УДК 517.983

Н. И. Березовский, С. С. Линчук, кандидаты физ.-мат. наук (Черновиц. ун-т)

О КОММУТАНТЕ ОПЕРАТОРА УМНОЖЕНИЯ И УСЛОВИЯХ ОБРАЩЕНИЯ ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ

Получено описание изоморфизмов, действующих в пространстве суммируемых с квадратом функций и перестановочных с умножением на непрерывную кусочно-монотонную функцию, с предварительными исправлениями некоторых ошибочных утверждений работы [3].

Одержано опис ізоморфізмів, що діють у просторі сумовних з квадратом функцій та комутують з множенням на неперервну кусково-монотонну функцію, з попередніми виправленнями деяких помилкових тверджень роботи [3].

I. Пусть q — вещественнозначная функция на отрезке $[a, b]$. Известно (см., например, [1]), что формулой $(Qf)(x) = q(x)f(x)$ в гильбертовом пространстве $H = L_2(a, b)$ определяется линейный ограниченный оператор (мультипликатор пространства H) тогда и только тогда, когда функция q измерима и существенно ограничена на $[a, b]$. Во многих исследованиях (в частности, в квантовой механике) полезно иметь полное описание линейных ограниченных операторов пространства H, которые перестановочны с оператором Q. Класс таких операторов образует, как известно [2], алгебру, называемую коммутантом оператора Q. Структура этого класса и сложность его описания зависят от свойств функции q. В простейшем случае функция q непрерывна и строго монотонна. Тогда перестановочные с Q операторы — это операторы умножения на некоторые функции и только они. Этот факт легко доказывается для $q(x) = x$. Общий случай сводится к нему с помощью изоморфного перехода $T: L_2(a, b) \to L_2(a_1, b_1)$, определяемого по закону $(Tf)(x) = (f \circ q^{-1})(x)$, $x \in [a_1, b_1] = q([a, b])$.

В работе [3] дано описание коммутанта оператора Q в том случае, когда непрерывная функция q хотя и не является монотонной, но на $[a, b]$ кусочно-монотонна. Ниже это описание используется для изучения условий обратимости элементов этого коммутанта, но так как в работе [3] обнаружены некоторые ошибочные утверждения, то сначала обсуждаются результаты работы [3] и уточняются их формулировки и доказательства. С этой целью напомним основные термины и обозначения.

II. Непрерывная функция q называется кусочно строго монотонной на $[a, b]$, если существует такое конечное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, что на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция q строго монотонна. Пусть при этом $y_0 < y_1 < \ldots < y_k$, $k \le n$, — упорядоченные по возрастанию числа минимаксов $q(x_0), q(x_1), \ldots, q(x_n)$. Проведем в плоскости xOy горизонтальные прямые $y = y_j$, $j = \overline{0, k}$. В каждой j-й горизонтальной полосе $y_{j-1} < y < y_j$, $j = \overline{1, k}$, будет расположено конечное количество (обозначим его через n_j) строго „монотонных" открытых дуг графика функции $y = q(x)$. Их проекциями на ось Oy является один и тот же интервал (y_{j-1}, y_j), а проекциями на ось Ox служат n_j попарно непересекающихся интервалов $I_1^j, I_2^j, \ldots, I_{n_j}^j$, объединение которых обозначим через D_j, $j = \overline{1, k}$, а объединение всех D_j — через D. Открытое множество D отличается от отрезка $[a, b]$ лишь конечным количеством точек, множеством концов системы интервалов $\{I_m^j : j = \overline{1, k}, m = \overline{1, n_j}\}$.

