https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.026
УДК 517.988

Я.І. Ведель, В.В. Семенов

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: yana.vedel@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com

Адаптивні алгоритми для задач про рівновагу в просторах Адамара

Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком

Одним із популярних напрямів сучасного прикладного нелінійного аналізу є дослідження задач про рівновагу (нерівностей Кі Фаня, задач рівноважного програмування). У вигляді задачі про рівновагу можна сформулювати задачі математичного програмування, задачі векторної оптимізації, варіаційні нерівності та багато ігрових задач. Класичне формулювання задачі про рівновагу вперше з'явилося в роботах Х. Нікайдо та К. Ісоди, а перші загальні алгоритми проксимального типу для розв'язання задач про рівновагу запропонував А.С. Антипін. Останнім часом виник обумовлений проблемами математичної біології та машинного навчання інтерес до побудови теорії та алгоритмів розв'язання задач математичного програмування в метричних просторах Адамара. Ще однією сильною мотивацією для дослідження даних задач є можливість записати деякі неопуклі задачі у вигляді опуклих у просторі зі спеціально підібраною метрикою. У роботі розглядаються загальні задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Для наближеного розв'язання задач запропоновано та досліджено нові адаптивні двоетапні проксимальні алгоритми. На кожному кроці алгоритмів слід здійснити послідовну мінімізацію двох спеціальних сильно опуклих функцій. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, у запропонованих алгоритмах не обчислюються значення біфункції в додаткових точках та не потрібно знання інформації про величину ліпшицевих констант біфункції. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу, слабко напівнеперервних зверху по першій змінній, опуклих та напівнеперервних знизу по другій змінній, доведені теореми про слабку збіжність породжених алгоритмами послідовностей. Доведення засновані на використанні фейєрівської властивості алгоритмів відносно множини розв'язків задачі про рівновагу. Показано, що запропоновані методи можна застосувати до варіаційних нерівностей з ліпшицевими, секвенційно слабко неперервними та псевдомонотонними операторами, що діють у гільбертових просторах.

Ключові слова: *простір Адамара, задача про рівновагу, псевдомонотонність, двоетапні проксимальні алгоритми, адаптивність, збіжність.*

Актуальним напрямом сучасного прикладного нелінійного аналізу є дослідження задач про рівновагу виду [1—5]:

$$\text{знайти } x \in C:\ F(x, y) \geqslant 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

Ц и т у в а н н я: Ведель Я.І., Семенов В.В. Адаптивні алгоритми для задач про рівновагу в просторах адамара. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 8. С. 26—34. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.026

де C — непорожня підмножина гільбертового простору H, $F: C \times C \to \mathbb{R}$ — функція така, що $F(x, x) = 0 \quad \forall x \in C$ (біфункція). У вигляді (1) можна сформулювати задачі математичного програмування та багато ігрових задач. Наприклад, якщо $F(x, y) = (Ax, y - x)$, де $A: C \to H$, то задача (1) зводиться до класичної варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } x \in C: (Ax, y - x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C. \tag{2}$$

Алгоритмам розв'язання рівноважних і близьких задач присвячено багато робіт [1—14]. Для варіаційних нерівностей Г.М. Корпелевич запропонувала екстраградієнтний метод [6]. Аналог екстраградієнтного методу для задач про рівновагу розглядався в роботі [7], в якій досліджено метод екстрапроксимального виду

$$\begin{cases} y_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(x_n, \cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n, \end{cases}$$

де $\lambda_n \in (0, +\infty)$, prox_φ — проксимальний оператор функції φ. У 1980 р. Л.Д. Попов [8] запропонував для пошуку сідлових точок опукло-вгнутих функцій цікаву модифікацію методуЕрроу—Гурвіца. У статті [5] для задач про рівновагу в гільбертовому просторі був запропонований двоетапний проксимальний алгоритм виду

$$\begin{cases} y_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(x_{n-1}, \cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n, \end{cases}$$

де $\lambda_n \in (0, +\infty)$, який є адаптацією методу Л.Д. Попова до загальних задач рівноважного програмування (див. також [9]).

