УДК 512.54

В. В. Бавула, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОПИСАНИЕ ДВУСТОРОННИХ ИДЕАЛОВ В ОДНОМ КЛАССЕ НЕКОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ. I

Для обобщенных алгебр Вейля степени 1 с базисным дедекиндовым кольцом классифицируются двусторонние идеалы, описываются (некоммутативные) алгебры, в которых произведение идеалов перестановочно, и любой собственный идеал однозначным образом раскладывается в произведение первичных идеалов.

Для узагальнених алгебр Вейля степеня 1 з базисним дедекіндовим кільцем класифікуються двосторонні ідеали, описуються (некомутативні) алгебри, в яких добуток ідеалів переставний, і будь-який власний ідеал однозначно розкладається в добуток первинних ідеалів.

Введение. Для обобщенных алгебр Вейля степени 1 (определение в п. 2) с базисным дедекиндовым кольцом классифицируются двусторонние идеалы (теорема 4), а также максимальные (первичные: лемма 1, предложение 2) и идемпотентные идеалы (предложение 4). Аналогично случаю коммутативного дедекиндового кольца каждый собственный двусторонний идеал в изучаемом некоммутативном классе колец однозначным (каноническим) образом раскладывается в произведение коммутирующих взаимно простых идеалов ((6)–(8), теорема 3). Однозначность представления собственного двустороннего идеала в виде пересечения взаимно простых идеалов доказывается в теореме 6 (см. так же (15)). Удается выделить класс колец (теорема 5, следствие 6), в которых двусторонние идеалы коммутируют друг с другом ($IJ = JI$, хотя сами кольца некоммутативны), и любой собственный двусторонний идеал однозначным образом представляется в виде произведения максимальных идеалов (как в коммутативном дедекиндовом кольце). Общие свойства (дистрибутивность, конечность и др.) решетки двусторонних идеалов приводятся в теореме 2. Оказывается, двусторонние идеалы очень сильно связаны с модулями, которые имеют конечную длину над базисным дедекиндовым кольцом (теорема 2, следствие 1, предложение 5) — это аналог конечномерных модулей над простой алгеброй Ли.

1. Определение обобщенной алгебры Вейля [1 – 3]. Пусть D — некоторое кольцо, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — семейство коммутирующих автоморфизмов кольца D, т. е. $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — множество ненулевых элементов центра $Z(D)$ кольца D, причем $\sigma_i(a_j) = a_j$ для любых $i \neq j$. *Обобщенной алгеброй Вейля* $A = D(\sigma, a)$ (сокращенно ОАВ) степени n с базисным кольцом D будем называть кольцо, которое получается присоединением к D $2n$ символов $X_1^+, \ldots, X_n^+, X_1^-, \ldots, X_n^-$, удовлетворяющих следующим определяющим соотношениям:

$$X_i^- X_i^+ = a_i, \quad X_i^+ X_i^- = \sigma_i(a_i),$$

$$X_i^{\pm}\alpha = \sigma_i^{\pm 1}(\alpha) X_i^{\pm}, \quad \forall \alpha \in D,$$

$$[X_i^-, X_j^-] = [X_i^+, X_j^+] = [X_i^+, X_j^-] = 0, \quad \forall\, i \neq j.$$

Множества a и σ будем называть соответственно *определяющими элементами* и *автоморфизмами* обобщенной алгебры Вейля A. Если D — нетерово кольцо (соответственно без делителей нуля), то A — нетерово кольцо (соответственно без делителей нуля).

Для любого целочисленного вектора $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим $v_k = v_{k_1}(1) \ldots v_{k_n}(n)$, где для каждого $1 \leq i \leq n$ и целого $m \geq 0$ в целях удобства записи полагаем $v_{\pm m}(i) = (X_i^{\pm})^m$, $v_0(i) = 1$. В случае $n = 1$ пишем v_m вместо

$v_m(1)$. Непосредственно из определяющих соотношений следует, что $A = \oplus A_k$ – $\mathbb{Z}^n$ — градуированная алгебра ($A_k A_e \subset A_{k+e}$, $\forall k, e \in \mathbb{Z}^n$), где $A_k = Dv_k$.

2. Основные теоремы, примеры. В дальнейшем, если не оговорено противное, $A = D(\sigma, a)$ — ОАВ степени 1 с базисным дедекиндовым кольцом D и произвольным не равным нулю определяющим элементом $a \neq 0 \in D$, определяющий автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}(D)$ удовлетворяет условию C) $\sigma^n(\mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}$, $\forall\, 0 \neq n \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} \subset D$, — максимальный идеал.