Определим теперь отображение $p: D \to D_j$ по правилу: для любого $x \in I_m^j$ величина px принадлежит $I^j_{(m+1)(\mathrm{mod}\, n_j)}$ и такова, что $q(px) = q(x)$, т. е. любая точка x, принадлежащая интервалу I_m^j, переходит в точку $\bar{x} = px$ в следующем интервале множества D_j, номер которого увеличивается на единицу по модулю n_j. При этом очевидно, что

$$p^{n_j}x = x,\ x \in D_j,\ j = \overline{1, k}. \tag{1}$$

Полагая N равным наименьшему общему кратному чисел $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, видим, что $p^N x = x$ для всех x из D или почти везде на $[a, b]$, т. е. $p^N = e$, где e — тождественное преобразование. Таким образом, система

$$\{e, p, p^2, \ldots, p^{N-1}\} \tag{2}$$

образует циклическую группу преобразований отрезка $[a, b]$ на себя. Преобразование p порождает в $L_2(a, b)$ оператор P, действующий по формуле

$$(Pf)(x) = f(px),\ f \in L_2(a, b). \tag{3}$$

Семейство

$$\{E, P, P^2, \ldots, P^{N-1}\} \tag{4}$$

образует циклическую группу операторов в $L_2(a, b)$, где E — единичный оператор и $P^N = E$.

Замечания. **1.** Так как p отображает взаимно однозначно и даже непрерывно D_j на себя, то в силу свойства 1 сужение системы (2) на D_j образует циклическую группу преобразований D_j на себя порядка n_j.

2. Пространство $H = L_2(a, b) = L_2(D)$ является прямой суммой подпространств $H_j = L_2(D_j), j = \overline{1, k}$.

3. Оператор P определен в каждом $H_j, j = \overline{1, k}$, и отображает его в себя.

4. Оператор P — прямая сумма операторов P_j -сужений P на H_j, т. е. прямая сумма операторов, порожденных сужениями $P_j = P \mid_{D_j}$ по аналогии с (3).

5. Система (4) в $H_j = L_2(D_j)$ — это циклическая группа операторов в H_j порядка n_j.

III. В лемме 1 работы [3] ошибочно утверждается, что все числа $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{N-1}\}$, $\omega = \exp(2\pi i / N)$, являются собственными значениями оператора P. Доказывается это следующим образом. Рассматривается функция $f \in L_2(a, b)$ и утверждается, что функция $f_s = N^{-1} \sum_{r=0}^{N-1} \omega^{-sr} P^r f$ отлична от нуля при некотором $f \in L_2(a, b)$ и удовлетворяет соотношению $Pf_s = \omega^s f_s$. Доказывается только это последнее равенство, а отличие от нуля функции f_s при некотором f считается очевидным. Но это не верно. В самом деле, пусть $\tilde{n}_j = N / n_j, j = \overline{1, k}$. Тогда верна следующая лемма.

Лемма 1′. *Если s не кратно ни одному из чисел $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_k$, то для любой функции $f \in L_2(a, b)$ функция*

$$f_s(x) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \omega^{-sr} (P^r f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \omega^{-sr} f(p^r x) \tag{5}$$

равна нулю почти всюду на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $x \in D_j$. Тогда $p^{n_j} x = x$. Используя представление $r = \nu n_j + \mu$, где $0 \le \mu < n_j$, $0 \le \nu < \tilde{n}_j$, запишем

$$f_s(x) = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{n_j - 1} \sum_{\nu=0}^{\tilde{n}_j - 1} \omega^{-s(\nu n_j + \mu)} f(p^{\nu n_j + \mu} x) =$$

$$= \left(\frac{1}{n_j} \sum_{\mu=0}^{n_j - 1} \omega^{-s\mu} f(p^\mu x) \right) \left(\frac{1}{\tilde{n}_j} \sum_{\nu=0}^{\tilde{n}_j - 1} \theta_j^{-s\nu} \right) = 0 .$$

Здесь $\theta_j = \omega^{n_j} = \exp(2\pi i / \tilde{n}_j)$ — первообразный корень $\tilde{n}_j$-степени из 1. Так как j, $j = \overline{1, k}$, было выбрано произвольно, то мы доказали, что $f_s(x) = 0$ на D, т. е. почти всюду на $[a, b]$.

