1}(\lambda_j + j\theta) & 0 \\ \alpha & \lambda_{j-1} \end{pmatrix}, \quad j \geqslant 1, \ A_j = \tilde{A}_j^{-1}\tilde{B}_j, \quad j \geqslant 0,$$

$$\delta_0 = (\lambda_0 / \mu, 0)^T, \ 1^T = (1 \quad 1).$$

Теорема 1. *Нехай* $\lambda = \overline{\lim_{k\to\infty}} \lambda_k < \infty$ *і виконується умова*

$$\lambda < \frac{\beta}{\alpha + \beta}\mu. \tag{1}$$

Тоді для $Q(t)$, $t \geqslant 0$ *існує стаціонарний режим і стаціонарні імовірності мають вигляд*:

$$\pi_0 = \pi_{00}\delta_0, \ \pi_j = \pi_{00} A_{j-1} \times \ldots \times A_0 \delta_0, \ j \geqslant 1, \tag{2}$$

$$\pi_{0\,j+1} = \frac{1}{(j+1)\theta}(\lambda_j + \alpha, \quad \lambda_j)\pi_j, \ j \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\pi_{00} = \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\mathbf{1}^T + \frac{1}{\theta(j+1)}(\lambda_j + \alpha, \ \lambda_j) \right) A_{j-1} \times \ldots \times A_0 \cdot \delta_0 \right\}^{-1}. \tag{4}$$

Відзначимо, що при побудові алгоритму обчислення стаціонарних імовірностей на основі формул (2)—(4) необхідно розв'язати задачу оцінки залишку ряду

$$T(n) = \sum_{j=n}^{\infty} \left(\mathbf{1}^T + \frac{1}{\theta(j+1)}(\lambda_j + \alpha, \ \lambda_j) \right) A_{j-1} \times \ldots \times A_0 \cdot \delta_0.$$

Очевидно, це дозволить контролювати точність обчислення π_{00} та інших стаціонарних імовірностей.

При виконанні умови (1) оберемо $\varepsilon_0 \in \left(0, \dfrac{\beta\mu}{\alpha + \beta} - \lambda\right)$. Головну роль при побудові оцінки для $T(n)$ відіграє перронів корінь h_0 матриці

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda + \varepsilon_0}{\mu} & \dfrac{(\lambda + \varepsilon_0)^2}{\mu(\lambda + \varepsilon_0 + \beta)} \\ \dfrac{\alpha}{\mu} & \dfrac{(\lambda + \varepsilon_0)(\alpha + \mu)}{\mu(\lambda + \varepsilon_0 + \beta)} \end{pmatrix}.$$

Неважко обчислити, що

$$h_0 = \frac{\lambda+\varepsilon_0}{\mu} \times \frac{(\alpha+\beta+\mu+\lambda+\varepsilon_0)+\sqrt{(\alpha+\beta+\mu+\lambda+\varepsilon_0)^2-4\mu(\beta+\lambda+\varepsilon_0)}}{2(\beta+\lambda+\varepsilon_0)} < 1 .$$

Тепер оберемо $\varepsilon_1 \in (0, h_0^{-1}-1)$. Тоді, очевидно, $R=(1+\varepsilon_1)h_0 < 1$. Для $T(n)$ справедлива така верхня оцінка.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і вибір* $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ *зроблено. Тоді*

$$T(n) \leqslant C \cdot R^n \text{ при } n \geqslant N = N(\varepsilon_0, \varepsilon_1),$$

де стала $C = C(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ *не залежить від* n.

Таким чином, швидкість збіжності $T(n)$ до нуля має показникову верхню оцінку. Зазначимо також, що $C(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ і $N(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ за обраними $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ можуть бути конструктивно задані.

У випадку пуассонівського потоку первинних викликів ($\lambda_k = \lambda > 0$) нормуючу сталу у формулах (2), (3) (імовірність π_{00}) можна обчислювати за точною формулою.