Останнім часом виник обумовлений проблемами математичної біології та машинного навчання інтерес до побудови теорії й алгоритмів розв'язання задач математичного програмування в метричних просторах Адамара [15]. Ще однією сильною мотивацією для дослідження даних задач є можливість записати деякі неопуклі задачі у вигляді геодезично опуклих у просторі зі спеціально підібраною метрикою [10, 15]. Деякі дослідники почали вивчати задачі про рівновагу в просторах Адамара [11—13]. У роботі [10] отримані теореми існування для задач про рівновагу на многовидах Адамара. В [11] для більш загальних задач із псевдомонотонними біфункціями в просторах Адамара сформульовано теореми існування, запропоновано проксимальний алгоритм і доведено його збіжність. Більш конструктивний підхід описано в роботі [12], автори якої, відштовхуючись від результатів [7], запропонували для псевдомонотонних задач про рівновагу в просторах Адамара аналог екстраградієнтного методу. А в роботі [13] досліджено аналог двоетапного проксимального алгоритму [5].

У даній роботі пропонуються нові адаптивні двоетапні проксимальні алгоритми для розв'язання задач про рівновагу в метричних просторах Адамара. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, у цих алгоритмах не обчислюються значення біфункції в додаткових точках і не потрібно знання інформації про величину ліпшицевих констант біфункції. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу, слабко напівнеперервних зверху по першій змінній, опуклих і напівнеперервних знизу по другій змінній, доведено теореми про слабку збіжність породжених алгоритмами послідовностей.

Допоміжні відомості. Наведемо декілька фундаментальних понять і фактів, що пов'язані з метричними просторами Адамара. З деталями можна ознайомитися в публікації [15].

Нехай (X,d) — метричний простір і $x,\ y\in X$. Геодезичним шляхом, що з'єднує точки x та y, називають ізометрію $\gamma:[0,d(x,y)]\to X$ таку, що $\gamma(0)=x,\ \gamma(d(x,y))=y$. Множину $\gamma([0,d(x,y)])\subseteq X$ позначають $[x,y]$ і називають геодезичним сегментом з кінцями $x,\ y$ (геодезичною). Метричний простір (X,d) називають геодезичним простором, якщо довільні дві точки X можна з'єднати геодезичною, і однозначно геодезичним простором, якщо для довільних двох точок X існує єдина геодезична, що їх з'єднує.

Геодезичний простір (X,d) називають $CAT(0)$ простором, якщо для довільної трійки $y_0, y_1,\ y_2\in X$ таких, що $d^2(y_1,y_0)=d^2(y_2,y_0)=\dfrac{1}{2}d^2(y_1,y_2)$, виконується нерівність

$$d^2(x,y_0)\leqslant\frac{1}{2}d^2(x,y_1)+\frac{1}{2}d^2(x,y_2)-\frac{1}{4}d^2(y_1,y_2)\quad\forall x\in X. \tag{3}$$

Нерівність (3) називають CN нерівністю [15] (в евклідовому просторі (3) перетворюється на тотожність), а точку y_0 — серединою між точками y_1 та y_2 (вона завжди існує в геодезичному просторі). Відомо, що $CAT(0)$ простір є однозначно геодезичним [15]. Прикладами $CAT(0)$ просторів є евклідові простори, $\mathbb{R}$-дерева, многовиди Адамара (повні зв'язні ріманові многовиди недодатної кривизни) та гільбертова куля з гіперболічною метрикою [15].

Для двох точок x і y $CAT(0)$ простору (X,d) та $t\in[0,1]$ позначатимемо $tx\oplus(1-t)y$ таку єдину точку z сегмента $[x,y]$, що $d(z,x)=(1-t)d(x,y)$, $d(z,y)=td(x,y)$. Множину $C\subseteq X$ називають опуклою (геодезично опуклою), якщо для всіх x, $y\in C$ і $t\in[0,1]$ виконується $tx\oplus(1-t)y\in C$.

Повний $CAT(0)$ простір називають простором Адамара.

Нехай (X,d) — метричний простір і (x_n) — обмежена послідовність елементів X. Нехай $r(x,(x_n))=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,d(x,x_n)$. Число $r((x_n))=\inf_{x\in X}r(x,(x_n))$ називають асимптотичним радіусом (x_n), а множину $A((x_n))=\{x\in X: r(x,(x_n))=r((x_n))\}$ — асимптотичним центром (x_n). Відомо, що в просторі Адамара $A((x_n))$ складається з однієї точки [15].

