

АНИЗОТРОПНО-ПУЧКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛАЗЕРНОЙ ПЛАЗМЫ

*В.Б. Красовицкий, В.А. Туриков**

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия;

**Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

E-mail: vturikov@yandex.ru

При распространении мощного лазерного импульса вдоль внешнего магнитного поля в плазме возбуждается широкий спектр вистлерных мод с частотами ниже электронной циклотронной частоты, что приводит к появлению надтепловых электронов и установлению плато на первоначально максвелловской функции распределения. В результате развивается анизотропно-пучковая неустойчивость и происходит трансформация энергии быстрых электронов в энергию электростатических колебаний плазмы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование, проведенное в работе [1], показало, что мощный лазерный импульс, распространяющийся вдоль внешнего магнитного поля в плазме, возбуждает пакет вистлерных волн в широком диапазоне частот ниже электронной циклотронной частоты. Взаимодействия типа волна-частица, подобно случаю пакета ленгмюровских волн, формируют плато на электронной функции распределения вдоль линий квазилинейной диффузии. Функция распределения при этом приобретает анизотропно-пучковую структуру, приводящую к возбуждению неустойчивых электростатических колебаний [2].

В настоящей работе исследована анизотропно-пучковая неустойчивость плазмы, нагретой мощным лазерным импульсом.

2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГОРЯЧИХ ЭЛЕКТРОНОВ

После установления квазилинейного плато по продольным скоростям $v_1 \leq v_z \leq v_2$ функция распределения быстрых электронов может быть представлена в виде [1]

$$f_{\infty}(v_z, v_{\perp}) = C(w)\theta(v_z), \quad (1)$$

где

$$\theta(v_z) = \begin{cases} 1, & v_1 \leq v_z \leq v_2 \\ 0, & v_z < v_1, v_z > v_2 \end{cases},$$

v_1 и v_2 – границы плато на первоначально максвелловской функции

$$f_M(v_{\perp}, v_z) = \frac{n_0}{(\pi v_{th}^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2 + v_z^2}{v_{th}^2}\right), \quad (2)$$

$v_{th}^2 = 2T/m$; T и n_0 – температура и плотность электронов плазмы.

Траектория ускоренных электронов в пространстве скоростей определяется интегралом [1]:

$$w = V_{\perp}^2 + G^2 \left[\left(-\frac{V_z}{2} + \sqrt{\frac{V_z^2}{4} - \frac{1}{2}} \right)^{4/3} + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{V_z}{2} + \sqrt{\frac{V_z^2}{4} - \frac{1}{2}} \right)^{-2/3} \right], \quad (3)$$

где введены безразмерные переменные

$$V_z = \frac{v_z}{v_{th}}, \quad V_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{v_{th}}, \quad G^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{v_{ae}}{v_{th}} \right)^{2/3}, \quad (4)$$

$\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$ и $\omega_B = eB_0 / mc$ – ленгмюровская и циклотронная частоты; m и B_0 – масса электрона и продольное магнитное поле; $v_{ae} = c\omega_B / \omega_p$ – альфвеновская скорость электронов.

Постоянная $C(w)$ в формуле (1) определяется из условия сохранения числа частиц на плато (вдоль линий $w = const$):

$$C(w) = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} f_M(v_{\perp}, v_z) dv_z. \quad (5)$$

Исключая поперечную скорость в правой части (5) с помощью (3), представим эту формулу в виде

$$C(w) = \frac{n_0}{(\pi v_{th}^2)^{3/2}} \exp(-w) I,$$

$$I = \frac{1}{V_2 - V_1} \int_{V_1}^{V_2} \exp\left\{ -V_z^2 + G^2 \left[\left(-\frac{V_z}{2} + \sqrt{\frac{V_z^2}{4} - \frac{1}{2}} \right)^{4/3} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(-\frac{V_z}{2} + \sqrt{\frac{V_z^2}{4} - \frac{1}{2}} \right)^{-2/3} \right] \right\} dV_z. \quad (6)$$

Верхняя граница плато по определению равна $V_2 = -\sqrt{2}$, а нижняя – V_1 , определяется формулой (3) при $V_{\perp} = 0$.

3. АСИМПТОТИКА ВБЛИЗИ $V_2 = -\sqrt{2}$

Будем считать $G^2 \gg 1$ и разложим правую часть формулы (3) в ряд вблизи верхней границы плато $V_2 = -\sqrt{2}$. Удерживая первые члены разложения, находим

$$w = w_{\min} + V_{\perp}^2 - a(V_z + \sqrt{2}),$$

$$w_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}} G^2, \quad a = \frac{2^{11/6}}{3} G^2, \quad (7)$$

где w_{\min} соответствует точке $V_{\perp} = 0$ и $V_z = -\sqrt{2}$. В этом приближении формула (6) упрощается к виду:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2} + V_1} \int_{V_1}^{-\sqrt{2}} \exp[w_{\min} - 2 - a(V_z + \sqrt{2})] dV_z. \quad (8)$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$I = \exp(w_{\min} - 2)(ab)^{-1} [1 - \exp(-ab)], \quad (9)$$

где $b = V_1 + \sqrt{2}$, а нижняя граница плато определяется формулой (7) при $V_{\perp} = 0$.