Таким образом, кольцо A получается из D присоединением переменных $X = X_1^+$ и $Y = X_1^-$, которые удовлетворяют определяющим соотношениям

$$X\alpha = \sigma(\alpha)X \quad \text{и} \quad Y\alpha = \sigma^{-1}(\alpha)Y, \quad \forall \alpha \in D, \quad YX = a \quad \text{и} \quad XY = \sigma(a).$$

В каждом (левом) A-модуле M содержится A-подмодуль D-кручения $\mathrm{tor}(M) := \{m \in M \mid sm = 0$ для некоторого $s \neq 0 \in D\}$. Следовательно, каждый простой A-модуль M либо с D-кручением ($M = \mathrm{tor}(M)$) либо без D-кручения ($\mathrm{tor}(M) = 0$).

На множестве максимальных (простых ненулевых) идеалов $\mathfrak{m} = \mathrm{Max}(D)$ кольца D свободно действует группа $\mathbb{Z} = \langle\sigma\rangle$, т. е. орбита каждой точки изоморфна $\mathbb{Z}$ (в силу C)). Поэтому все естественные понятия (порядок, отрезок, полуось и др.), используемые для $\mathbb{Z}$, будем (без оговорок) применять для любой орбиты.

На $\mathfrak{m}$ зададим отношение *эквивалентности* $\sim$: $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ лежат на одной орбите и любой идеал из отрезка $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ не содержит определяющего элемента a. Т. е. область эквивалентности — это либо орбита, каждый элемент которой не содержит a (такие орбиты называются *невырожденными*, в противном случае — *вырожденными*), либо множество вида $(-\infty, \mathfrak{p}]$, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$, $(\mathfrak{p}, \infty)$, где $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \ni a$, и ни один другой элемент из этих множеств a не содержит. Вырожденных орбит (соответственно конечных областей эквивалентности) конечное число.

Предложение 1 [4]. *Для любого левого (правого) идеала $J \neq 0$ A-модуль A/J имеет конечную длину, следовательно, размерность Крулля алгебры A равна* $\mathrm{K}-\dim A = 1$.

Пусть A — некоторое кольцо и Q — некоторое свойство простых A-модулей, инвариантное относительно изоморфизма модулей, тогда через $\hat{A}(Q)$ обозначим совокупность классов изоморфизма простых A-модулей, обладающих свойством Q.

Носителем $\mathrm{Supp}(M)$ модуля M называется совокупность максимальных идеалов $\mathfrak{p}$ кольца D таких, что $\mathrm{Hom}_D(M, D/\mathfrak{p}) \neq 0$. Непосредственно из определяющих соотношений вытекает следующая теорема.

Теорема 1 [4]. *(Классификация простых A-модулей с D-кручением). Отображение* $\mathrm{Max}(D)/{\sim} \to \hat{A}$ *(D-кручение)*, $\Gamma \to [L(\Gamma)]$, *является биекцией с обратным* $[M] \to \mathrm{Supp}(M)$, *где*:

1) *Если Γ — невырожденная орбита, то $L(\Gamma) = A/A\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} \in \Gamma$;*

2) *Если $\Gamma = (-\infty, \mathfrak{p}]$, то $L(\Gamma) = A/A(\mathfrak{p}, X)$;*

3) *Если $\Gamma = (\sigma^{-n}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}]$, то $L(\Gamma) = A/A(Y^n, \mathfrak{p}, X)$; это — все простые A-модули конечной длины $l_D(L(\Gamma)) = |\Gamma| = n < \infty$ как D-модули (их конечное число, равное количеству конечных областей эквивалентности);*

4) *Если* $\Gamma = (\mathfrak{p}, +\infty)$, *то* $L(\Gamma) = A / A(\sigma(\mathfrak{p}), Y)$.

Примеры алгебр A. 1. $A = K[H](\sigma, a)$, где $D = K[H]$ — кольцо многочленов от одной переменной H над полем K характеристики нуль, $\sigma(H) = H - 1$, $a \neq 0$ — произвольный многочлен [2]. В частности, при $a = H$ получается алгебра, изоморфная алгебре Вейля $A_1 = \langle p, q \mid pq - qp = 1 \rangle$ степени 1 над полем K.

