ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.043
УДК 538.931+538.935

Л.М. Христофоров

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ
E-mail: lchrist@bitp.kiev.ua

Випадкове блукання з поверненням в одновимірному ланцюжку

Представлено академіком НАН України А.Г. Загороднім

Якщо класичну модель випадкового блукання доповнити стохастичним поверненням у початкову точку, то весь процес набуває нових нетривіальних рис. Зокрема, з'являється нерівноважний стаціонарний стан, а середній час першого досягнення цілі (нескінченний у відсутності повторних стартів) стає скінченним і може бути оптимізований належним вибором середньої частоти переривання r. Показано, що у випадку блукання вузлами одновимірного ланцюжка ці ефекти мають суттєві відмінності від своїх аналогів у класичній континуальній дифузійній моделі. Зокрема, асимптотика залежностей стаціонарних населеностей вузлів від r змінюється з експоненційного спадання на степеневе. Подібні якісні й кількісні відмінності мають місце й для середнього часу першого досягнення. У випадку скінченного ланцюжка додається цікавий ефект виникнення й зникнення можливості мінімізації цього часу в залежності від відстані до визначеної цілі.

Ключові слова: *низьковимірні ґратки, випадкове блукання, стохастичне повернення, час першого досягнення.*

Процеси зі стохастичним поверненням (stochastic resetting) є досить розповсюдженим явищем. У багатьох випадках, змарнувавши якийсь час на безуспішне досягнення певної цілі, вважають розумним повернутися в початковий стан з надією, що наступна спроба виявиться більш вдалою. Цікаво, що така поведінка не є прерогативою якогось інтелекту, оскільки її аналоги зустрічаються у функціюванні навіть окремих молекул, зокрема ензимів [1, 2]. Природне питання, яке при цьому виникає, є таким: коли саме доцільно переривати невдалу спробу й починати нову? Точніше, чи існує — звісно, для певної більш-менш конкретизованої системи/моделі — оптимальна (середня) частота стохастичного переривання, що прискорить досягнення цілі?

Формалізація подібних задач на найпростіших моделях почалася зовсім нещодавно. Так, в роботі [3], шо вже стала класичною, було розглянуто одновимірний дифузійний рух частинки з раптовим стохастичним поверненням у початкову точку. Було показано, що, по-перше, існує нестандартний стаціонарний розподіл ймовірностей положень частинки. По-друге, що цікавіше, виникає нетривіальна залежність середнього часу першого досяг-

Цитування: Христофоров Л.М. Випадкове блукання з поверненням в одновимірному ланцюжку. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 8. С. 43—50. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.043

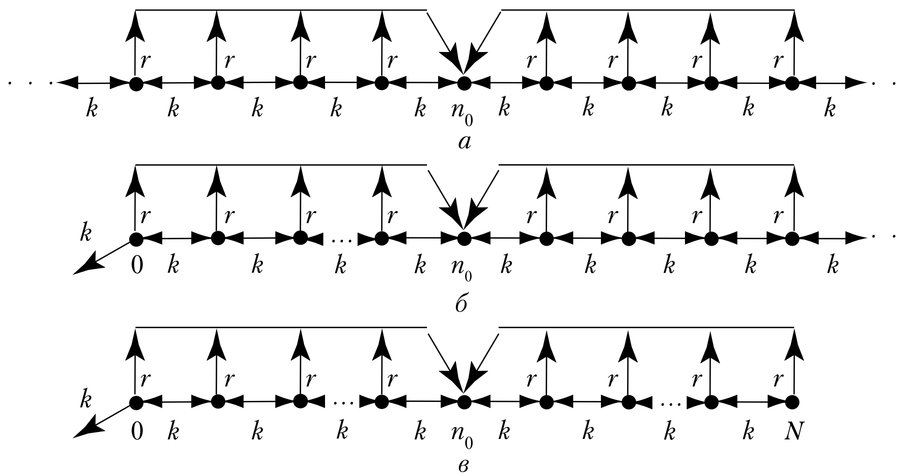


Рис. 1. Випадкове блукання з поверненням у нескінченному ланцюжку (*а*); напівобмеженому ланцюжку з витоком (*б*) та скінченному ланцюжку з витоком (*в*)