Лемма 1″. *Каждое из чисел λ вида ω^s, где s кратно некоторому из чисел $\tilde{n}_1, \ldots, \tilde{n}_k$, является собственным значением оператора P, а все остальные точки комплексной плоскости — регулярны.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \omega^s = \omega^{\nu\tilde{n}_j} = \varepsilon_j^{\nu}$, где $\varepsilon_j = \exp(2\pi i / n_j)$, $0 \le \nu < n_j$. Рассмотрим на интервале I_1^j произвольную отличную от нуля суммируемую с квадратом функцию f (например, $f = 1$). Если x — любая фиксированная точка из D_j, то найдется (и только одно!) $r \in \{0, 1, \ldots, n_j - 1\}$ такое, что $p^{-r}x \in I_1^j$. В этом случае положим $f_s(x) = \varepsilon_j^{\nu r} f(p^{-r}x)$. Этим мы определим функцию $f_s(x)$ на D_j так, что она будет отлична от нуля и суммируемая на D_j с квадратом. Вне D_j продолжим ее нулем. Пусть теперь $x \in D_j$ такое, что $p^{-r}x \in I_1^j$. Рассмотрим $(Pf_s)(x) = f_s(px) = f_s(\bar{x})$. Так как $p^{-r-1}\bar{x} = p^{-r}x \in I_1^j$, то $f_s(\bar{x}) = \varepsilon_j^{\nu(r+1)} f(p^{-r-1}\bar{x}) = \varepsilon_j^{\nu}\varepsilon_j^{\nu r} f(p^{-r}x) = \varepsilon_j^{\nu} f_s(x) = \lambda f_s(x)$, т. е. λ — собственное значение оператора P.

Пусть теперь λ отлично от чисел вида ω^s, где s кратно некоторому из чисел $\tilde{n}_1, \ldots, \tilde{n}_k$, т. е. пусть λ не является корнем из 1 какой-нибудь из степеней $n_1, \ldots, n_k$. Так как пространство H является прямой суммой подпространств $H_1, \ldots, H_k$, где $H_j = L_2(D_j)$, а P — прямой суммой операторов P_j, действующих в H_j, то $P - \lambda E$ является прямой суммой $P_j - \lambda E_j$, где E_j — единичный оператор в H_j. Поэтому для ограниченной обратимости $P - \lambda E$ достаточно доказать ограниченную обратимость каждого из $P_j - \lambda E_j$ в H_j. Рассмотрим в H_j уравнение $(P_j - \lambda E_j) f = g$ относительно f при известной правой части g. Применяя к левой и правой частям этого уравнения операторы системы (4), получаем (см. замечание 5) функциональную систему n_j уравнений относительно n_j неизвестных $f(x), f(px), f(p^2x), \ldots, f(p^{n_j-1}x)$ с определителем, модуль которого равен $|\lambda^{n_j} - 1|$, и, следовательно, отличным от нуля, в правой части которой стоят величины $g(x), g(px), \ldots, g(p^{n_j-1}x)$. Отсюда следует вторая часть утверждения леммы.

***Следствие* 1.** $\sigma(P) = \bigcup_{j=1}^{k} \{1, \omega^{\tilde{n}_j}, \omega^{2\tilde{n}_j}, \ldots, \omega^{(n_j-1)\tilde{n}_j}\}$.

Леммы 1′, 1″ и следствие 1 полностью уточняют и исправляют лемму 1 [3].

Далее в работе [3] вводятся обозначения M_s, $s = \overline{0, N-1}$, для собственных подпространств оператора P, отвечающих собственным значениям ω^s, и утверждается в лемме 2, что $L_2(a, b)$ является прямой суммой всех этих подпространств. Теперь мы знаем, что часть этих подпространств могут быть тривиальными. В работе доказывается, что любая функция $f \in L_2(a, b)$ восстанавливается по функциям $f_s \in M_s$ (см. (5)), а именно $f = \sum_{s=0}^{N-1} f_s$.

***Замечание* 6.** Можно уточнить, что формулами (5) на самом деле определяется семейство проекторов пространства $L_2(a, b)$ на M_s, $s = \overline{0, N-1}$, ортогональных между собой и в сумме дающих единичное отображение, т. е. представляющих собой разбиение единицы. При этом проекторы на тривиальные подпространства, естественно, также тривиальны.