2. $A = D(\sigma, a)$, где $D = K[H, (H - \mu/(1-\lambda))^{-1}]$, $\sigma(H) = \lambda H + \mu$, $\lambda \neq 0 \in K$ не является корнем из 1, $\mu \in K$, $a \in D$ — произвольный ненулевой элемент.

3. Пусть $U = \mathrm{Usl}(2)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathrm{sl}(2) = \langle X, Y, H \mid [H, X] = X, [H, Y] = -Y, [X, Y] = 2H \rangle$ над полем K, $C = H(H + 1) + YX$ — элемент Казимира. Очевидно, $U \simeq K[H, C](\sigma, a = C - H(H + 1))$, где автоморфизм σ базисного кольца $K[H, C]$ определяется следующим образом: $\sigma(H) = H - 1$, $\sigma(C) = C$. Тогда для любого $\lambda \in K$ фактор-алгебра $U(\lambda) := U / U(C - \lambda)$ изоморфна ОАВ из примера 1 $K[H](\sigma, a = \lambda - H(H + 1))$ [1, 2].

4. Рассмотрим K-алгебру $\Lambda(b)$, которая является деформацией $\mathrm{Usl}(2)$ и порождается буквами X, Y, H, удовлетворяющими следующим соотношениям: $[H, X] = X$, $[H, Y] = -Y$, $[X, Y] = b \in K[H]$ — произвольный ненулевой многочлен; тогда [2] $\Lambda(b) \simeq K[H, C](\sigma, a = C - \alpha)$, где σ такое, как в примере 3, $\alpha \in K[H]$ удовлетворяет уравнению $\alpha - \sigma(\alpha) = b$. Очевидно, центр алгебры $\Lambda(b)$ равен $K[C]$. Аналогично предыдущему примеру для любого $\lambda \in K$ фактор-алгебра $\Lambda(b, \lambda) := \Lambda(b) / \Lambda(b)(C - \lambda)$ изоморфна ОАВ из примера 1 с определяющим элементом, равным $\lambda - \alpha$.

5. Пусть h, $q = \exp(h) \in K = \mathbb{C}$; рассмотрим алгебру U_q, введенную Е. К. Скляниным [5], [6], которая порождается образующими X, Y, H_+, H_- и соотношениями $H_+H_- = H_-H_+ = 1$, $XH_\pm = q^{\pm 1}H_\pm X$, $YH_\pm = q^{\mp 1}H_\pm Y$, $[X, Y] = (H_+^2 - H_-^2)/2h$. Аналогично предыдущему примеру

$$U_q \simeq K[C, H, H^{-1}](\sigma, \ a = C + \{H^2/(q^2 - 1) - H^{-2}/(q^{-2} - 1)\}/2h),$$

где $\sigma(H) = qH$, $\sigma(C) = C$. Для любого $\nu \in K$ фактор-алгебра $U_q(\nu) = U_q / U_q(C - \nu)$ изоморфна ОАВ степени 1 из примера 2 при $\lambda = q$, $\mu = 0$ (условие C) выполнено в том и только в том случае, когда q не является корнем из 1).

3. Общие свойства двусторонних идеалов из A. В дальнейшем идеал означает двусторонний идеал. Напомним, что кольцо $A = \oplus A_n$ является $\mathbb{Z}$-градуированным, где $A_n = Dv_n$, $n \in \mathbb{Z}$; подмодуль $M \subset A$ называется *однородным* (относительно градуировки), если $M = \oplus M_n$, где $M_n = M \cap A_n$ — n-я компонента. Решетка идеалов дедекиндового кольца является *дистрибутивной*, т. е. для любых идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$.

Теорема 2. *a) Любой идеал $\mathfrak{a}$ кольца A однороден и имеет не более двух образующих как A-бимодуль.*

b) Решетка идеалов кольца A является конечной (т. е. содержит конечное число элементов) и дистрибутивной.

c) Существует натуральное число N такое, что $l_D(A / \mathfrak{a}) < N$ для любого идеала $\mathfrak{a} \neq 0 \subset A$.

Доказательство. *a) Однородность.* Покажем, что

$$\sum_{U \in D} D\,(U - \sigma^n(U)) = D, \forall n \neq 0 \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Если это не так, то левая часть J из (1) содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{p}$ кольца D. В силу C) найдется $U \in \mathfrak{p}$ такой, что $\sigma^n(U) \notin \mathfrak{p}$, но $U - \sigma^n(U) \in J \subset \mathfrak{p}$, следовательно, $\sigma^n(U) \in \mathfrak{p}$ (противоречие).