нення (mean first passage time, MFPT) визначеної цілі — скажімо, точки $x = 0$ за умови старту з точки $x = x_0$ — від середньої частоти r стохастичних повернень. А саме, цей час, нескінченний при $r = 0$, стає скінченним і навіть має мінімальне значення при певному $r = r^*$. З огляду, зокрема, на те, що розподіли часів здійснення стадій ензиматичних реакцій, починаючи з наріжної роботи [4], тепер прямо отримуються на поодиноких ензимах, цей результат привернув значну увагу й супроводжувався різноманітними узагальненнями на ускладнених моделях (з кількома частинками, збільшенням розмірності простору тощо, див., наприклад, [3, 5, 6]). Проте ці розгляди стосувалися здебільшого континуальних моделей, тоді як, наприклад, реакційні стани ензимів (проміжні фермент-субстратні комплекси) зазвичай складають дискретний набір. Взагалі, з дискретними ланцюжками можна пов'язати безліч міграційних і пошукових процесів. Тому в цій роботі систематично розглянуто процес переривчастого випадкового блукання вузлами одновимірного ланцюжка[1] з акцентом на відмінностях результатів від таких у континуальній моделі [3], особливо щодо MFPT.

Нескінченний ланцюжок з поверненням. Отже, додамо до класичного випадкового блукання процес стохастичного повернення з будь-якого вузла в початковий вузол n_0 з середньою частотою («константою швидкості») r, див. схему на рис. 1, *а*.

Цій схемі відповідає рівняння еволюції ймовірності $\rho_n(t)$ перебування на вузлі n:

$$\mathrm{d}\rho_n / \mathrm{d}t = k(\rho_{n-1} - 2\rho_n + \rho_{n+1}) - r\rho_n + \delta_{n_0 n} r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m, \quad \rho_n(0) = \delta_{n_0 n}, \tag{1}$$

де k — константа швидкості стрибків у сусідній вузол (прямий аналог коефіцієнта дифузії в континуальних моделях). Оскільки система поки що залишається замкненою, сума в останньому члені рівняння (1) є насправді одиницею. Проте в наступних розділах вона вже не буде такою, тому залишена тут з методичних причин. Після замін $\tau = 2kt$ та $\rho_n(\tau) = e^{-\tau}\varphi_n(\tau)$ рівняння (1) набуває вигляду (2):

[1] що може бути і (напів)обмеженим

$$\frac{d\varphi_n}{d\tau} = \frac{1}{2}(\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1}) - \frac{a^2}{2}\varphi_n + \delta_{n_0 n}\frac{a^2}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi_m, \quad \varphi_n(0) = \delta_{n_0 n}, \tag{2}$$

де $a^2 \equiv r/k$. Типовим засобом розв'язання подібних рівнянь є введення твірної функції $\Phi(z,\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \varphi_m(\tau)$ так що $\Phi(z,0) = z^{n_0}$, а $\varphi_n(\tau) = (2\pi i)^{-1}\oint \Phi(z,\tau) z^{-n-1} dz$, де контур охоплює точку $z = 0$. Тоді (2) переходить у (3):

$$\frac{\partial \Phi(z,\tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} - a^2\right)\Phi(z,\tau) = \frac{a^2}{2} z^{n_0} \Phi(1,\tau). \tag{3}$$

Розв'язком (3) без правої частини є

$$\Phi_0(z,\tau) = z^{n_0} e^{-\frac{a^2}{2}\tau} e^{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\tau} = z^{n_0} e^{-\frac{a^2}{2}\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m I_m(\tau),$$

де $I_m(\tau)$ — модифікована функція Бесселя. Тоді, як можна перевірити безпосереднім диференціюванням,

$$\Phi(z,\tau) = z^{n_0} e^{-\frac{a^2}{2}\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \left[I_m(\tau) + \frac{a^2}{2}\int_0^{\tau} e^{\frac{a^2}{2}\theta} I_m(\tau-\theta)\Phi(1,\theta)\, d\theta \right]. \tag{4}$$