Желая избавиться от тривиальных подпространств в семействе $\{M_s;\ s = \overline{0, N-1}\}$, лемму 2 можно уточнить следующим образом.

Лемма 2′. $L_2(a, b) = \underset{s}{\oplus} M_s,\ s = \overline{0, N-1},\ \omega^s \in \sigma(P)$.

Пусть теперь Ω — класс таких открытых подмножеств J отрезка $[a, b]$, каждое из которых представимо в виде $J = I^1_{m_1} \cup I^2_{m_2} \cup \ldots \cup I^k_{m_k}$, где I^j_m — некоторый из составляющих интервалов множества D_j. Пусть, как обычно, $L_2(J)$ — пространство определенных и суммируемых с квадратом на J функций. Через R_{sJ} в [3] обозначено отображение $R_{sJ}: M_s \to L_2(J)$, которое каждой функции $f \in M_s$ ставит в соответствие сужение $f|_J$ на множество J для любого $s \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и для произвольного $J \in \Omega$. При этом в лемме 4 [3] утверждается, что отображение $R_{sJ}: M_s \to L_2(J)$ является обратимым для произвольного $s \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и для каждого $J \in \Omega$. На самом деле, очевидно, что это неверно для тех s, для которых $M_s = 0$. Поэтому лемма 4 требует уточнения. Таким уточнением является следующая лемма.

Лемма 4′. *Отображение сужения $R_{sJ}: M_s \to L_2(J)$ является обратимым для $s \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и для каждого $J \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\omega^s \in \sigma(P)$, или (что то же) когда s кратно некоторому из чисел $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_k$.*

При сделанных предположениях доказательство леммы остается в силе. Кроме того, при сделанных в лемме 4′ дополнительных предположениях относительно s остаются справедливыми и леммы 5, 6, и, как следствие, и основная теорема, формулировку которой мы здесь несколько уточняем.

Пусть символом $\mathbb{F}$ обозначена коммутативная алгебра всех измеримых и существенно ограниченных на $[a, b]$ функций. Тогда основной вывод работы [3] можно сформулировать в следующем виде.

Теорема (Nasr). *Для любой непрерывной кусочно строго монотонной на отрезке $[a, b]$ функции q существуют такое биективное и кусочно-непрерывное отображение $p: [a, b] \to [a, b]$ и такое натуральное N, что для произвольного линейного и ограниченного в $L_2(a, b)$ оператора A, перестановочного с умножением на функцию q, существует N функций алгебры $\mathbb{F}$*

$$\{a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{N-1}(x)\} \subset \mathbb{F}, \tag{6}$$

таких, что для любой функции $f \in L_2(a, b)$ и для почти всех $x \in [a, b]$:

$$(Af)(x) = \sum_{r=0}^{N-1} a_r(x)(P^r f)(x), \tag{7}$$

где

$$(Pf)(x) = f(px). \tag{8}$$

Наоборот, всякий оператор вида (7), (6), (8) *является линейным, ограниченным в $L_2(a, b)$ и перестановочным с умножением на q.*

IV. Из формул (7), (6), (8) с учетом замечаний 1 – 5 следует, что оператор A разлагается в прямую сумму операторов, действующих в $L_2(D_j)$. Следовательно, для ограниченной обратимости A в $L_2(a, b)$ необходима и достаточна ограниченная обратимость его (его сужения) в каждом из пространств $L_2(D_j)$. Поэтому рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{r=0}^{N-1} a_r(x) f(p^r x) = g(x),\ x \in D_j \tag{9}$$

относительно $f \in L_2(D_j)$ с наперед заданной правой частью $g \in L_2(D_j)$. Действуя на левую и правую части уравнения (9) системой операторов (4) (точнее их сужениями на $L_2(D_j)$) и заменяя n_j на n, получаем функциональную систему уравнений

$$\sum_{r=0}^{N-1} a_r(p^\mu x) f(p^{r+\mu} x) = g(p^\mu x), \mu = \overline{0, n-1}. \qquad (10)$$