Покажем, что любой D-модуль M из A однороден. Пусть $w = w_n + \ldots + w_m \in M$, $w_j \in A_j$, $n < \ldots < m$, докажем, что $w_j \in M$ для любого $j = n, \ldots, m$. В силу (1) существуют такие $\alpha_j, \beta_j \in D$, что

$$\sum_i a_i(\sigma^n(\beta_i) - \sigma^m(\beta_i)) = 1.$$

Отсюда

$$M \ni u := \sum_i \alpha_i(v\beta_i - \sigma^m(\beta_i)v) = U_n + \ldots + U_m,$$

причем $u_n = w_n$ и $u_m = 0$. Доказательство завершается применением индукции по $m - n$.

Таким образом, идеал $\mathfrak{a}$ кольца A однозначно характеризуется набором идеалов (компонент) из D $\{\mathfrak{a}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$:

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{a}_n v_n, \tag{2}$$

и для любых целых чисел $m \geq 0$ и $n \geq 0$

$$\mathfrak{a}_{\pm m} + \sigma^{\pm 1}(\mathfrak{a}_{\pm m}) \subset \mathfrak{a}_{\pm(m+1)}, \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{a}_n \sigma^n(a) + \sigma^{-1}(\mathfrak{a}_n)\, a \subset \mathfrak{a}_{n-1}, \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{a}_{-n}\sigma^{-n+1}(a) + \sigma(\mathfrak{a}_{-n})\sigma(a) \subset \mathfrak{a}_{-n+1}. \tag{3.3}$$

Верно и обратное утверждение.

b) Дистрибутивность следует из однородности идеалов и дедекиндовости D.

c) Покажем, что убывающая последовательность идеалов из D $\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots \supset \alpha_n := D(v_n v_{-n}, v_{-n} v_n) \supset \ldots$ стабилизируется. В силу условия C) существует натуральное m такое, что $D\sigma^i(a) + D\sigma^j(a) = D$, если $|i - j| \geq m$. Поскольку $v_n v_{-n} = \sigma(a)\ldots\sigma^n(a)$ и $v_{-n}v_n = \sigma^{-n+1}(a)\ldots a$, то $\alpha_m = \alpha_{m+1} = \ldots$ (последовательность стабилизируется на m-м шаге).

Положим $\alpha(A) := \bigcap_{i \geq 1} \alpha_i$ — ненулевой идеал в D и $l := l_D(D/\alpha(A)) < \infty$.

Пусть $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_n v_n$ — любой ненулевой идеал в A, тогда в силу (3.1) и C) почти все (за исключением конечного числа) компоненты $\mathfrak{a}_n = D$ и если $\mathfrak{a}_k \neq D$ (соответственно $\mathfrak{a}_{-k} \neq D$) для некоторого $k \geq 0$, то включение $\mathfrak{a}_k \subset \mathfrak{a}_{k+1}$ (соответственно $\mathfrak{a}_{-k} \subset \mathfrak{a}_{-k-1}$) строгое. Следовательно,

$$l_D(A/\mathfrak{a}) = \sum_n l_D(D/\mathfrak{a}_n) \leq l + 2\sum_1^{l-1} i = l_2 = \text{const}.$$

b) Конечность числа идеалов в A следует из (3.1) и включения $\mathfrak{a}_0 \supset \alpha(A)$.

a) 2-порождаемость. Как показано выше, для любого идеала $\mathfrak{a} \neq 0 \subset A$

существует натуральное число m такое, что $\mathfrak{a}_j = D$ для всех $|j| \geq m$. В дедекиндовом кольце любой идеал имеет не более двух образующих, пусть α_i и β_i — образующие $\mathfrak{a}_i$, $i = -m, \ldots, m$. Тогда, очевидно, $\alpha = \sum \alpha_i v_i$ и $\beta = \sum \beta_i v_i$ — образующие ${}_A\mathfrak{a}_A$. Теорема доказана.