Лаплас-перетворення $\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau)\, d\tau$ зводить (4) до (5):

$$\tilde{\Phi}(z,s) = z^{n_0}\left[1 + \frac{a^2}{2}\tilde{\Phi}(1,s)\right]\sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \tilde{I}_m\left(s + \frac{a^2}{2}\right), \tag{5}$$

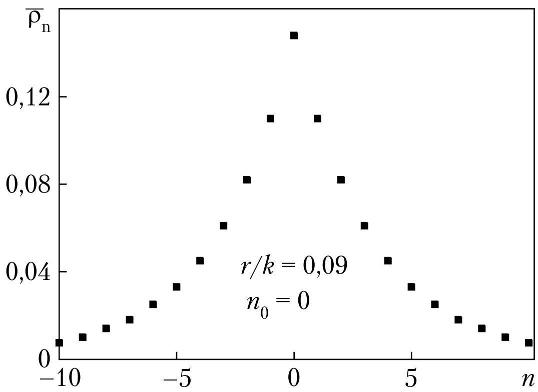
де $\tilde{I}_m(p) = \tilde{I}_{-m}(p) = \left(p - \sqrt{p^2-1}\right)^{|m|} / \sqrt{p^2-1}$ [7]. Підставляючи $z = 1$ у (5), знаходимо, що $\tilde{\Phi}(1,s) = I(s)/[1-(a^2/2)I(s)]$, де

$$I(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{I}_m\left(s + \frac{a^2}{2}\right) = \left(s + \frac{a^2}{2} - 1\right)^{-1}. \tag{6}$$

У даному випадку з (6) випливає, що $\tilde{\Phi}(1,s)$ є просто $1/(s-1)$ внаслідок збереження суми $\Phi(1,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t) = 1$. Тоді контурним інтегруванням рівняння (5) знаходимо розв'язок рівняння (1) в лаплас-образах $\tilde{\rho}_n^{(n_0)}(s) = \tilde{\varphi}_n^{(n_0)}(s+1)$ (верхній індекс позначає початкову умову):

$$\tilde{\rho}_n^{(n_0)}(s) = \left(1 + \frac{a^2}{2s}\right)\tilde{I}_{n-n_0}\left(s + \frac{a^2}{2} + 1\right), \tag{7}$$

що відповідає еволюції



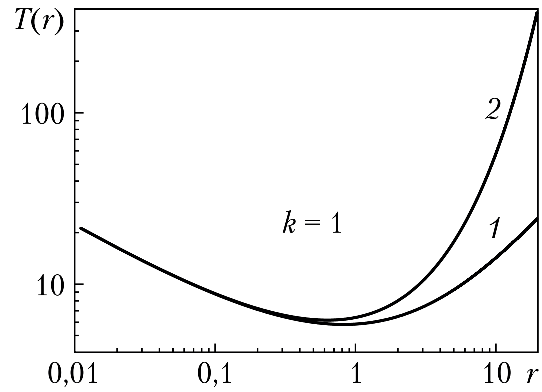


Рис. 2. Приклад стаціонарного розподілу в нескінченному ланцюжку з поверненням

Рис. 3. Залежність часу першого досягнення від середньої частоти повернення у дискретній ($T(n_0=1,r)$ — крива *1* та континуальній ($T(x=2,r)$ — крива *2* моделях

$$\rho_n^{(n_0)}(\tau)=e^{-\left(1+\frac{a^2}{2}\right)\tau}I_{n-n_0}(\tau)+\frac{a^2}{2}\int\limits_0^\tau e^{-\left(1+\frac{a^2}{2}\right)\theta}I_{n-n_0}(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{8}$$