Наслідок 1. Нехай $\lambda_k = \lambda > 0$, $k \geqslant 0$ і виконується умова (1). Тоді для $Q(t)$, $t \geqslant 0$ існує стаціонарний режим, стаціонарні імовірності задаються формулами (2), (3), в яких

$$\pi_{00} = \frac{t_1^{-A} t_2^{-B} (t_1-1)^{A+1} (t_2-1)^{B+1}}{(t_1-1)(t_2-1)+A\gamma(t_2-1)+B\gamma(t_1-1)}, \tag{5}$$

де $\gamma = \dfrac{\theta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+\lambda(\alpha+\beta)}$, $A = -\dfrac{\lambda^2+\lambda(\alpha+\beta)+\alpha\beta-\lambda^2 t_1}{\lambda\theta(t_1-t_2)}$, $B = \dfrac{\lambda^2+\lambda(\alpha+\beta)+\alpha\beta-\lambda^2 t_2}{\lambda\theta(t_1-t_2)}$, $1 < t_2 < t_1$ — корені квадратного рівняння $\lambda t^2 - (\lambda+\mu+\alpha+\beta)t + \mu\left(1+\dfrac{\beta}{\lambda}\right) = 0$.

Числові експерименти. Продемонструємо використання формул (2), (3) для обчислення такої важливої характеристики як імовірність блокування потоку первинних вимог

Імовірність блокування системи для різних значень інтенсивностей α та β при фіксованих значеннях $\lambda = 2$, $\mu = 23$, $\theta = 3$

α	β									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,1	0,173	0,13	0,116	0,109	0,104	0,101	0,099	0,098	0,097	0,096
0,2	0,258	0,174	0,145	0,13	0,122	0,116	0,112	0,109	0,106	0,104
0,3	0,342	0,217	0,174	0,152	0,139	0,13	0,124	0,12	0,116	0,113
0,4	0,423	0,261	0,203	0,174	0,157	0,145	0,137	0,13	0,126	0,122
0,5	0,502	0,304	0,232	0,196	0,174	0,159	0,149	0,141	0,135	0,13
0,6	0,577	0,348	0,261	0,217	0,191	0,174	0,161	0,152	0,145	0,139
0,7	0,646	0,391	0,29	0,239	0,209	0,188	0,174	0,163	0,155	0,148
0,8	0,71	0,434	0,319	0,261	0,226	0,203	0,186	0,174	0,164	0,157
0,9	0,766	0,477	0,348	0,283	0,243	0,217	0,199	0,185	0,174	0,165
1	0,815	0,52	0,377	0,304	0,261	0,232	0,211	0,196	0,184	0,174

