УДК 539.3

© 2009

Т. В. Карнаухова

Влияние механических граничных условий на активное демпфирование вынужденных изгибных резонансных колебаний изотропных вязкоупругих прямоугольных пластин

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

На основі запропонованого автором нового підходу досліджено вплив механічних граничних умов на ефективність активного демпфування вимушених резонансних коливань в'язкопружних ізотропних пластин. Розглянуто випадки шарнірного та жорсткого закріплення торців пластини, а також випадок змішаних граничних умов. Задачі розв'язуються методом Бубнова–Гальоркіна. Одержано формули для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для демпфування першої моди коливань. Показано, що механічні граничні умови, дисипативні властивості матеріалів та розміри сенсорів і актуаторів істотно впливають на ефективність активного демпфування коливань пластини.

В работе [1] предложен новый подход к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний прямоугольных пластин при совместном использовании сенсоров и актуаторов в случае, когда внешняя механическая нагрузка неизвестна. В [2] при помощи этого подхода рассмотрена задача об активном демпфировании прямоугольной пластины с жестким защемлением торцов.

В данной работе рассматривается задача об активном демпфировании изгибных колебаний прямоугольной пластины для случая смешанных граничных условий, когда одни противоположные торцы шарнирно оперты, а другие — жестко защемлены. Показано, что, в отличие от рассмотренных в [1, 2] типов граничных условий, при смешанных граничных условиях наиболее эффективным является выбор пьезовключений в виде полосы, параллельной жестко защемленным торцам. Получены формулы для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актутору для компенсации механической нагрузки по известным показателям сенсора, а также для расчета размеров сенсора и актуатора.

Постановка задачи об активном демпфировании прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями аналогична представленной в работах [1, 2]. Отличаются лишь граничные условия на ее торцах. Для описания механического поведения материалов используется концепция комплексных характеристик [3].

Задача сводится к решению уравнения изгибных колебаний [1, 2]

$$D\Delta\Delta w - \widetilde{\rho}\omega^2 w - p_0(x,y) - \Delta M_0 = 0 \tag{1}$$

при следующих смешанных граничных условиях:

$$w = M_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0;\ a; \qquad w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b.$$

Предполагается, что на пластину действует равномерно распределенная по ее поверхности механическая нагрузка, изменяющаяся во времени по гармоническому закону. Механическая нагрузка считается неизвестной. Решение задачи ищется методом Бубнова–Галеркина. Выражение для первой моды колебаний выбирается в виде

$$w = A\widetilde{w}, \qquad \widetilde{w} = (\sin k_1 x)(b^2 - y^2)^2. \tag{2}$$

При этом автоматически удовлетворяются механические граничные условия.

Будем считать, что для демпфирования резонансных колебаний на пластину нанесено пятно размером $(c \times 2d)$ с центром, расположенным в центре пластины. В соответствии с методом Бубнова–Галеркина, выражение (2) подставим в уравнение (1), а полученный результат после умножения на функцию формы $\widetilde{w}$ проинтегрируем по площади пластины. При этом используем соотношение

$$\iint\limits_{(S)} f\Delta g ds = \iint\limits_{(S)} g\Delta f ds.$$

В результате получим следующее выражение для комплексной амплитуды колебаний пластины:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}. \tag{3}$$

Здесь для неизвестной постоянной нагрузки имеем

$$\begin{gathered}\Delta_1 = -\frac{p_0}{ak_1} + \frac{M_0 \sin\dfrac{k_1 c}{2}}{ak_1}\left[\frac{\pi^2}{a^2}s(15 - 10s^2 + 3s^4) - 60s\left(\frac{1}{b^2}\right)(1 - s^2)\right],\\ \Delta_2 = 2\left[3D_{22} - \frac{2}{7}(2D_{12} + D_{66})b^2k_1^2 + \frac{2}{21}b^4(D_{11}k_1^4 - \widetilde{\rho}\omega^2)\right].\end{gathered} \tag{4}$$

Полагая $\Delta_1 = 0$, получим выражение для той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации внешней нагрузки:

$$V_A = \frac{2p_0 b^2}{(h_0 + h_1)\gamma_{31}\sin(k_1 c/2)\psi(s)}, \tag{5}$$

где

$$\psi(s) = \left[\frac{\pi^2 b^2}{a^2}s(15 - 10s^2 + 3s^4) + 60s(1 - s^2)\right], \tag{6}$$

а $s = d/b$.

При выполнении соотношений (5), (6) амплитуда вынужденных колебаний по основной моде равна нулю и пластина может совершать только свободные колебания. Необходимо иметь в виду, что величина нагрузки p_0 является неизвестной. Для ее определения необходимо использовать показания сенсора.

Как следует из (5), (6), механические граничные условия оказывают существенное влияние на эффективность активного демпфирования колебаний при помощи предлагаемого подхода. Так, например, при шарнирном закреплении торцов пластины наиболее эффективным является полное покрытие сенсоров и актуаторов [1]. При жестком защемлении торцов сенсоры и актуаторы необходимо выбирать в виде пятен [2]. Согласно (5), (6), при смешанных граничных условиях активное демпфирование будет наиболее эффективным при $c = a$ и при одновременном достижении функцией $\psi(s)$ максимума. Это имеет место при $s_{\max}$, являющемся корнем уравнения

$$s^4 - 2\left(1 + \frac{6a^2}{b^2\pi^2}\right)s^2 + \left(1 + \frac{4a^2}{b^2\pi^2}\right) = 0. \tag{7}$$

Отсюда следует, что указанный выше метод активного демпфирования будет наиболее эффективным при $d = bs_{\max}$. Из (5), (6) следует также, что при $s \to 0$ и при $s \to s_k$, где s_k — корень уравнения

$$\frac{\pi^2 b^2}{a^2}(15 - 10s^2 + 3s^4) + 60(1 - s^2) = 0, \tag{8}$$

разность потенциалов стремится к бесконечности. Таким образом, при покрытии пластины актуатором размером $d = b$ и при очень малых размерах актуатора управлять поведением пластины невозможно.