Послідовність (x_n) елементів простору Адамара (X,d) слабко збігається (або, як іноді говорять, Δ-збігається [15]) до точки $x\in X$, якщо $A((x_{n_k}))=\{x\}$ для довільної підпослідовності (x_{n_k}). Відомо, що довільна послідовність елементів обмеженої, замкненої та опуклої підмножини K простору Адамара має підпослідовність, що слабко збігається до елемента з K [10].

Нехай (X,d) — простір Адамара. Функцію $\varphi: X\to\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ називають опуклою (геодезично опуклою), якщо для всіх x, $y\in X$ і $t\in[0,1]$ виконується $\varphi(tx\oplus(1-t)y)\leqslant$ $\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$. Наприклад, у просторі Адамара функції $y\mapsto d(y,x)$ опуклі. Якщо ж існує така константа $\mu>0$, що для всіх x, $y\in X$ і $t\in[0,1]$ виконується $\varphi(tx\oplus(1-t)y)\leqslant$ $\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)-\mu t(1-t)d^2(x,y)$, то функцію φ називають сильно опуклою. Відомо, що для опуклих функцій напівнеперервність знизу і слабка напівнеперервність знизу еквівалентні [15, с. 64], а сильно опукла напівнеперервна знизу функція досягає мінімуму в єдиній точці. Для опуклої, власної та напівнеперервної знизу функції $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ проксимальний оператор визначається таким чином [15]: $\operatorname{prox}_\varphi x = \arg\min_{y\in X}(\varphi(y) + \frac{1}{2}d^2(y,x))$. Оскільки функції $\varphi + \frac{1}{2}d^2(\cdot, x)$ сильно опуклі, то означення проксимального оператора коректне, тобто для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $\operatorname{prox}_\varphi x \in X$.

Задача про рівновагу в просторі Адамара. Нехай (X,d) — простір Адамара. Для непорожньої опуклої замкненої множини $C \subseteq X$ та біфункції $F: C\times C \to \mathbb{R}$ розглянемо задачу про рівновагу:

знайти $x \in C$: $F(x,y) \geqslant 0 \ \ \forall y \in C$. (4)

Припустимо, що виконані умови:

1) $F(x,x) = 0$ для всіх $x \in C$;

2) функції $F(x,\cdot): C \to \mathbb{R}$ опуклі та напівнеперервні знизу для всіх $x \in C$;

3) функції $F(\cdot, y): C \to \mathbb{R}$ слабко напівнеперервні зверху для всіх $y \in C$;

4) біфункція $F: C\times C \to \mathbb{R}$ псевдомонотонна, тобто

для всіх x, $y \in C$ з $F(x,y) \geqslant 0$ випливає $F(y,x) \leqslant 0$;

5) біфункція $F: C\times C \to \mathbb{R}$ ліпшицевого типу, тобто існують дві константи $a > 0$, $b > 0$, такі, що

$$F(x,y) \leqslant F(x,z) + F(z,y) + ad^2(x,z) + bd^2(z,y) \quad \forall x, y, \ z \in C. \tag{5}$$

Зауважимо, що умову 5 типу ліпшицевості в евклідовому просторі введено G. Mastroeni [3].

Розглянемо дуальну задачу про рівновагу:

$$\text{знайти } x \in C: \ F(y,x) \leqslant 0 \ \ \forall y \in C. \tag{6}$$

Множини розв'язків задач (4) і (6) позначимо S і S^*. При виконанні умов 1—4 маємо $S = S^*$ [11]. Крім того, множина S^* опукла та замкнена.

Далі будемо припускати, що $S \neq \varnothing$.

Адаптивні двоетапні проксимальні алгоритми. У статті [13] для задачі (4) був запропонований такий алгоритм:

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1},\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C}\left(F(y_{n-1}, y) + \dfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)\right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C}\left(F(y_n, y) + \dfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)\right), \end{cases} \tag{7}$$

де $\lambda_n > 0$ задавались виходячи з вимоги $\{\inf_n \lambda_n, \sup_n \lambda_n\} \subseteq \left(0, \frac{1}{2(2a+b)}\right)$. Тобто явно використовувалась інформація про константи умови типу ліпшицевості біфункції F.