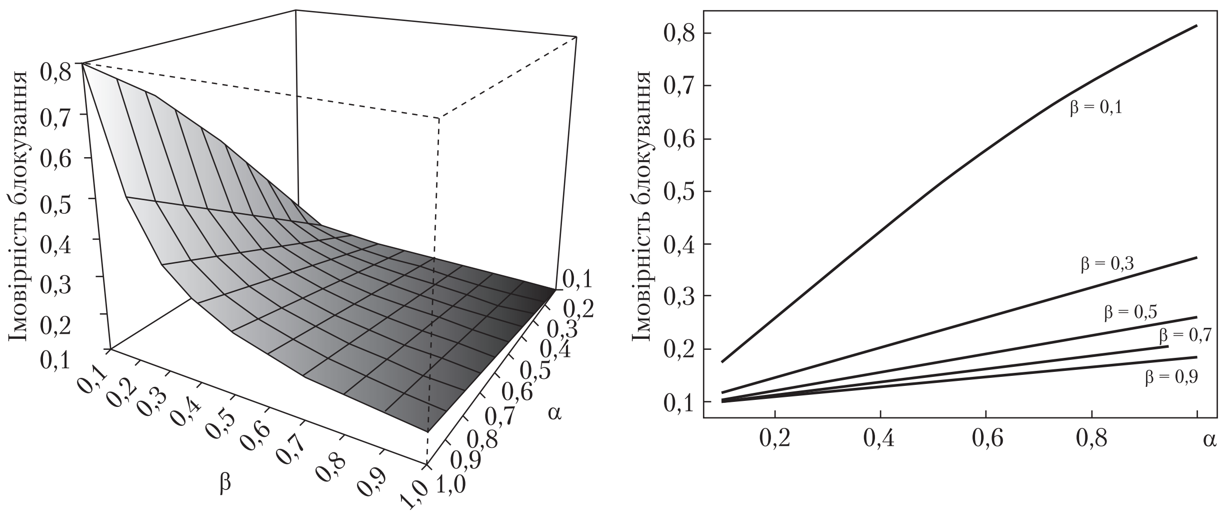

Рис. 3. Імовірність блокування системи для різних значень інтенсивностей α та β при фіксованих значеннях $\lambda = 2,\ \mu = 23,\ \theta = 3$

$P_b = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}^T \pi_j$. При заданих значеннях $\lambda = 2$, $\mu = 23$, $\theta = 3$ наведена таблиця містить імовірність блокування для різних інтенсивностей α та β.

Табличні дані можна подати у графічному вигляді (рис. 3).

Висновки. Для системи з повторними викликами і ненадійним приладом знайдена умова існування стаціонарного режиму (умова (1)), яку зручно перевіряти на практиці. Для обчислення стаціонарних імовірностей отримані векторно-матричні формули (2), (3), при цьому нормуюча стала (імовірність π_{00}) задається рядом (4). У теоремі 2 отримана оцінка залишку цього ряду, що дозволяє у формулах (2), (3) контролювати точність обчислень.

Для пуассонівського потоку первинних вимог імовірність π_{00} представлена точною формулою через параметри моделі (формула (5)). Обчислення стаціонарних імовірностей і похідних від них характеристик проілюстровано на прикладі обчислення імовірності блокування (див. таблицю).

Отримані результати можуть бути використані для розв'язання оптимізаційних задач у класі порогових стратегій (див., наприклад, [5]).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997. 329 p.
2. Yang T., Templeton J.G.C. A survey on retrial queues. *Queueing Systems*. 1987. №2. P. 201—233.
3. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial queueing systems. A computational approach. Berlin: Springer, 2008. 317 p.
4. Nazarov A., Sztrik J., Kvach A. A survey of recent results in finite-source retrial queues with collisions. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications:* 17th International conference and 12th workshop on Retrial Queues and Related Topics (Tomsk, 10—15 sept. 2018). Cham, Springer. P. 1—15.

5. Lebedev E.A., Ponomarev V.D. Retrial queues with variable service rate. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. **47**. № 3. P. 434—441.
6. Gomez-Corral A., Ramalhoto M.F. The stationary distribution of a Markovian process arising in the theory of multiserver retrial queueing systems. *Mathematical and Computer Modelling*. 1999. **30**. P. 141—158.
7. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. Москва: Мир, 1993. 336 с.
8. Thiruvengadam, K. Queueing with breakdowns. *Operations Research*. 1963. **11**. P. 62—71.
9. Li W., Shi D. and Chao X. Reliability analysis of M/G/1 queueing systems with server breakdowns and vacations. *J. of Applied Probability*. 1997. **34**. P. 546—555.
10. Artalejo J.R. New results in retrial queueing systems with breakdowns of the servers. *Statistica Neerlandica*. 1994. **48**. P. 23—36.
11. Wartenhorst P. N parallel queueing systems with server breakdown and repair. *European J. Operational Research*. Elsevier. 1995. **82(2)**. P. 302—322.
12. Vinod B. Unreliable queueing systems. *Computers and Operations Research*. 1985. **12**. P. 322—340.
13. Wang J., Cao J., Li Q. Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs. *Queueing Systems*. 2001. № 4. P. 363—380.
14. Artalejo J., Falin G. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis. *Revista Matemática Complutense*. 2002. **15**. № 1. P. 101—129.