4. Максимальные и первичные идеалы. Доказательство следующей леммы предоставляется читателю.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma = (\sigma^{-n}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}]$ *— конечная область эквивалентности в* $\mathrm{Max}\,(D)$ *(*$n > 0$, $\mathfrak{p}$ *— максимальный идеал),* L *— простой* A*-модуль с* D*-кручением и носителем* Γ, $\mathfrak{a} = \oplus \mathfrak{a}_i v_i$ *— аннулятор модуля* L*. Тогда:*

1) *Если* $i = 0, \ldots, n-1$, *то*

$$\mathfrak{a}_i = \prod_{-n+1+i}^{0} \sigma^j(\mathfrak{p}), \mathfrak{a}_{-i} = \prod_{-i}^{-n+1} \sigma^j(\mathfrak{p}).$$

В остальных случаях $\mathfrak{a}_k = D$;

2) $(A / \mathfrak{a}) \simeq nL$ и $A / \mathfrak{a} \simeq M_n(D / \mathfrak{p})$ *(изоморфизм колец)*. Следовательно, $\mathfrak{a}$ — *максимальный идеал*

Напомним, что идеал I кольца A называется первичным, если $I \neq A$, и в кольце A / I произведение двух ненулевых идеалов отлично от нуля.

Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *— собственный идеал в* A*. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $\mathfrak{a}$ *— первичный идеал;*

2) $\mathfrak{a}$ *— максимальный идеал;*

3) $\mathfrak{a}$ *— аннулятор простого* A*-модуля с* D*-кручением и конечным носителем.*

Доказательство. Следования (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны в силу предыдущей леммы.

(1) $\Rightarrow$ (3). Поскольку размерность Крулля кольца A равна 1, то существует цепочка левых идеалов $\mathfrak{a} = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_s = A$ таких, что $I_i = I_i / I_{i-1}$ — простой A-модуль с D-кручением и конечным носителем для любого $i = 1, \ldots, s$. Положим $\mathfrak{a}_i = \mathrm{ann}_A(I_i)$, тогда $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \subset \mathfrak{a}$. В силу первичности $\mathfrak{a} : \mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{a}$ для некоторого j, следовательно, в силу предыдущей леммы $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_j$. Предложение доказано.

Заметим, что любой собственный идеал кольца A содержит некоторое произведение максимальных идеалов, в каждом из которых исходный идеал содержится.

Следствие 1. *Пусть* A *— непростое кольцо,* $\mathrm{Max}\,(A)$ *— множество максимальных идеалов* A*. Тогда отображение*

$\hat{A}$ *(*D*-кручение, конечный носитель)* $\to \mathrm{Max}\,(A)$, $[L] \to \mathrm{ann}_A(L)$

является биекцией с обратным $\mathfrak{a} \to$ *[любой простой подмодуль в* $A / \mathfrak{a}$*].*

Следствие 2 ***(Критерий простоты кольца A).*** *Кольцо* A *простое тогда и только тогда, когда в* $\mathrm{Max}\,(D)$ *нет конечных областей эквивалентности, т. е. в* D *не существует различных максимальных идеалов* $\mathfrak{p}$ *и* $\mathfrak{q}$*, содержащих определяющий элемент* a*, таких, что* $\mathfrak{p} = \sigma^i(\mathfrak{q})$ *для некоторого* $i \in \mathbb{Z}$.

5. Функция μ. Для любого идеала $\mathfrak{n} \neq 0 \subset D$ символом $\mu(\mathfrak{n})$ обозначим множество максимальных идеалов кольца D, содержащих $\mathfrak{n}$. Очевидно,

$$\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m} \Rightarrow \mu(\mathfrak{n}) \supset \mu(\mathfrak{m}), \tag{4.1}$$

$$\mu(\mathfrak{n} + \mathfrak{m}) = \mu(\mathfrak{n}) \cap \mu(\mathfrak{m}), \tag{4.2}$$

$$\mu(\mathfrak{n}\mathfrak{m}) = \mu(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}) = \mu(\mathfrak{n}) \cup \mu(\mathfrak{m}). \tag{4.3}$$

Для любого собственного идеала $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_i v_i$ из A по определению положим $\mu(\mathfrak{a}) := \bigcup_i \mu(\mathfrak{a}_i)$. В действительности $\mu(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a}_0)$, так как $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_i$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2. *Функция* μ, *определенная на собственных идеалах кольца* A, *удовлетворяет* (4).