Стаціонарний розподіл $\bar{\rho}_n^{(n_0)}=\rho_n^{(n_0)}(\tau\to\infty)$ можна отримати як з (8), так і з (7), оскільки $\bar{\rho}_n^{(n_0)}=\lim\limits_{s\to 0}s\tilde{\rho}_n^{(n_0)}(s)$. Він є таким:

$$\bar{\rho}_n^{(n_0)}=\frac{a\left(\frac{a^2}{2}+1+a\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}\right)^{-|n-n_0|}}{\sqrt{4+a^2}}=\frac{\left(\frac{r}{2k}+1+\sqrt{\frac{r}{k}+\frac{r^2}{4k^2}}\right)^{-|n-n_0|}}{\sqrt{1+\frac{4k}{r}}}, \tag{9}$$

див. рис. 2. Для малих $a\ll 1$ (9) зводиться до $(a/2)\exp(-a|n-n_0|)$, що аналогічно результату роботи [3] для континуальної моделі з початком в точці x_0, якщо замість k поставити коефіцієнт дифузії D. Проте асимптотика $a\gg 1$ є *степеневою*, $\bar{\rho}_n^{(n_0)}(a\gg 1)=(r/k)^{-|n-n_0|}$, що істотно відрізняється від експоненційного спадання зі збільшенням r у континуальній моделі.

Середній час першого досягнення (MFPT). Під цим розуміють середній час, за який мігруючий об'єкт, стартувавши з певного вузла ланцюжка, вперше досягне іншого вузла, визначеного як "ціль". Його континуальний аналог $T(x_0,r)$ (з ціллю в $x=0$) розраховано в [3] за допомогою рівняння оберненої еволюції. У відсутності стохастичного повернення, як добре відомо, він є нескінченним за будь-яких, навіть дуже малих x_0.

Для розрахунку цієї величини у вузельній схемі рис. 1 ми використаємо інший підхід, більш прийнятний, зокрема, в аналізі реакцій поодиноких молекул [2, 4, 8]. Розподіл $f(t)$ часів першого досягнення, скажімо, вузла $n=-1$ є просто $f(t)=k\rho_0^{(n_0)}(t)$, де $\rho_0^{(n_0)}(t)$ відповідає схемі для напівобмеженого ланцюжка з $n=0,1,2\ldots$ за наявності витоку k на вузлі $n=0$ (див. рис. 1, *б*). Рівняння еволюції при цьому зберігає вигляд (1), але за умови $\rho_n=0$ для всіх $n<0$. Звісно, тепер сума $\sum_m\rho_m(t)$ вже не дорівнює одиниці. Важливо, що для обчислення MFPT $T(x_0, r)$ не обов'язково знати явний розв'язок $\rho_0^{(n_0)}(t)$ (що стає набагато складнішим, ніж (8)), оскільки

$$T(n_0, r) = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt = k\int_0^\infty t\rho_0^{(n_0)}(t)\, dt = -(1/4k)\, (d\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s)/ds)_{s=0}\,,$$

а лаплас-образ $\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s)$ отримується за такою ж процедурою, що й у попередньому розділі, з тією лише різницею, що тепер твірна функція будується як $\Phi(z,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \varphi_m(\tau)$. Це зрештою дає:

$$\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s) = \frac{2\left(s + \dfrac{a^2}{2}\right)\tilde{I}_{n_0}\left(s + \dfrac{a^2}{2} + 1\right)}{2s + s\tilde{I}_1\left(s + \dfrac{a^2}{2} + 1\right) + \dfrac{a^2}{2}\tilde{I}_{n_0}\left(s + \dfrac{a^2}{2} + 1\right)}. \tag{10}$$

Беручи похідну по S від виразу (10) в точці $s = 0$, отримуємо:

$$T(n_0, r) = \frac{1}{ka^2}\left[\left(\frac{a^2}{2} + 1 + a\sqrt{1 + \frac{a^2}{4}}\right)^{(n_0+1)} - 1\right] = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r}{2k} + 1 + \sqrt{\frac{r}{k} + \frac{r^2}{4k^2}}\right)^{(n_0+1)} - 1\right]. \tag{11}$$

