УДК 517. 5

Я. Г. Іващук, асп. (Ін-т математики АН України, Київ)

k-ВУЖІ В ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ КЛАСАХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

k-вужі є узагальненням поліномів, що найменше відхиляються від нуля при наявності *k* зв'язків. Доведено існування і єдиність *k*-вужів в інтерполяційних класах скінченного порядку і їх неперервна диференційовність за параметром.

k-ужи являются обобщением полиномов, наименее уклоняющихся от нуля при наличии *k* связей. Доказано существование и единственность *k*-ужей в интерполяционных классах конечного порядка и их непрерывная дифференцируемость по параметру.

Нехай $C_{[a,b]}$ —простір неперервних функцій, заданих на $[a, b]$ з рівномірною нормою для $g(x) \in C_{[a,b]}$:

$$\|g(x)\| = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|.$$

Задамо на $[a, b]$ дві неперервні функції $g_0(x)$ і $g_1(x)$, для яких нерівність $g_0(x) < g_1(x)$ виконується $\forall x \in [a, b]$, і розглянемо деяку підмножину $\mathcal{F}(g_0, g_1) \in C_{[a,b]}$ функцій $F(x) = F(x, c)$ з інтерполяційного класу $\mathcal{F} \subset U_{n-1}$:

$$\mathcal{F}(g_0, g_1) \overset{\text{df}}{=} \{F(x, c) = F(x, c_1, \ldots, c_n) : g_0(x) \le F(x, c) \le g_1(x),\ \forall x \in [a, b]\}.$$

Означення інтерполяційного класу $\mathcal{F} \subset U_{n-1}$ наведене в праці [1], а означення екстремальних точок (*e*-точок : (+),(–)-точок) і гілок з різнойменними і однойменними кінцями, а також напівгілок можна знайти в статті [2]. Означення *k*-вужів для $\mathcal{F} \subset U_{n-1}$ легко навести, якщо скористатися означенням *k*-вужів для узагальнених поліномів за чебишовськими системами, наведеним у працях [2, 3].

Зауважимо, що результати даного дослідження є узагальненням результатів статті [2], де доведено теорему існування 2-вужів для $\mathcal{F} \subset U_{n-1}$, тобто *k*-вужів при парному $k = 2$, а також є спробою перенести деякі результати праць [4, 5] на *k*-вужі інтерполяційного класу $\mathcal{F} \subset U_{n-1}$.

1. Теорема існування і єдиності *k*-вужів.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{F}(g_0, g_1)$ містить хоча б дві різні функції і на $[a, b]$ задано систему точок $(a \le)\, x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-2}\, (\le b)$, $2 \le k \le n$, настільки близьких одна до одної, що при будь-яких значеннях ординат $y_0, \ldots, y_{k-2}$ таких, що $g_0(x_i) < y_i < g_1(x_i)$, $\forall i$ кожна функція $F(x, c) \in \mathcal{F}(g_0, g_1)$, що задовольняє умови*

$$F(x_0, c) = y_0, \ldots, F(x_{k-2}, c) = y_{k-2}, \tag{1}$$

не має e-точок на відрізку $[x_0, x_{k-2}]$. Тоді, якщо при деяких значеннях $y_0, \ldots$ $\ldots, y_{k-2}$ знайдеться хоча б одна функція $F(x, c) \in \mathcal{F}(g_0, g_1)$, яка задовольняє умови (1) *, то*:

1) *існують рівно два k-вужі $\overline{F}(x)$ і $\underline{F}(x)$ для функцій $g_0(x)$ і $g_1(x)$, які задовольняють умови* (1) ;

2) *при непарному k крайня ліва e-точка k-вужа $\overline{F}(x)$ є (+)-точкою, а k-вужа $\underline{F}(x)$ — (–)-точкою. При парному значенні k через точки (x_i, y_i), $i = \overline{0, k-2}$, проходить зростаюча гілка k-вужа $\overline{F}(x)$ і спадна гілка k-ву-*

жа $\underline{F}(x)$;

3) *k-вужі співпадають* ($\overline{F}(x) \equiv \underline{F}(x) \equiv F_0(x)$) *тоді і тільки тоді, коли* $F_0(x)$ *є* $(k-1)$*-вужем, і в такому випадку* $\mathcal{F}(g_0, g_1)$ *не містить інших функцій з* $\mathcal{F} \subset U_{n-1}$, *які задовольняли б умови* (1).