Відштовхуючись від схеми (7) та результатів роботи [14], побудуємо двоетапний проксимальний алгоритм з адаптивним вибором величини λ_n.

Алгоритм 1.

Ініціалізація. Вибираємо x_1, $y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Покладемо $n = 1$.

К р о к 1. Обчислюємо

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1},\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C}\left(F(y_{n-1},y)+\frac{1}{2\lambda_n}d^2(y,x_n)\right).$$

К р о к 2. Обчислюємо

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C}\left(F(y_n,y)+\frac{1}{2\lambda_n}d^2(y,x_n)\right).$$

Якщо $x_{n+1} = x_n = y_n$, то зупинити та $x_n \in S$. Інакше перейти на крок 3.

К р о к 3. Обчислюємо

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо} \quad F(y_{n-1},x_{n+1})-F(y_{n-1},y_n)-F(y_n,x_{n+1}) \leqslant 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \dfrac{\tau}{2}\dfrac{d^2(y_{n-1},y_n)+d^2(x_{n+1},y_n)}{(F(y_{n-1},x_{n+1})-F(y_{n-1},y_n)-F(y_n,x_{n+1}))}\right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n+1$ та перейти на крок 1.

На кожній ітерації алгоритму 1 маємо розв'язати дві задачі мінімізації з сильно опуклими функціями. Припустимо можливість зробити це ефективно.

Параметр λ_{n+1} залежить лише від розташування точок y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, значень $F(y_{n-1}, x_{n+1})$, $F(y_{n-1}, y_n)$ та $F(y_n, x_{n+1})$. Ніяка інформація про константи a та b з нерівності (5) не використовується. Ясно, що послідовність (λ_n) неспадна. Також вона обмежена знизу числом $\min\left\{\lambda_1, \dfrac{\tau}{2\max\{a,b\}}\right\}$.

Для послідовностей (x_n), (y_n), породжених алгоритмом 1, має місце нерівність

$$F(y_n,x_{n+1})-F(y_n,y) \leqslant \frac{1}{2\lambda_n}(d^2(y,x_n)-d^2(x_n,x_{n+1})-d^2(x_{n+1},y)) \quad \forall y\in C. \tag{8}$$

Нерівність (8) дає обґрунтування правила зупинки. Дійсно, якщо $x_{n+1} = x_n = y_n$, то з (8) випливає

$$-F(y_n,y) \leqslant 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто $x_n = y_n \in S$.

Крім алгоритму 1, розглянено ще адаптивний варіант екстрапроксимального алгоритму [12].

Алгоритм 2. Адаптивний екстрапроксимальний алгоритм.

Ініціалізація. Вибираємо $x_1 \in C$, $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$. Покладемо $n = 1$.

К р о к 1. Обчислюємо

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(x_n,\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C}\left(F(x_n,y)+\frac{1}{2\lambda_n}d^2(y,x_n)\right).$$

Якщо $x_n = y_n$, то зупинити та $x_n \in S$. Інакше перейти на крок 2.

Крок 2. Обчислюємо

$$x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C}\left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)\right).$$

Крок 3. Обчислюємо

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо} \quad F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leqslant 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \dfrac{\tau}{2}\dfrac{d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)}{(F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))}\right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n+1$ та перейти на крок 1.

Для варіаційних нерівностей (2) у гільбертовому просторі алгоритм 2 набуває такого вигляду.

Алгоритм 3. Адаптивний екстраградієнтний алгоритм.

Ініціалізація. Вибираємо $x_1 \in C$, $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Покладемо $n = 1$.

Крок 1. Обчислюємо

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n).$$

Якщо $x_n = y_n$, то зупинити та x_n — розв’язок. Інакше перейти на крок 2.

Крок 2. Обчислюємо

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

Крок 3. Обчислюємо

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо} \quad (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leqslant 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \dfrac{\tau}{2}\dfrac{\|x_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2}{(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)}\right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n+1$ та перейти на крок 1.

Збіжність алгоритмів. Сформулюємо отримані для описаних алгоритмів основні результати.