Спробуємо тепер порівняти (11) з результатом у континуальній моделі, $T(x_0, r) = \dfrac{1}{r}(e^{x_0\sqrt{r/D}} - 1)$ [3], замінюючи D на k, а x_0 — на $n_0 + 1$ (відстань до цілі). У випадку $n_0 = 0$ (старт із сусіднього з ціллю вузла) маємо такі асимптотики. Якщо $r \to 0$ (відсутність переривання), тоді $T(n_0, r)$ і $T(x_0, r)$ однаково прямують до нескінченності як $\sim (kr)^{-1/2}$. Але в іншій границі, $r \to \infty$, результати радикально відрізняються: $T(x_0, r)$ знов прямує до нескінченності, до того ж експоненційно, тоді як $T(n_0, r)$ — до очевидного значення $1/k$ (випадок, що насправді не охоплюється континуальним розглядом). Для $n_0 \geqslant 1$ вже з'являється оптимальна частота переривання r^*, за якої $T(n_0, r)$ має мінімум, оскільки тепер теж стає нескінченним в обох границях, $r \to 0$ та $r \to \infty$ (див. рис. 3), але асимптотики $r \to \infty$ суттєво різняться: якщо $T(x_0, r)$ зростає експоненційно, то $T(n_0, r)$ — *степенево*, $\sim r^{n_0}$.

Скінченний ланцюжок. Цьому варіанту відповідає схема рис. 1, *в*. Для розрахунку середнього часу першого досягнення мішені тут (на відміну від міграції квантової частинки [9]) не має значення, чи обмежений ланцюжок з лівого боку, чи ні — важливо лише те, що $0 \leqslant n_0 \leqslant N$, де N — кінцевий вузол праворуч. Отже, фактично розв'язується задача для обмеженого ($0 \leqslant n \leqslant N$) ланцюжка з витоком на вузлі $n = 0$, тобто рівняння

$$\mathrm{d}\rho_n/\mathrm{d}t = k(\rho_{n-1} - 2\rho_n + \rho_{n+1}) + k\rho_N\delta_{Nn} - r\rho_n + \delta_{n_0 n}\, r\sum_{m=0}^{N}\rho_m\,, \tag{12}$$

з граничними умовами $\rho_{-1} = \rho_{N+1} = 0$ та початковою умовою $\rho_n(0) = \delta_{n_0 n}$, $0 \leqslant n_0 \leqslant N$. Далі застосовуємо до (12) ту ж саму процедуру, що й у попередніх розділах, будуючи твірну функцію у вигляді скінченної суми $\Phi(z,\tau) = \sum_{m=0}^{N} z^m \varphi_m(\tau)$. У підсумку це приводить до такого виразу для $\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s)$:

$$\tilde{\rho}_0^{(n_0)}(s)=\left(s+\frac{a^2}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{\tilde{I}_{n_0}\left[1+\frac{1}{2}(\tilde{I}_1-\tilde{I}_0)\right]-\frac{1}{2}\tilde{I}_{N-n_0}(\tilde{I}_{N+1}-\tilde{I}_N)}{\left[s\left(1+\frac{1}{2}\tilde{I}_1\right)+\frac{a^2}{4}\tilde{I}_{n_0}\right]\left[1+\frac{1}{2}(\tilde{I}_1-\tilde{I}_0)\right]-\frac{1}{4}(\tilde{I}_{N+1}-\tilde{I}_N)\left(s\tilde{I}_{N+1}+\frac{a^2}{2}\tilde{I}_{N-n_0}\right)},\qquad(13)$$

де всі лаплас-образи $\tilde{I}_l$ беруться в точці $(s+1+a^2/2)$. Цікаво зупинитися на окремому випадку відсутності переривання, $r=0$, оскільки внаслідок скінченності ланцюжка $T(n_0,N)$ стає скінченним і має досить простий явний вигляд:

$$T(n_0,N)_{r=0}=\frac{1}{2k}(2+n_0-n_0^2+2n_0N+2N)\qquad(14)$$

зростаючи від $(N+1)/k$ при $n_0=0$ до $(N+1)(N+2)/2k$ при $n_0=N$. Якщо ж $r\neq 0$, то диференціювання по s формули (13) призводить до занадто громіздкого виразу навіть за невеликих N, який навряд чи вартий аналітичних зусиль. Натомість краще розраховувати $T(n_0,N,r)$ на основі (13) чисельно, що не викликає жодних проблем для стандартних математичних програм. Приклад розрахованих $T(n_0,N,r)$ для $N=5$ подано на рис. 4, і він висвітлює цікаве розмаїття сценаріїв в залежності від місця старту n_0.