Щоб переконатися, що така система точок $\{x_i\}_{i=0}^{k-2}$ існує, доведемо таку лему.

Лема 1. *Для того щоб при фіксованих* x_0, y_0, $x_0 \in [a, b]$, $g_0(x) \le y_0 \le g_1(x)$, *точки* x_i, $i=\overline{0,\ k-2}$, *для яких виконуються нерівності* $(a \le)\, x_0 < \ldots < x_{k-2}\ (\le b)$, *задовольняли умову: при будь-яких значеннях ординат* $y_0, \ldots, y_{k-2}$ *таких, що* $g_0(x_i) < y_i < g_1(x_i)$, $\forall\ i$ *кожна функція* $F(x) \in \mathcal{F}(g_0, g_1)$, *що задовольняє умови* (1), *не має e-точок на* $[x_0, x_{k-2}]$, *необхідно і достатньо, щоб точка* x_{k-2} *лежала в інтервалі* (x_0, x^*), *де* x^* *— перша справа від* x_0 *і найближча до* x_0 *e-точка 2-вужа (верхнього чи нижнього), графік якого проходить через точку* (x_0, y_0).

Доведення. *Необхідність* випливає з того, що, оскільки кожна функція $F(x) \in \mathcal{F}(g_0, g_1)$, що задовольняє умови (1), не має e-точок на $[x_0, x_{k-2}]$, то вона також не має e-точок 2-вужа.

Достатність. Нехай точка x_{k-2} лежить лівіше першої справа від x_0 і найближчої до x_0 e-точки 2-вужа, графік якого проходить через точку (x_0, y_0). Доведемо, що набір точок $\{x_i\}_{i=0}^{k-2}$ буде таким, як зазначено в умові леми, тобто, що перша справа від x_0 e-точка будь-якої функції $F(x, c) \in \mathcal{F}(g_0, g_1)$ лежить за першою справа від x_0 e-точкою 2-вужа. Справді, як би це було не так, то можна побудувати функцію $\tilde{F}(x, c)$, яка задовольняла б умови (1) і перша справа від x_0 e-точка її лежала б лівіше від першої справа від x_0 e-точки 2-вужа. Але цього бути не може, бо тоді різниця двох функцій, а саме : 2-вужа і функції $\tilde{F}(x, c)$, мала б більше, ніж $n-1$ коренів, що суперечить теоремі 5 [1]. Лему доведено.

Доведення теореми 1. Розглянемо два випадки. Перший випадок : k непарне. Позначимо через $\mathcal{F}_0$ підмножину тих функцій $F(x)$ множини $\mathcal{F}(g_0, g_1)$, які задовольняють умови (1) :

$$\mathcal{F}_0 = \{F(x) : F(x) \in \mathcal{F}(g_0, g_1), F(x_0) = y_0, \ldots, F(x_{k-2}) = y_{k-2}\}.$$

Як випливає з умови теореми, множина $\mathcal{F}_0$ не порожня. А оскільки дана множина ще й компактна в топології рівномірної збіжності, що випливає як наслідок теореми 3 [2], то існує деяка функція $\overline{F}(x) \in \mathcal{F}_0$, яка в точці $x = a$ досягатиме найбільшого значення поміж решти функцій $F(x) \in \mathcal{F}_0$:

$$\overline{F}(a) = \max_{F(x) \in \mathcal{F}_0} F(a). \tag{2}$$

Спочатку розглянемо випадок, коли шуканий максимум строго менший, ніж $g_1(a)$: $\overline{F}(a) < g_1(a)$, і доведемо при цьому, що екстремальна функція $\overline{F}(x)$ буде k-вужем, тобто матиме не менше $n-k+1$ точок альтернансу.