Если принять условие, что нижние индексы функции a_r складываются по модулю N, т. е. продлить a_r по индексу r N-периодически, то под знаком суммы будет стоять N-периодическая по r функция. А поскольку суммирование ведется по полному периоду, то значение суммы не изменится при любом сдвиге аргумента суммирования в слагаемых. Следовательно, сумму (10) можно представить в виде

$$\sum_{r=0}^{N-1} a_{r-\mu}(p^\mu x) f(p^r x) = g(p^\mu x), \mu = \overline{0, n-1}. \qquad (11)$$

Представляя, далее, r в виде $r = sn + \nu$, где $0 \le \nu < n, 0 \le s < \tilde{n}$ (напомним, что здесь $n = n_j$, $\tilde{n} = \tilde{n}_j$), и учитывая, что для всех $x \in D_j$ выполняется $p^n x = p^{n_j} x = x$, сумму в (11) заменяем двойной суммой

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{\tilde{n}-1} a_{sn+\nu-\mu}(p^\mu x) \right) f(p^\nu x) = g(p^\mu x), \mu = \overline{0, n-1}. \qquad (12)$$

Если ввести в рассмотрение функциональную матрицу

$$\mathcal{A}(x) = \| \mathcal{A}_{\mu,\nu}(x) \|_{\mu,\nu=0}^{n-1} = \left\| \sum_{s=0}^{\tilde{n}-1} a_{sn+\nu-\mu}(p^\mu x) \right\|_{\mu,\nu=0}^{n-1} \qquad (13)$$

и функциональные вектор-столбцы вида

$$\vec{f}(x) = \left(f(x), f(px), f(p^2 x), \ldots, f(p^{n-1} x) \right)^T, \qquad (14)$$

то с их помощью уравнение (12) запишется в компактном матричном виде

$$\mathcal{A}(x) \vec{f}(x) = \vec{g}(x), x \in D_j. \qquad (15)$$

Несложно убедиться (см., например, [4]), что оператор A ограниченно обратим в $L_2(D_j)$ тогда и только тогда, когда почти всюду на D_j ограниченно обратима матрица $\mathcal{A}(x)$, т. е. когда существует матрица $\mathcal{B}(x)$ с измеримыми и существенно ограниченными элементами, для которой равенства $\mathcal{A}(x)\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x)\mathcal{A}(x) = I_{n_j}$ выполняются почти всюду на D_j. Отсюда получаем, что почти всюду на D_j: $|\det \mathcal{A}(x)| \, |\det \mathcal{B}(x)| = 1$. Если учесть, что второй множитель почти всюду на D_j ограничен, то получаем, что существует $\delta > 0$ такое, что почти всюду на D_j выполняется условие $|\det \mathcal{A}(x)| \ge \delta > 0$. Последнее условие является не только необходимым, но и достаточным условием ограниченной обратимости матрицы $\mathcal{A}(x)$ на D_j. В итоге получаем следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы линейный ограниченный в* $L_2(a, b)$ *оператор* A, *перестановочный с оператором умножения на некоторую непрерывную кусочно строго монотонную функцию, т. е. оператор вида* (7), (6), (8), *был ограниченно обратим в* $L_2(a, b)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало* $\delta > 0$ *такое, что почти всюду на* D_j *выполняется условие*

$$\left| \det \left\| \sum_{s=0}^{\tilde{n}_j-1} a_{sn_j+\nu-\mu}(p_j^\mu x) \right\|_{\mu,\nu=0}^{n_j-1} \right| \ge \delta > 0, \; j = \overline{1, k}.$$

1. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352с.
2. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 488с.
3. *Nasr A. H.* The commutant of a multiplication operator // J.Math. Phys. – 1982.– **23**, № 13.– P. 2268 – 2270.
4. *Березовский Н. И., Липчук С. С.* Описание обратимых элементов коммутанта оператора умножения в пространстве суммируемых с квадратом функций. – Черновцы, 1991. – 13с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 207-Ук 91 (РЖ Мат.– 1991.– 6Б754 ДЕП).

Получено 06. 05. 91