Надійшло до редакції 23.06.2020

REFERENCES

1. Falin, G. I., Templeton, J. G. C. (1997). Retrial queues. London: Chapman & Hall.
2. Yang, T. & Templeton, J.G.C. (1987). A survey on retrial queues. Queueing Systems, No. 2, pp. 201-233.
3. Artalejo, J. R. & Gomez-Corral, A. (2008). Retrial queueing systems. A computational approach. Berlin: Springer
4. Nazarov, A., Sztrik, J., Kvach, A. (2018, september). A survey of recent results in finite-source retrial queues with collisions. Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. 17th International conference and 12th workshop on Retrial Queues and Related Topics (pp. 10-15). Cham: Springer.
5. Lebedev, E. A. & Ponomarev, V. D. (2011). Retrial queues with variable service rate. Cybernetics and Systems Analysis, 47, No. 2, pp. 434-441.
6. Gomez-Corral, A. & Ramalhoto, M. F. (1999). The stationary distribution of a Markovian process arising in the theory of multiserver retrial queueing systems. Mathematical and Computer Modelling. 30, pp. 141-158.
7. Walrand, J. (1988). Introduction to Quening Networks. New York: Prentice-Hall.
8. Thiruvengadam, K. (1963). Queueing with breakdowns. Operations Research, 11, pp. 62-71.
9. Li, W., Shi, D. and Chao, X. (1997). Reliability analysis of M/G/1 queueing systems with server breakdowns and vacations. J. of Applied Probability, 34, pp. 546-555.
10. Artalejo, J. R. (1994). New results in retrial queueing systems with breakdowns of the servers. Statistica Neerlandica, 48, pp. 23-36.
11. Wartenhorst, P. (1995). N parallel queueing systems with server breakdown and repair. European J. Operational Research, Elsevier, 82(2), pp. 302-322.
12. Vinod, B. (1985). Unreliable queueing systems. Computers and Operations Research, 12, pp. 322-340.
13. Wang, J., Cao, J. & Li, Q. (2001). Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs. Queueing Systems, No. 4, pp. 363-380.
14. Artalejo, J. & Falin, G. (2002). Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis. Revista Matemática Complutense, 15, No. 1, pp. 101-129.

Received 23.06.2020

E.A. Lebedev, M.M. Sharapov, H.V. Livinska
Taras Shevchenko National University of Kyiv
E-mail: leb@unicyb.kiev.ua, sharapov@unicyb.kiev.ua, hanna.livinska@univ.kiev.ua

ON A SYSTEM WITH RETRIAL QUEUE
AND UNRELIABLE SERVER

We consider a model of retrial queue with one unreliable server whose lifetime is an exponentially distributed random variable with the known failure rate. A two-dimensional Markov chain defines the service process in the system. Its first component indicates the number of sources of repeated calls, and the second one fixes the status of the server at the current time: the server is busy, free, and ready for maintenance or out of order. The main feature of the considered system is that the input flow rate depends on the size of the queue of repeated calls. Each of the sources of repeated calls can generate a call with the same rate. If a primary or repeated call arrives into the system and finds the server idle, its service begins immediately. If the server is busy, the call is directed to the orbit and becomes a source of retrial calls.

For the service process, a condition for the existence of a stationary regime and vector-matrix formulas are found. These formulas express stationary probabilities through the model parameters in the explicit form. To control the accuracy of calculations using these formulas, an estimate of the remainder of the series is obtained, which sets the normalizing constant. The rate of the remainder decreasing to zero has an exponential upper estimation. In the case where the input flow is the Poisson one, the exact expression is obtained for a normalizing constant. The application of the obtained results is demonstrated by numerical examples, which show the dependence of the blocking probability in the stationary regime on the parameters of the system. The obtained results can be used to solve optimization problems in the class of threshold strategies.

Keywords: *stationary regime, retrial queue, unreliable server, ergodicity condition, matrix-vector representation, normalizing constant.*