Методом від супротивного допускаємо, що функція $\overline{F}(x)$ не буде k-вужем, тобто число точок альтернансу буде не більшим за $n-k$, а графік функції $\overline{F}(x)$ матиме не більше $n-k-1$ гілок з різнойменними кінцями. Нехай точки $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-2}, y_{k-2})$ лежать на одній із гілок з різнойменними кінцями. Тоді побудуємо функцію $F^*(x) \in \mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$, але таким чином, щоб різниця функцій $F^*(x) - \overline{F}(x)$ мала єдиними коренями :

1) прості корені в точках $x_0, \ldots, x_{k-2}$;

2) простий корінь в інтервалі між точкою x_{k-2} і першою справа від x_{k-2} e-точкою функції $\overline{F}(x)$;

3) простий корінь між точкою a і першою $(+)$-точкою функції $\overline{F}(x)$;

4) по одному простому кореню на решті $j (\le n-k-2)$ інтервалах, де розміщені гілки з різнойменними кінцями, і якщо j строго менше $n-k-2$, то в правому інтервалі, де розміщена напівгілка, маємо $n-k-2-j$ простих коренів.

Якщо при $j < n-k-2$ графік функції $\overline{F}(x)$ не матиме справа напівгілки, то функцію $F^*(x)$ потрібно будувати з урахуванням таких випадків :

4′) якщо n і j однакової парності, то необхідно, щоб прості корені різниці $F^*(x) - \overline{F}(x)$ лежали на j інтервалах таким чином, що на кожному з них різниця мала б непарну кількість простих коренів і одночасно загальна їх кількість дорівнювала $n-k-2$;

4″) якщо n і j різної парності, то необхідно, щоб між точкою a і першою $(+)$-точкою функції $\overline{F}(x)$ загалом було, з урахуванням умови п. 3, $n-k-2-j+1$ простих коренів.

Візьмемо справа від точки x_{k-2} точку x_{k-1} настільки близьку до точки x_{k-2}, що всі e-точки будь-яких функцій $F(x) \in \mathcal{F}_0$, які лежать справа від точки x_{k-2}, були розміщені правіше і від точки x_{k-1}. Така точка існує, бо, як видно з леми 1, проміжок $[x_0, x^*)$, де x^* — перша справа від x_0 e-точка того 2-вужа, у якого ця точка буде ще й найближчою до x_0, є напівінтервалом. На функцію $F^*(x)$ накладемо умови

$$F^*(x_{k-1}) = \overline{F}(x_{k-1}) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{3}$$

якщо гілка з різнойменними кінцями, на якій лежать точки $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-2}, y_{k-2})$, $(x_{k-1}, \overline{F}(x_{k-1}))$, є зростаючою, і

$$F^*(x_{k-1}) = \overline{F}(x_{k-1}) - \varepsilon, \tag{4}$$

якщо гілка є спадною. При фіксованому $\varepsilon > 0$, враховуючи умову (3) або (4), $F^*(x)$ визначатиметься однозначно. Згідно з теоремою 2 [6] можна підібрати таке достатньо мале $\varepsilon > 0$, щоб $F^*(x) \in \mathcal{F}_0$. А на підставі теореми 5 [1] і попередніх міркувань робимо висновок, що різниця функцій $F^*(x) - \overline{F}(x)$ матиме $n-1$ коренів, кожний з яких визначений згідно з пп. 1 – 4. Оскільки функція $F^*(x) - \overline{F}(x)$ не має інших коренів, крім тих, що зазначені вище, то дана різниця задовольняє умови :

а) $F^*(a) - \overline{F}(a) > 0$;

б) в кожній $(+)$-точці функції $\overline{F}$ виконується нерівність $F^*(\xi) - \overline{F}(\xi) < 0$, а в кожній $(-)$-точці — нерівність $F^*(\xi) - \overline{F}(\xi) > 0$.