Пусть размещение и размеры актуатора и сенсора зафиксированы. Основные недостатки подхода, основанного на формулах (5), (6), состоят в том, что 1) свободные колебания не демпфируются и 2) необходимо знать внешнюю механическую нагрузку.

Для устранения второго недостатка используем подход, предложенный в [1]. Внешняя нагрузка определяется по показаниям сенсора, занимающего площадь S_1. Для короткозамкнутых электродов величина заряда определяется выражением

$$Q = -\gamma_{31}(h_0 + h_1)\iint\limits_{(S_1)}(\kappa_1 + \kappa_2)\,dxdy. \tag{9}$$

Для разомкнутых электродов разность потенциалов определяется по формуле

$$V_S = \frac{h_1 Q}{S_1 \gamma_{33}}. \tag{10}$$

Подставляя в (9) соотношение (2), получим следующее выражение для показаний сенсора через амплитуду колебаний:

$$Q = -\frac{2}{15}\gamma_{31}(h_0 + h_1)Ab^3\psi(s), \tag{11}$$

откуда видно, что размеры сенсора, при которых его работа наиболее эффективна, определяются по представленным выше формулам для актуатора.

Для определения нагрузки p_0 воспользуемся выражением для амплитуды колебаний пластины на частоте, близкой к основной резонансной частоте.

Использование метода Бубнова–Галеркина дает следующее решение задачи о резонансных механических колебаниях изотропной пластины со смешанными граничными условиями на торцах при колебаниях по основной (первой) моде:

$$A = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}. \tag{12}$$

Здесь

$$\Pi_1 = \frac{p_0}{6\pi b^5}, \tag{13}$$

$$\Pi_2 = D_{22} - \frac{2}{21}(D_{12} + 2D_{66})k_1^2 b^2 + \frac{2}{63} b^4 (D_{11} k_1^4 - \widetilde{\rho}\omega^2). \tag{14}$$

При этом первую резонансную частоту запишем так:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\rho}}} \sqrt{\frac{63}{2} D'_{22} - 3(2D'_{12} + D'_{66}) b^2 k_1^2 + D'_{11}) b^4 k_1^4}. \tag{15}$$

Из (11), (12) получим связь между показаниями сенсора и разностью потенциалов, которую необходимо приложить к актуатору для компенсации неизвестной внешней нагрузки:

$$V_A = -\frac{15}{2} \frac{6\pi b^4 \Pi_2 Q}{(h_0 + h_1)^2 \gamma_{31}^2 \psi^2(s)}. \tag{16}$$

Аналогичное соотношение получим и при снятии с сенсора разности потенциалов. Для этого необходимо использовать соотношение (10).

Таким образом, в настоящей работе на основе предложенного автором нового подхода рассмотрена задача об активном демпфировании изгибных колебаний прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями на ее торцах в случае, когда внешняя механическая нагрузка неизвестна. Она определяется по показаниям сенсора. Получены формулы для расчета разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки с использованием экспериментальных показаний сенсора. Сравнение с результатами, полученными в работах [1, 2], показывает, что механические граничные условия оказывают существенное влияние на размеры пьезоэлектрических граничных условий, обеспечивающие наибольшую эффективность активного демпфирования прямоугольных пластин. Так, при шарнирном закреплении торцов пластины активное демпфирование изгибных колебаний пластины наиболее эффективно при полном покрытии пластины сенсором и актуатором. При жестком защемлении торцов наиболее эффективным является нанесение сенсора и актуатора в виде пятен. При смешанных граничных условиях работа сенсора и актуатора будет наиболее эффективной, если их выбрать в виде полосы, параллельной жестко защемленным торцам. Как и в [1, 2], вязкость пассивного материала оказывает существенное влияние на эффективность активного демпфирования колебаний при помощи предлагаемого подхода.

1. *Карнаухова Т. В.* О новом подходе к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропных вязкоупругих пластин // Доп. НАН України. – 2009. – №. 5. – С. 78–82.
2. *Карнаухова Т. В.* Активное демпфирование вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины с жестким защемлением торцов // Там само. – 2009. – № 6. – С. 68–72.
3. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428 с.

НТУ Украины “Киевский политехнический институт”
Поступило в редакцию 18.07.2008

T. V. Karnaukhova

An influence of mechanical boundary conditions on the active damping of forced bending resonant vibrations of viscoelastic isotropic rectangular plate

By a new approach, an influence of mechanical boundary conditions on the effectiveness of active damping bending vibrations of a viscoelastic isotropic rectangular plate is investigated. Simply supported edges, built-in edges, and mixed boundary conditions are considered. The problems are solved by the Bubnov–Galerkin method. The formulas for a potential difference to compensate the forced vibrations of the plate on a first mode are obtained. It is shown that the influence of boundary mechanical conditions, dissipative properties, and dimensions of sensors and actuators on the effectiveness of active damping vibrations of the plate is considerable.