Из формул (1), (6) и (9) находим функцию распределения вблизи верхней границы плато:

$$f_{\infty}(V_{\perp}, V_z) = \frac{n_0 e^{-2}}{(\pi v_{th}^2)^{3/2}} \frac{1}{\Delta w} [1 - \exp(-\Delta w)] \theta(V_z), \quad (10)$$

где $\Delta w = w - w_{\min}$, а зависимость $w(V_{\perp}, V_z)$ задается выражением (3).

4. АСИМПТОТИКА ПРИ $|V_z| \gg \sqrt{2}$

Для оценки функции распределения в области больших скоростей $V_z^2 \gg 2$ воспользуемся асимптотикой интеграла (6):

$$I = \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \exp[g(u)] du, \quad g(u) = -u^2 + G^2 u^{4/3}, \quad (11)$$

где нижняя граница плато приближенно равна

$$u_1 = -V_1 \approx (w/G^2)^{3/4}. \quad (12)$$

Разлагая функцию $g(u)$ в ряд в точке максимума

$$g(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{2G^2}{3} \right)^3 - \frac{2}{3} (u - u_m)^2, \quad (13)$$

$$u_m = \left(\frac{2G^2}{3} \right)^{3/2},$$

представим формулу (6) в виде

$$C(w) \approx \frac{1}{u_1} \exp[g(u_m) - w] \int_{u_m - u_1}^{u_m} \exp(-2t^2/3) dt. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда верхний предел в интеграле (11) совпадает с точкой максимума в подинтегральной функции $u_1 = u_m \gg 1$ и

$$\int_0^{u_m} \exp(-2t^2/3) dt \approx \sqrt{3\pi/8}.$$

Определяя из этого условия $w_m = (2G^3/3)^2$ и полагая в (14) $w \approx w_m$, получаем следующую асимптотическую оценку:

$$C(w) \approx \left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{1}{G^3} \exp \left[- \left(\frac{2G^2}{3} \right)^3 \right], \quad w \gg 1. \quad (15)$$

Учитывая (4), можно представить (15) в виде

$$C(w) \approx \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{v_{th}}{v_{ae}} \exp \left(- \frac{v_{ae}^2}{v_{th}^2} \right), \quad \frac{v_{ae}}{v_{th}} \gg 1. \quad (16)$$

5. ДИСПЕРСИЯ ГОРЯЧИХ ЭЛЕКТРОНОВ

В электростатическом приближении вклад горячих электронов в диэлектрическую проницаемость плазмы равен [2]

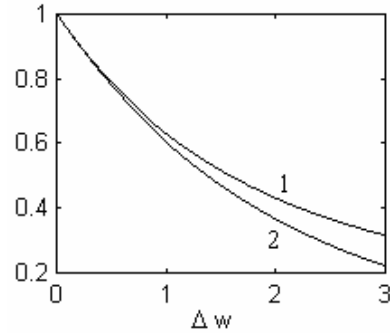
$$\varepsilon^{(1)} = \frac{8\pi^2 e^2}{mk^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{J_n^2(\xi)}{\Delta\omega_n - k_z v_z} \left(\frac{n\omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\infty}}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial f_{\infty}}{\partial v_z} \right) \right\rangle. \quad (17)$$

Здесь $\langle \dots \rangle = \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z (\dots)$, $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B$,

$\Delta\omega_n = \omega - n\omega_B$, а функция распределения f_{∞} определяется формулой (10):

$$f_{\infty}(v_{\perp}, v_z) = \frac{n_0 e^{-2}}{(\pi v_{th}^2)^{3/2}} \frac{2}{\Delta w} \operatorname{sh} \frac{\Delta w}{2} \exp \left(- \frac{\Delta w}{2} \right) \theta(v_z). \quad (18)$$

В области применимости распределения (18) $\Delta w \leq 1$ нормированная функция близка к единице, а при $\Delta w \gg 1$ – экспоненциально мала. Поэтому с достаточной точностью (Рисунок) можно положить $\operatorname{sh}(\Delta w/2) \approx \Delta w/2$ и $f_{\infty} \sim \exp(-\Delta w/2)$.