Але виконання п. а) суперечить умові (2).

Тепер розглянемо випадок, коли

$$\max_{F(x) \in \mathcal{F}_0} F(a) = g_1(a). \tag{5}$$

Оскільки через точку $(a, g_1(a))$ може проходити графік не лише однієї функції $F(x) \in \mathcal{F}_0$, то в такому разі замість екстремальної задачі (2) розглянемо додаткову задачу: поміж всіх функцій $F(x) \in \mathcal{F}_0$, які в точці $x = a$

набувають значення $g_1(a)$, знайти таку $\overline{F}^*$, яка матиме найменше значення в точці t_0:

$$\overline{F}^*(t_0) = \min_{\substack{F(x) \in \mathcal{F}_0 \\ F(a) = g_1(a)}} F(t_0),$$

де $t_0 > a$, але точка t_0 настільки близька до a, що на проміжку $(a, t_0]$ не існує e-точок функцій $F(x) \in \mathcal{F}_0$, що задовольняють умову (5). Міркуючи схоже, як і в попередньому випадку, бачимо, що функції $\overline{F}$ і $\overline{F}^*$ мають по $n - k + 1$ точок альтернансу, тобто є k-вужами, і до того ж верхніми. Аналогічно доводимо існування нижнього k-вужа $\underline{F}(x)$ шляхом розв'язання відповідної екстремальної задачі : серед функцій $F(x) \in \mathcal{F}_0$ знайти таку, яка в точці $x = a$ досягатиме найменшого значення, тобто

$$\underline{F}(a) = \min_{F(x) \in \mathcal{F}_0} F(a).$$

Другий випадок : k парне. Для парного k доведення існування верхнього і нижнього k-вужів проводиться таким же чином, як це було зроблено в статті [2] при доведенні існування 2-вужів, з тією лише відмінністю, що тут потрібно взяти додатково точку $x_{k-1} > x_{k-2}$ так, щоб система точок $\{x_i\}_{i=0}^{k-1}$ задовольняла умову леми 1, і розв'язати відповідні екстремальні задачі :

а) існує деяка функція $\overline{F}(x)$, яка в точці x_{k-1} досягатиме найбільшого значення поміж решти функцій $F(x) \in \mathcal{F}_0$:

$$\overline{F}(x_{k-1}) = \max_{F(x) \in \mathcal{F}_0} F(x_{k-1});$$

б) існує деяка функція $\underline{F}(x)$, яка в точці x_{k-1} досягатиме найменшого значення поміж решти функцій $F(x) \in \mathcal{F}_0$:

$$\underline{F}(x_{k-1}) = \min_{F(x) \in \mathcal{F}_0} F(x_{k-1}).$$

Єдиність верхнього і нижнього k-вужів доводиться методом від супротивного. Покажемо це для непарного k і $\overline{F}(a) < g_1(a)$. Якщо припустити, що існують два верхні k-вужі $\overline{F_1}(x)$ і $\overline{F_2}(x)$, то тоді їхня різниця матиме щонайменше такі корені :

а) простий корінь в точці $x = a$;

б) по одному простому кореню в інтервалі, де розміщені гілки з різнойменними кінцями функцій $\overline{F_1}(x)$;

в) прості корені в точках $x_0, \ldots, x_{k-2}$.

А всього їх буде $1 + n - k + k - 1 = n$, що суперечить теоремі 5 [1].

k-вужі при непарному k співпадають лише тоді, коли всі функції $F(x) \in \mathcal{F}_0$ в точці $x = a$ мають однакове значення. Але це означає, що кожна з таких функцій є $(k-1)$-вужем. З іншого боку, якщо множина $\mathcal{F}_0$ містить $(k-1)$-вуж, то він буде в цій множині єдиним, що легко довести методом від супротивного. Таким же чином міркуємо і при k парному. На цьому доведення закінчене.