Так, для $n_0=0$ маємо монотонне зменшення $T(n_0,N,r)$ до $1/k$ в границі $r\to\infty$. Для $n_0=1$ вже з'являється оптимальна середня частота повернення (мінімум $T(n_0,N,r)$ за деякої частоти r^*). Ця можливість зберігається і для $n_0=2$, а ось для $n_0=3$ ресетінг вже тільки погіршує $T(n_0,N,r)$, монотонно збільшуючи його до нескінченності у границі $r\to\infty$. При збільшенні N результати досить швидко переходять у такі попереднього розділу (формула (11)).

Висновки. Підсумуємо ті нові риси (у порівнянні з такими континуальної моделі [3]), які з'являються у випадкового блукання з поверненням вузлами одновимірного ланцюжка. Вже стаціонарний розподіл заселеностей вузлів (9) має істотно відмінний закон спадання зі збільшенням частоти стохастичних повернень r (степеневий замість отриманого в [3] експоненційного). Ще яскравіші відмінності виникають у співставленні результатів щодо середніх часів першого досягнення цілі, $T(n_0,r)$ та $T(x_0,r)$. Наведений тут вираз (11) є точним для будь-якого розташування цілі, навіть на сусідньому вузлі, тоді як спроба отримати відповідний аналог з формули для $T(x_0,r)$ в цьому випадку призводить до хибних висновків. Для $n_0\geqslant 1$ певна аналогія результатів (існування оптимальної частоти повернень) зберігається, але відмінності на кількісному (див. рис. 3) і навіть на якісному рівні (степеневе збільшення r^{n_0} замість експоненційного) залишаються суттєвими. Нарешті, розгляд випадку скінченного ланцюжка виявив цікавий ефект виникнення й зникнення оптимального ре-

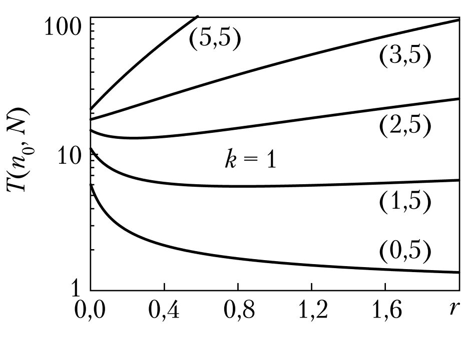


Рис. 4. Якісні зміни залежності $T(n_0, N, r)$ від r для різних стартових позицій n_0 у скінченному ланцюжку ($N=5$)

жиму переривання в залежності від відстані до цілі. Отже, розгляд дискретного аналога наріжної континуальної моделі дійсно додає низку важливих рис щодо стохастичних процесів з поверненням та їхніх можливих застосувань.