Сравнение функций распределения вблизи верхней границы плато с аппроксимирующей функцией:

- 1 – нормированная функция распределения;
- 2 – аппроксимирующая функция $\exp(-\Delta w/2)$

Учитывая формулу (7), используем для аналитических расчетов следующее аппроксимирующее выражение:

$$f_{\infty}(v_{\perp}, v_z) = \frac{n_0 e^{-2}}{(\pi v_{th}^2)^{3/2}} \times \exp \left[- \frac{v_{\perp}^2}{2v_{th}^2} + \frac{a}{2} \left(\frac{v_z}{v_{th}} + \sqrt{2} \right) \right] \theta(v_z), \quad (19)$$

где

$$\theta = \begin{cases} 1, & -\infty \leq v_z \leq -\sqrt{2} \\ 0, & v_z > -\sqrt{2} \end{cases}, \quad (20)$$

Распределение электронов плато по поперечным скоростям является максвелловским с температурой $T'_{\perp} = 2T$, где T и $v_{th} = \sqrt{2T/m}$ – температура и тепловая скорость фоновой плазмы. Моменты функции распределения равны:

$$n'_0 = \frac{2e^{-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{a} n_0 = \langle n v_z \rangle - n'_0 v_{th} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{a} \right),$$

$$\langle n(v_z - v_0)^2 \rangle = n'_0 v_{th}^2 \left(\frac{2}{a} \right)^3, \quad v_0 = \frac{\langle n v_z \rangle}{n'_0}. \quad (21)$$

Здесь n'_0 и v_0 – плотность и направленная скорость горячих электронов. Малым параметром задачи является величина $2/a \approx (v_{th}/v_{ae})^{2/3} \ll 1$.

Выделим особенность производной в интеграле (17) с помощью равенства

$$\frac{d}{dv_z} [e^{\alpha v_z} \theta(v_z)] = \theta(v_z) \frac{d}{dv_z} e^{\alpha v_z} - e^{\alpha v_z} \delta(v_z + \sqrt{2}v_{th}), \quad \alpha = \frac{a}{2v_{th}},$$

а затем выполним интегрирование по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_z}{\Delta\omega_n - k_z v_z} \frac{d}{dv_z} [e^{\alpha v_z} \theta(v_z)] = -k_z \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}v_{th}} e^{\alpha v_z} \frac{dv_z}{(\Delta\omega_n - k_z v_z)^2}. \quad (22)$$

Интеграл по поперечным скоростям вычисляется с помощью формулы

$$\int_0^{\infty} J_n^2(\xi) \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{th}^2}\right) v_{\perp} dv_{\perp} = v_{th}^2 \exp(-z) I_n(z), \quad (23)$$

где $z = (k_{\perp} v_{th}/\omega_B)^2$, $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя.

Используя выражения (22) и (23), представим скалярную диэлектрическую проницаемость горячих электронов (17) в виде

$$\varepsilon^{(1)} = -\omega_p'^2 e^{-z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z) \frac{a}{2} \int_0^{\infty} du \exp\left(-\frac{au}{2}\right) \times \left\{ \frac{n(k_{\perp}/k)^2}{z\omega_B[\Delta\omega_n + k_z v_{th}(\sqrt{2} + u)]} + \frac{(k_z/k)^2}{[\Delta\omega_n + k_z v_{th}(\sqrt{2} + u)]^2} \right\}, \quad (24)$$

где $\omega_p' = \sqrt{4\pi e^2/m}$ – эффективная ленгмюровская частота горячих электронов.

Формула (24) качественно аналогична формуле, приведенной в монографии [2] для сильно анизотропного распределения быстрых частиц с поперечной температурой, намного превышающей продольную. Однако в нашем случае направленная продольная скорость электронов $v_0 = -\sqrt{2}v_{th}$ является конечной.

6. ПУЧКОВО-АНИЗОТРОПНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Дисперсионное уравнение для электростатических колебаний в плазме с анизотропией температуры имеет вид:

$$\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} = 0, \quad (25)$$

где диэлектрическая проницаемость холодной плазмы

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_B^2)}, \quad (26)$$

а вклад горячих электронов определяется формулой (24). В предельном случае замагниченной плазмы $\omega_B^2 \gg \omega_p^2$ имеем:

$$\omega_-^2 = \omega_p^2 \frac{k_z^2}{k^2}, \quad \omega_+^2 = \omega_B^2 + \omega_p^2 \frac{k_{\perp}^2}{k^2}.$$

Формула (24) упрощается для больших инкрементов $\text{Im}\omega \gg 2^{3/2} k_z v_{th}/a$, когда резонансный множитель может быть вынесен за знак интеграла:

$$\varepsilon^{(1)} = -\omega_p'^2 e^{-z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z) \frac{1}{k^2} \left(\frac{nk_{\perp}^2}{z\omega_B \delta} + \frac{k_z^2}{\delta^2} \right). \quad (27)$$