Неважко довести і наслідки, які випливають з теореми 1 (їхні формулювання можна знайти в статті [4]). Властивості k-вужів з інтерполяційного класу аналогічні і для k-вужів з множини узагальнених поліномів [4].

Перед тим як перейти до доведення неперервної диференційовності k-вужів за параметром y_{k-2}, відзначимо, що надалі будемо користуватися тільки тими інтерполяційними класами, у яких кожна з функцій $F(x, c) \in \mathcal{F}_0$ є диференційовною за параметром c_i, тобто частинні похідні $\partial F(x, c) / \partial c_i$, $i = 1, \ldots, n$, існують для всіх $c \in C_0$ і неперервні в точках $(x, c) \in [a, b] \times C_0$, де C_0 — область визначення параметрів $c_1, \ldots, c_n$, а система функцій $\{\partial F / \partial c_i\}_{i=1}^n$ є лінійно незалежною на $\forall [a', b'] \subset [a, b]$. Попередньо покажемо, що при цих умовах k-вужі (верхні чи нижні) з інтерполяційного класу задовольняють умову Ліпшіца як функції параметра y_{k-2} при фіксованих значеннях $y_0, \ldots, y_{k-3}$.

Крім того, далі нам потрібна така лема.

Лема 2. *Для будь-якого інтерполяційного класу, який є неперервно-диференційовним за параметром* c_i, *система функцій* $\{F_i(x)\}_{i=1}^n = \left\{\dfrac{\partial F(x,c)}{\partial c_i}\right\}_{i=1}^n$ *є чебишовською на* $[a, b]$ *для всіх* $c \in \mathbb{R}_n$, *якщо вона є лінійно незалежною на будь-якому відрізку* $[a', b'] \subset [a, b]$.

Доведення. Методом від супротивного припустимо, що система функцій $\{\partial F / \partial c_i\}_{i=1}^n$ не є чебишовською, тобто існує поліном за цією системою вигляду $\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial F}{\partial c_i} \Delta c_i$, який матиме щонайменше n коренів. За формулою Тейлора маємо

$$F(x, c + t\Delta c) = F(x, c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial c_i} t \Delta c_i + 0(|t \Delta c|),$$

де $t > 0$, $t \to 0+$, $\Delta c = (\Delta c_1, \ldots, \Delta c_n)$, або

$$\frac{F(x, c + t\Delta c) - F(x, c)}{t\|\Delta c\|} - 0(1) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x,c)}{\partial c_i} \frac{\Delta c_i}{\|\Delta c\|}.$$

Вираз $(F(x, c + t\Delta c) - F(x, c)) / (t \|\Delta c\|)$ являє собою функцію, яка при будь-якому значенні параметра t може мати щонайбільше $n - 1$ коренів. Нехай поліном правої частини має n коренів $x_1, \ldots, x_n$. Покажемо, що в такому випадку даний поліном крім згаданих нулів буде перетворюватися в нуль у всіх точках щонайменше одного відрізка. Оскільки вираз $(F(x, c + t\Delta c) - F(x, c)) / (t\|\Delta c\|)$ може змінювати знак щонайбільше n разів, а поліном правої частини — $n - 1$ разів, то хоча б на одному відрізку $[z_1, z_2] \subset [a, b]$ знаки $\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial F}{\partial c_i} \dfrac{\Delta c_i}{\|\Delta c\|}$ і $(F(x, c + t\Delta c) - F(x, c)) / (t\|\Delta c\|)$ не співпадатимуть. А щоб виконувалась рівність, на тих відрізках, де знаки не співпадають, поліном повинен перетворюватися в тотожний нуль, що суперечить умові леми.

2. Умова Ліпшіца для k-вужів.