Робота виконана за конкурсною темою 0120U100858 НАН України.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Reuveni S., Urbakh M., Klafter J. Role of substrate unbinding in Michaelis-Menten enzymatic reactions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2014. **111**. P. 4391—4396. https://doi.org/10.1073/pnas.1318122111
2. Христофоров Л.М. Вплив від'єднання субстрату на кінетику ферментативного каталізу. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2019. № 1. С. 40—46. http://doi.org/10.15407/dopovidi2019.01.040
3. Evans M.R., Majumdar S.N. Diffusion with stochastic resetting. *Phys. Rev. Lett*. 2011. **106**. P. 160601. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.160601
4. Lu H.P., Xun L., Xie X.S. Single-molecule enzymatic dynamics. *Science*. 1998. **282**. P. 1877—1882. https://doi.org/10.1126/science.282.5395.1877
5. Reuveni S. Optimal stochastic restart renders fluctuations in first passage times universal. *Phys. Rev. Lett*. 2016. **116**. P. 170601. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.170601
6. Majumdar S.N., Pal A., Schehr G. Extreme value statistics of correlated random variables: A pedagogical review. *Phys. Reports*. 2020. **840**. P. 1—32. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.10.005
7. Bateman H. Tables of integral transforms. V. 1. P. 182. New York: McGraw-Hill, 1954.
8. Christophorov L.N. On the velocity of enzymatic reactions in Michaelis—Menten-like schemes (ensemble and single-molecule versions). *Ukr. J. Phys*. 2020. **65**. P. 412—418. https://doi.org/10.15407/ujpe65.5.412
9. Christophorov L.N., Zagorodny A. G. Peculiarities of migration and capture of a quantum particle in a chain with traps. *Chem. Phys. Lett*. 2017. **682**. P. 77—81. http://dx.doi.org/10.1016/j.cplett.2017.06.010

Надійшло до редакції 01.06.2020

REFERENCES

1. Reuveni, S., Urbakh, M. & Klafter J. (2014). Role of substrate unbinding in Michaelis-Menten enzymatic reactions. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 111, pp. 4391-4396. https://doi.org/10.1073/pnas.1318122111
2. Christophorov, L. N. (2019). Influence of substrate unbinding on kinetics of enzymatic catalysis. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 1, pp. 40-46 (in Ukrainian). http://doi.org/10.15407/dopovidi2019.01.040
3. Evans, M. R. & Majumdar, S. N. (2011). Diffusion with stochastic resetting. Phys. Rev. Lett., 106, pp. 160-601. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.160601
4. Lu, H. P., Xun, L. & Xie, X. S. (1998). Single-molecule enzymatic dynamics. Science, 282, pp. 1877-1882. https://doi.org/10.1126/science.282.5395.1877
5. Reuveni, S. (2016). Optimal stochastic restart renders fluctuations in first passage times universal. Phys. Rev. Lett., 116, pp. 170601. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.170601
6. Majumdar, S. N., Pal, A. & Schehr, G. (2020). Extreme value statistics of correlated random variables: A pedagogical review. Phys. Reports, 840, pp. 1-32. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.10.005
7. Bateman, H. (1954). Tables of integral transforms. V. 1, p. 182. New York: McGraw-Hill.
8. Christophorov, L. N. (2020). On the velocity of enzymatic reactions in Michaelis-Menten-like schemes (ensemble and single-molecule versions). Ukr. J. Phys., 65, pp. 412-418. https://doi.org/10.15407/ujpe65.5.412
9. Christophorov, L. N., Zagorodny, A. G. (2017). Peculiarities of migration and capture of a quantum particle in a chain with traps. Chem. Phys. Lett., 682, pp. 77-81. http://dx.doi.org/10.1016/j.cplett.2017.06.010

Received 01.06.2020

L.N. Christophorov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: lchrist@bitp.kiev.ua

RANDOM WALK WITH RESETTING IN A 1D CHAIN

If the classical model of random walks is added with the stochastic resetting to the starting point, then the whole process acquires new nontrivial features. In particular, there appears a non-equilibrium steady state. In addition, the mean first passage time (which is infinite in the absence of restarts) becomes finite and can be optimized by choosing a proper mean intermittence frequency r. It is shown that, in the case of random walks on the nodes of a one-dimensional chain, these effects essentially differ from their analogs within the classical continuous diffusion model. In particular, the asymptotes of the dependences of stationary node populations on r change from exponential to power ones. Similar qualitative and quantitative distinctions take place for the mean first passage time as well. In the case of a finite chain, the interesting effect of emergence and disappearance of a possibility of the minimization of this time, depending on the distance to a defined target, shows up.

Keywords: *low-dimensional lattices, random walk, stochastic resetting, first passage time.*