Лема 1. *Для послідовностей* (x_n), (y_n), *породжених алгоритмом* 1, *має місце нерівність*

$$d^2(x_{n+1}, z) \leqslant d^2(x_n, z) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) -$$

$$-\left(1 - 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) + 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n, y_{n-1}),$$

де $z \in S$.

Теорема 1. *Нехай* (X, d) *— простір Адамара,* $C \subseteq X$ *— непорожня опукла замкнена множина, для біфункції* $F: C \times C \to \mathbb{R}$ *виконані умови* 1—5 *та* $S \neq \varnothing$. *Тоді породжені алгорит-*

мом 1 *послідовності* (x_n), (y_n) *слабко збіжні до розв'язку* $z \in S$ *задачі про рівновагу* (4), *причому* $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_{n+1}) = 0$.

Аналогічна теорема має місце і для екстрапроксимального алгоритму 2. Її доведення ґрунтується на такій оцінці.

Лема 2. *Для послідовностей* (x_n), (y_n), *породжених алгоритмом* 2, *має місце нерівність*

$$d^2(x_{n+1}, z) \leqslant d^2(x_n, z) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n),$$

де $z \in S$.

Для варіаційних нерівностей має місце такий результат.

Теорема 2. *Нехай* H *— гільбертовий простір,* $C \subseteq X$ *— непорожня опукла замкнена множина, оператор* $A: C \to H$ *псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабко неперервний та існують розв'язки* (2). *Тоді породжені алгоритмом* 3 *послідовності* (x_n), (y_n) *слабко збігаються до розв'язку варіаційної нерівності* (2), *причому*

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0.$$

Дослідження виконано за фінансової підтримки МОН України ("Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології", 0219U008403) і НАН України ("Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування", 0119U101608).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Kassay G., Radulescu V.D. Equilibrium problems and applications. London: Academic Press, 2019. 419 p.
2. Antipin A.S. Equilibrium programming: Proximal methods. *Comput. Math. Math. Phys.* 1997. **37**. P. 1285—1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044
3. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. *Equilibrium problems and variational models*: Daniele P., Giannessi F., Maugeri A. (Eds.). Dordrecht: Kluwer, 2003. P. 289—298. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1
4. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium programming in hilbert spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 2005. **6**. P. 117—136.
5. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. *Optimization and its applications in control and data sciences*: Goldengorin B. (Ed.). Cham: Springer, 2016. P. 315—325. (Springer Optimization and Its Applications, vol. 115). https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
6. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. **12**, № 4. P. 747—756.
7. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization*. 2008. **57**. P. 749—776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876
8. Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1980. **28**, Iss. 5. P. 845—848. https://doi.org/10.1007/BF01141092
9. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-euclidean proximal method for equilibrium problems. *Recent developments in data science and intelligent analysis of information*: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (Eds.). Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information (Kyiv, 4—7 June, 2018). (Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 836). Cham: Springer, 2019. P. 50—58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6

10. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *J. Math. Anal. Appl.* 2012. **388**. P. 61—77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001
11. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *J. Aust. Math. Soc.* 2019. P. 1—23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041
12. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Math. Notes*. 2019. **20**, № 1. P. 281—297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361
13. Ведель Я. И., Семёнов В. В., Чабак Л. М. Двухэтапный проксимальный алгоритм для задачи о равновесии в пространстве Адамара. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2020. № 2. С. 7—14. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.02.007
14. Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. *Cybern. Syst. Anal.* 2019. **55**, Iss. 3. P. 377—383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5
15. Bacak M. Convex analysis and optimization in hadamard spaces. Berlin, Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.