Теорема 2. *Для будь-якого значення* y_{k-2} *з області його визначення і відповідного йому* k*-вужа* $F(x, c(y_{k-2}))$ *існує константа* $K = K(y_{k-2}) > 0$ *така, що виконується нерівність*

$$\|F(x, c(y_{k-2} + \Delta y_{k-2})) - F(x, c(y_{k-2}))\| \le K |\Delta y_{k-2}|. \tag{6}$$

Доведення. Припустимо від супротивного, що не існує такого K, при якому виконується нерівність (6), тобто

$$\frac{\|F(x, c(y_{k-2} + \Delta y_{k-2})) - F(x, c(y_{k-2}))\|}{|\Delta y_{k-2}|} \to \infty \tag{7}$$

для деякої послідовності $\Delta y_{k-2}^{(j)} \to 0, j \to \infty$, і нехай $\Delta y_{k-2}^{(j)} > 0,\ \forall j$. Розглянемо послідовність функцій

$$\Phi_j(x) = \frac{\left(F(x,c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(j)}))-F(x,c(y_{k-2}))\right)\Delta y_{k-2}^{(j)}}{\Delta y_{k-2}^{(j)}\left\|F(x,c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(j)}))-F(x,c(y_{k-2}))\right\|} =$$

$$= \frac{F(x,c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(j)}))-F(x,c(y_{k-2}))}{\left\|F(x,c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(j)}))-F(x,c(y_{k-2}))\right\|}, \tag{8}$$

яка є обмеженою, бо норма даної частки дорівнює 1. Крім того, множина $\left\{\Phi_j(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ є ще і замкнутою множиною, бо кожна з функцій $\Phi_j(x)$ проходить через фіксовані точки $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-3}, y_{k-3})$. А на підставі леми 2 [7] і теореми 3 [2] випливає, що дана множина буде компактною. Тому серед чисел $\left\{\Delta y_{k-2}^{(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ знайдеться підпослідовність $\left\{\Delta y_{k-2}^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, для якої підпослідовність функцій (8) буде збігатися до деякої функції Φ_0, коренями якої будуть :

1) всі точки альтернансу k-вужа $F(x, c(y_{k-2}))$;

2) точки $x_0, x_0, \ldots, x_{k-3}$;

3) точка x_{k-2} (на підставі припущення (7), тому що

$$\frac{F(x_{k-2},c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(m)}))-F(x_{k-2},c(y_{k-2}))}{\left\|F(x_{k-2},c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(m)}))-F(x_{k-2},c(y_{k-2}))\right\|} =$$

$$\frac{\Delta y_{k-2}^{(m)}}{\left\|F(x_{k-2},c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(m)}))-F(x_{k-2},c(y_{k-2}))\right\|} \to 0,\ m \to \infty).$$

Перепишемо функції (8) у вигляді

$$\Phi_m(x) = \frac{F(x,c+\Delta c^{(m)}-F(x,c)}{\gamma(\Delta c^{(m)})}, \tag{9}$$

де

$$\gamma(\Delta c^{(m)}) = \left\|F(x,c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(m)}))-F(x,c(y_{k-2}))\right\| > 0.$$

Оскільки за означенням кожна з функцій $F(x, c)$ інтерполяційного класу $\mathcal{F} \subset U_{n-1}$ є неперервною за кожним з параметрів і за припущенням є диференційовною по c_i, то за формулою скінченних приростів перепишемо (9) у вигляді

$$\frac{F(x,c+\Delta c^{(m)}-F(x,c)}{\gamma(\Delta c^{(m)})} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial c_i}\Delta c^{(m)} + 0\left(\left|\Delta c^{(m)}\right|\right)}{\gamma(\Delta c^{(m)})} =$$

$$= \frac{\left|\Delta c^{(m)}\right|}{\gamma(\Delta c^{(m)})}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial c_i}\frac{\Delta c_i^{(m)}}{\left|\Delta c^{(m)}\right|} + \frac{0\left(\left|\Delta c^{(m)}\right|\right)}{\left|\Delta c^{(m)}\right|}\right). \tag{10}$$