Пучковая ветвь $\delta = \omega - n\omega_B + \sqrt{2}k_z v_{th}$ пересекается с плазменной при $n=1$, когда обе собственные частоты близки к гирочастоте электронов ω_B . Полагая $I_1(z) \cong z/2$, представим (27) в виде

$$\varepsilon^{(1)} = -\frac{\omega_p'^2 k_{\perp}^2}{2\omega_B^2 k^2} \left(\frac{\omega_B}{\delta} + \frac{k_z^2 v_{th}^2}{\delta^2} \right). \quad (28)$$

Подставляя (26) и (28) в (25), получаем следующее уравнение для малой добавки к частоте:

$$2 \frac{\delta}{\omega_B} - \Delta = \frac{n'_0}{2n_0} \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \frac{k_{\perp}}{k} \right)^4 \left(\frac{\omega_B}{\delta} + \frac{k_z^2 v_{th}^2}{\delta^2} \right), \quad (29)$$

где

$$\Delta = 2^{3/2} \frac{k_z v_{th}}{\omega_B} + \frac{\omega_p^2 k_{\perp}^2}{\omega_B^2 k^2}. \quad (30)$$

Комплексные корни уравнения (27) существуют при $k_{\perp} > 0$ и $k_z^2 > 0$. Максимальный инкремент определяется из условия $\Delta = 0$:

$$k_{\perp}^2 = \frac{k_z^2}{k_m + k_z}, \quad k_m = \frac{\omega_p^2}{2^{3/2} v_{th} \omega_B}, \quad (31)$$

которое реализуется при $k_z < 0$ и определяет направление распространения волны относительно магнитного поля.

С учетом (31) формула (29) упрощается к виду:

$$y^3 = aq(y + q),$$

$$y = \frac{\delta}{\omega_B}, \quad q = \frac{k_{\perp}^2 v_{th}^2}{\omega_B^2}, \quad \alpha = \frac{4e^{-2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v_{th}}{v_{ae}} \right)^{2/3}. \quad (32)$$

Полагая $k_z \approx k_m$ и $y \ll q$, получаем следующую оценку для инкремента пучково-анизотропной неустойчивости плазмы, нагретой лазерным импульсом:

$$\text{Im} y = \frac{\sqrt{3}}{2} (\alpha q^2)^{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{8} \alpha^{1/3} \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{8/3}. \quad (33)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в квазилинейном приближении построена функция распределения горячих электронов плазмы во внешнем магнитном поле, ускоренных пакетом вистлерных волн. Вистлерные моды возбуждаются при этом мощным лазерным импульсом, распространяющимся вдоль магнитного поля. Найденное распределение имеет анизотропно-

пучковую структуру, что приводит к развитию неустойчивости, в результате которой энергия горячих электронов переходит в энергию электростатических колебаний плазмы. Найдена зависимость инкремента неустойчивости от параметров плазмы.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», а также частично поддержана грантом РФФИ № 10-02-01302.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.I. Sotnikov, Y. Sentoku, V.B. Krasovitskiy. Electron cyclotron heating by whistler waves generated during the interaction of a laser pulse with a magnetized plasma // *Phys. Plasmas*. 2005, v.12, p.082107.
2. А.Б. Михайловский. *Теория плазменных неустойчивостей*. М.: «Атомиздат», 1975, т.1, 272 с.

Статья поступила в редакцию 19.05.2010 г.

ANISOTROPIC-BEAM INSTABILITY OF LASER PLASMA

V.B. Krasovitskiy, V.A. Turikov

In the propagation of intense laser pulse along the external magnetic field in a plasma excited a wide range of whistler modes with frequencies below the electron cyclotron frequency, which leads to the suprathermal electrons and the establishment of a plateau on the original Maxwellian distribution functions. As a result, develops anisotropically-stream instability and a transformation of fast electron energy in the energy of electrostatic plasma oscillations.

АНІЗОТРОПНО-ПУЧКОВА НЕСТІЙКІСТЬ ЛАЗЕРНОЇ ПЛАЗМИ

В.Б. Красовицький, В.А. Туріков

При розповсюдженні потужного лазерного імпульсу вздовж зовнішнього магнітного поля в плазмі збуджується широкий спектр вістлерних мод з частотами нижче електронної циклотронної частоти, що призводить до появи надтеплових електронів і встановленню плато на первісно максвеллівській функції розподілу. У результаті розвивається анізотропно-пучкова нестійкість і відбувається трансформація енергії швидких електронів в енергію електростатичних коливань плазми.