Надійшло до редакції 22.06.2020

REFERENCES

1. Kassay, G. & Radulescu, V. D. (2019). Equilibrium problems and applications. London: Academic Press.
2. Antipin, A. S. (1997). Equilibrium programming: Proximal methods. Comput. Math. Math. Phys., 37, pp. 1285-1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044
3. Mastroeni, G. (2003). On auxiliary principle for equilibrium problems. In Daniele, P., Giannessi, F. & Maugeri, A. (Eds.). Equilibrium problems and variational models (pp. 289-298). Dordrecht: Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1
4. Combettes, P. L. & Hirstoaga, S. A. (2005). Equilibrium programming in Hilbert spaces. J. Nonlinear Convex Anal., 6, pp. 117-136.
5. Lyashko, S. I. & Semenov, V. V. (2016). A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In Goldengorin, B. (Ed.). Optimization and its applications in control and data sciences (pp. 315-325). Springer optimization and its applications (vol. 115). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
6. Korpelevich, G. M. (1976). An extragradient method for finding saddle points and for other problems. Matecon, 12, No. 4, pp. 747-756.
7. Quoc, T. D., Muu, L. D. & Hien, N. V. (2008). Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Optimization, 57, pp. 749-776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876
8. Popov, L. D. (1980). A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR, 28, Iss. 5, pp. 845-848. https://doi.org/10.1007/BF01141092
9. Chabak, L., Semenov, V. & Vedel, Y. (2019). A new non-euclidean proximal method for equilibrium problems. In Chertov, O., Mylovanov, T., Kondratenko, Y., Kacprzyk, J., Kreinovich, V. & Stefanuk, V. (Eds.). Recent developments in data science and intelligent analysis of information. Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information (pp. 50-58). Advances in Intelligent Systems and Computing (vol. 836). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6
10. Colao, V., Lopez, G., Marino, G. & Martin-Marquez, V. (2012). Equilibrium problems in Hadamard manifolds. J. Math. Anal. Appl., 388, pp. 61-77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001
11. Khatibzadeh, H. & Mohebbi, V. (2019). Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. J. Aust. Math. Soc., pp. 1-23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041
12. Khatibzadeh, H. & Mohebbi, V. (2019). Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. Miskolc Math. Notes, 20, No. 1, pp. 281-297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361
13. Vedel, Ya. I., Semenov, V. V. & Chabak, L. M. (2020). A two-stage proximal algorithm for equilibrium problems in Hadamard spaces. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 2, pp. 7-14. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.02.007
14. Denisov, S. V., Semenov, V. V. & Stetsyuk, P. I. (2019). Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. Cybern. Syst. Anal., 55, Iss. 3, pp. 377-383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5
15. Bacak, M. (2014). Convex analysis and optimization in Hadamard spaces. Berlin, Boston: De Gruyter.

Received 22.06.2020

Ya.I. Vedel, V.V. Semenov

Taras Shevchenko National University of Kyiv
E-mail: yana.vedel@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com

ADAPTIVE ALGORITHMS FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN HADAMARD SPACES

One of the most popular areas of modern applied nonlinear analysis is the study of equilibrium problems (Ky Fan inequalities, equilibrium programming problems). In the form of an equilibrium problem, one can formulate mathematical programming problems, vector optimization problems, variational inequalities, and many game theory problems. The classical formulation of the equilibrium problem first appeared in the works by H. Nikaido and K. Isoda, and the first general proximal algorithms for solving the equilibrium problems were proposed by A.S. Antipin. Recently, the interest has arisen in the problems of mathematical biology and machine learning to construct the theory and algorithms for solving mathematical programming problems in Hadamard metric spaces. Another strong motivation for studying these problems is the ability to write down some non-convex problems in the form of convex ones in a space with specially selected metric. In this paper, we consider general equilibrium problems in Hadamard metric spaces. For an approximate solution of problems, new iterative adaptive two-stage proximal algorithms are proposed and studied. At each step of the algorithms, the sequential minimization of two special strongly convex functions should be done. In contrast to the previously used rules for choosing the step size, the proposed algorithms do not calculate bifunction values at additional points and do not require knowledge of the information on of bifunction's Lipschitz constants. For pseudo-monotone bifunctions of the Lipschitz type, weakly upper semicontinuous in the first variable, convex and lower semicontinuous in the second variable, the theorems on weak convergence of sequences generated by the algorithms are proved. The proof is based on the use of the Fejer property of the algorithms with respect to the set of solutions of equilibrium problem. It is shown that the proposed algorithms are applicable to variational inequalities with Lipschitz-continuous, sequentially weakly continuous and pseudomonotone operators acting in Hilbert spaces.

Keywords: *Hadamard space, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, two-stage proximal algorithms, adaptivity, convergence.*