Оскільки $|\Delta c_i| / \|\Delta c\| \le 1$ і

$$\|\Phi_m(x, c, \Delta c^m)\| = 1, \tag{11}$$

то $(|\Delta c^m|)/(\gamma(\Delta c^m))$ не прямує ні до 0, ні до ∞, тобто $(|\Delta c^m|)/(\gamma(\Delta c^m)) < K_2$. Як видно з рівності (10), підпослідовність функцій $\Phi_m(x, c, \Delta c^m)$ збігатиметься до функції $\Phi_0(x)$, яка є поліномом за узагальненою чебишовською системою функцій $\Delta F/\Delta c_1, \ldots, \Delta F/\Delta c_n$. А тому функція $\Phi_0(x)$ може мати не більше $n-1$ коренів, що суперечить твердженням пп. 1 – 3. Теорему 2 доведено.

3. Диференціювання за параметром сім'ї k-вужів.

Теорема 3. *Для довільних неперервних на $[a, b]$ функцій $g_0(x)$, $g_1(x)$ таких, що $g_0(x) < g_1(x)$, $\forall x \in [a, b]$, і точок $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-2}, y_{k-2})$ верхні (відповідно нижні) k-вужі є неперервно диференційовними за параметром y_{k-2} для таких значень y_{k-2}, що відповідні їм k-вужі мають не більше $n-k+1$ е-точок. При цьому виконується рівність*

$$\frac{\partial F\left(x, c(y_{k-2})\right)}{\partial y_{k-2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial y_{k-2}},$$

де права частина являє собою інтерполяційний поліном за чебишовською системою $\left\{\partial F/\partial c_i\right\}_{i=1}^{n}$ з простими коренями в точках альтернансу k-вужа і в точках $x_0, \ldots, x_{k-3}$.

Доведення. Нехай $F(x, c(y_{k-2}))$ — k-вуж, що не має гілок з однойменними кінцями і не є $(k-1)$-вужем. Параметри $c_i(y_{k-2})$ однозначно визначаються, якщо врахувати, що k-вуж проходить через точки $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-2}, y_{k-2})$ і $(\xi_j, F(\xi_j, c(y_{k-2}))) = (\xi_j, y_j)$, $j = \overline{1, n-k+1}$, де ξ_j — точки альтернансу k-вужа.

Оскільки для k-вужів $F(x, c(y_{k-2}))$ виконується умова Ліпшіца (6), то завдяки теоремі 3 [2] про компактність множини $\mathcal{F}(g_0, g_1)$ можна вибрати таку послідовність чисел $\left\{\Delta y_{k-2}^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, $\Delta y_{k-2}^{(m)} \to 0$ при $m \to \infty$, для якої:

1)існує границя

$$\lim_{m \to \infty} \frac{F(x, c(y_{k-2} + \Delta y_{k-2}^{(m)})) - F(x, c(y_{k-2}))}{\Delta y_{k-2}^{(m)}} = P_0(x),$$

де $P_0(x)$ являє собою поліном за чебишовською системою $\left\{\partial F/\partial c_i\right\}_{i=1}^{n}$;

2) існують границі $\left\{\xi_i^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty} \to \{\xi_j\}$.

Покажемо, що коренями полінома $P_0(x)$, крім очевидних точок $x_0, \ldots, x_{k-3}$, будуть точки альтернансу ξ_j k-вужа $F(x, c(y_{k-2}))$.

Справді, кожна з функцій

$$G_m(x) = F(x, c(y_{k-2} + \Delta y_{k-2}^{(m)})) - F(x, c(y_{k-2}))$$

послідовності $\left\{G_m(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$ має коренями абсциси $u_j^{(m)}$ точок перетину графіків k- вужів $F(x, c(y_{k-2} + \Delta y_{k-2}^{(m)}))$ і $F(x, c(y_{k-2}))$, які лежать між точками ξ_j і $\xi_j^{(m)}$. Оскільки для кожного $j = \overline{1, n-k+1}$ послідовність $\{u_j^{(m)}\}_{j=1}^{\infty}$ є обмеженою, то можна вибрати підпослідовність $\{u_j^{(m)}\}_{m_s=1}^{\infty}$, збіжну до ξ_j при $m_s \to \infty$.

В точці x_{k-2} поліном $P_0(x)$ набуває значення, рівного 1, тому що

$$\lim_{m\to\infty}\frac{F(x_{k-2},c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(m)}))-F(x_{k-2},c(y_{k-2}))}{\Delta y_{k-2}^{(m)}}=1.$$

Таким чином, коефіцієнти $\dfrac{\partial c_i}{\partial y_{k-2}}$ полінома $P_0(x)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial c_i}\dfrac{\partial c_i}{\partial y_{k-2}}$ однозначно визначаються з лінійної системи рівнянь

$$\frac{\partial F(\xi_j)}{\partial y_{k-2}}=0,\quad j=\overline{1,n-k+1},$$

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial y_{k-2}}=0,\quad i=\overline{0,k-3},$$

$$\frac{\partial F(x_{k-2})}{\partial y_{k-2}}=1.$$

Якщо припустити, що похідної за параметром y_{k-2} не існує, то тоді знайдеться послідовність чисел $\left\{\Delta y_{k-2}^{(l)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ таких, що $\Delta y_{k-2}^{(l)}\to 0$ при $l\to\infty$, для якої границя

$$\lim_{l\to\infty}\frac{F(x,c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(l)}))-F(x,c(y_{k-2}))}{\Delta y_{k-2}^{(l)}}=P_1(x),\tag{12}$$

де $P_0(x)\not\equiv P_1(x)$ і $P_1(x)$ також є поліномом за чебишовською системою $\{\partial F/\partial c_i\}_{i=1}^{n}$. Як видно з рівності (12), гранична функція $P_1(x)$ буде мати корені в тих же точках, що і функція $P_0(x)$. Крім того,

$$\lim_{l\to\infty}\frac{F(x_{k-2},c(y_{k-2}+\Delta y_{k-2}^{(l)}))-F(x_{k-2},c(y_{k-2}))}{\Delta y_{k-2}^{(l)}}=\lim_{l\to\infty}\frac{\Delta y_{k-2}^{(l)}}{\Delta y_{k-2}^{(l)}}=1.$$

Таким чином, значення поліномів $P_0(x)$ і $P_1(x)$ збігається в n точках, тобто $P_0(x)\equiv P_1(x)$, що і доводить існування похідної від k-вужа $F(x, c(y_{k-2}))$ за параметром y_{k-2}. Теорему 3 доведено.

1. *Морозов В. И.* О некоторых вопросах равномерного приближения функций интерполяционных классов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1952. – **16**, №1. – С. 75 – 100.
2. *Иващук Я. Г.* Теорема существования 2-ужей для интерполяционных классов конечного порядка // Исследования по теории приближения функций. – Киев : Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 38 – 44.
3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.
4. *Ковтунец В. В.* k-ужи как обобщение наименее уклоняющихся от нуля многочленов со связями // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, №4. – С. 905 – 925.
5. *Ковтунец В. В.* Дифференцирование по параметру семейства k-ужей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – №7. – С. 12 – 15.
6. *Буров В. Н.* О некоторых вопросах равномерной аппроксимации функций // Уч. зап. Ленингр. политехн. ин-та.– 1961. – **218**. – С. 127 – 140.
7. *Дидковская Н. В.* О равномерной непрерывности нелинейного чебышевского оператора наилучшего приближения для интерполяционных классов. – Л., 1983.– 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, №2684.

Получено 20.11.91