Доказательство. Покажем справедливость (4.3) для идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ из A, остальные свойства тривиальны. Очевидно, $\mu(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mu(\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_0) = \mu(\mathfrak{a}) \cup \mu(\mathfrak{b})$. Из включений $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0 \subset (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_0$ следует $\mu(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mu(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset$ $\subset \mu(\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0) = \mu(\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_0) = \mu((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_0) = \mu(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. Лемма доказана.

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{b}$ — *собственный идеал в* A. *Тогда*

$$\mu(\mathfrak{b}) = \mathrm{Supp}\,(A/\mathfrak{b}) = \cup\{\mu(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \text{ — максимальный идеал}\}. \tag{5}$$

Доказательство. Из очевидного изоморфизма D-модулей

$$A/\mathfrak{b} \simeq \bigoplus_{\mathbb{Z}} D/\mathfrak{b}_n$$

следует первое равенство из (5).

В силу (4.1) $\mu(\mathfrak{b})$ содержит объединение из (5). Обратное включение следует из (4.3) и того, что $\mathfrak{b}$ содержит некоторое произведение максимальных идеалов из A. Предложение доказано.

В дальнейшем нас будет интересовать, насколько свойства идеалов кольца A отличаются от „дедекиндовости". Оказывается, различие невелико. Хотя, вообще говоря, идеалы кольца A не коммутируют ($\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}\mathfrak{a}$) и не всякий идеал представляется в виде произведения максимальных, но все же удается описать класс колец, для которых это выполняется. В общем случае удается ввести „разумным образом" разложимость любого идеала в произведение коммутирующих взаимно простых идеалов. Последние при этом однозначно определены.

Введем некоторые определения.

6. Разложение идеала в виде произведения коммутирующих взаимно простых идеалов. Идеалы кольца A называются *взаимно простыми*, если их сумма равна A. Множество $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_s$, состоящее из конечных областей эквивалентности $\Gamma_i = (\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i]$, $i = 1, \ldots, s$, будем называть лакуной. Две непересекающиеся лакуны называются *соседними*, если их объединение является снова лакуной, в противном случае — *не соседними*. Любое множество E, состоящее из конечных областей эквивалентности (в частности, $\mu(\mathfrak{a})$ для любого собственного идеала $\mathfrak{a} \subset A$) однозначно представляется в виде объединения не соседних лакун, которые для краткости будем называть E-лакунами (соответственно $\mathfrak{a}$-лакунами). Это — все максимальные относительно включения лакуны из E. Совокупность E-лакун ($\mathfrak{a}$-лакун) обозначим $\Lambda(E)$ (соответственно $\Lambda(\mathfrak{a})$).

Лемма 3. *Пусть идеалы* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *кольца* A *такие, что любые две* $\mathfrak{a}$- *и* $\mathfrak{b}$-*лакуны не соседние. Тогда* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$ *и* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \sum \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i v_i$.

Доказательство. Из $\mu(\mathfrak{a}) \cap \mu(\mathfrak{b}) = \varnothing$ следует, что $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$ и $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} =$ $= \sum \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i v_i$. Так как любые $\mathfrak{a}$- и $\mathfrak{b}$-лакуны не являются соседними, то для любого целого k несложно убедиться, что

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_k = \sum_0^k \mathfrak{a}_i \sigma^i (\mathfrak{b}_{k-i}) = \mathfrak{a}_k \mathfrak{b}_k.$$

Следовательно, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — идеалы из A, каждые два из которых удовлетворяют условию предыдущей леммы, тогда

$$\bigcap_1^n \mathfrak{a}_i = \prod_1^n \mathfrak{a}_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \prod_1^n (\mathfrak{a}_j)_i v_i$$

(порядок сомножителей произвольный).

Пусть $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_i v_i$ — идеал из A. В силу дедекиндовости D для любого $i \in \mathbb{Z}$ имеем однозначно определенное разложение идеала $\mathfrak{a}_i$ кольца D

$$\mathfrak{a}_i = \prod \{\mathfrak{a}(\Lambda)_i \mid \Lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})\}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{a}(\Lambda)_i$ — (однозначно определенное) произведение максимальных идеалов (с соответствующими кратностями), принадлежащих $\mathfrak{a}$-лакуне Λ. Из (3) следует, что

$$\mathfrak{a}(\Lambda) := \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathfrak{a}(\Lambda)_i v_i \tag{7}$$

— двусторонний идеал в A, который будем называть *соответствующим* $\mathfrak{a}$-лакуне Λ. В силу предыдущей леммы

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\Lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})} \mathfrak{a}(\Lambda) = \prod_{\Lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})} \mathfrak{a}(\Lambda) \tag{8}$$

(порядок сомножителей произвольный). Непосредственно из (8) вытекает такое следствие.

Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *— идеалы в* A *такие, что для любых* $\mathfrak{a}$- *и* $\mathfrak{b}$-*лакун* Λ и M *соответственно выполняется следующее:*

если $\Lambda \cap M \neq \varnothing$, *то* $\Lambda = M$ *и* $\mathfrak{a}(\Lambda)\mathfrak{b}(\Lambda) = \mathfrak{b}(\Lambda)\mathfrak{a}(\Lambda)$;

если $\Lambda \cap M = \varnothing$, *то лакуны* Λ и M *не соседние.*

Тогда $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$.

Разложение (6) в некотором смысле максимально возможное (каноническое), справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть идеал* $\mathfrak{a}$ *из* A *равен произведению* $\mathfrak{a} = \prod_1^n \mathfrak{a}_i$ *взаимно простых коммутирующих идеалов, т. е.* $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$ *и* $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}_j \mathfrak{a}_i$ *для любых* $i \neq j$. *Тогда существует разбиение множества* $\mathfrak{a}$-*лакун* $\Lambda(\mathfrak{a}) = S_1 \amalg \ldots \amalg S_m$ *такое, что* $\mathfrak{a}_i = \prod \{\mathfrak{a}(\Lambda) \mid \Lambda \in S_i\}$ *для любого* $i = 1, \ldots, m$.

Верно и обратное утверждение.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Поскольку $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = A$, то $\mu(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a}_1) \cup \mu(\mathfrak{a}_2)$ — разбиение множества $\mu(\mathfrak{a})$, т. е. $\mu(\mathfrak{a}_1) \cap \mu(\mathfrak{a}_2) = \varnothing$.

Покажем, что любая $\mathfrak{a}$-лакуна принадлежит либо $\Lambda(\mathfrak{a}_1)$, либо $\Lambda(\mathfrak{a}_2)$. Пусть это не так для некоторой $\mathfrak{a}$-лакуны Λ. Для определенности будем считать, что наименьший (относительно естественного упорядочивания) элемент лакуны Λ принадлежит $\mu(\mathfrak{a}_1)$. Тогда $\Lambda = M_1 \cup N_1 \cup M_2 \cup N_2 \cup \ldots$ и $M_1 < N_1 < \ldots$, где M_i и N_j — $\mathfrak{a}_1$- и $\mathfrak{a}_2$-лакуны соответственно. Поскольку $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1$, то $\mathfrak{a}(\Lambda) = \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \ldots$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 \ldots$, $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_1(M_i)$, $\mathfrak{c}_j = \mathfrak{a}_2(N_j)$. В силу леммы 6 после очевидных вычислений имеем

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_1 = (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)_1 (\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2)_1 \ldots, \tag{9}$$

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{b})_1 = (\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1)_1 (\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_2)_1 \ldots. \tag{10}$$

Пусть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — наименьшие элементы, принадлежащие M_1 и N_1 соответственно. Поскольку множества $\mu(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)_1 = (M_1 \cup N_1)\setminus\{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$ и $\mu(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)_1 = (M_1 \cup N_1)\setminus\{\mathfrak{p}\}$ различны, то в силу (9), (10) $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \neq \mathfrak{c}\mathfrak{b}$ (противоречие). Теорема доказана.

7. Идемпотентные идеалы. Идеал, совпадающий со своим квадратом, называется *идемпотентным*.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{b}$ *— идеал из* A *такой, что* $\mu(\mathfrak{b}) = \Lambda$ *— лакуна. Тогда следующие утверждения равносильны:*

а) $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}$; *б)* $\mathfrak{b}$ *— наименьший из идеалов кольца* A *таких, что* $\mu(\mathfrak{b}) = \Lambda$.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Поскольку идеалов в A конечное число (теорема 2), то обозначим через J наименьший из идеалов таких, что $\mu(J) = \Lambda$. Очевидно, $J \subset \mathfrak{b}$. Пусть $A \to \overline{A} = A/J$, $u \to \overline{u}$,— эпиморфизм колец. Для каждой (конечной) области эквивалентности Γ_i из Λ, $i = 1, \ldots, s$, обозначим через $\mathfrak{a}_i$ максимальный идеал из A такой, что $\mu(\mathfrak{a}_i) = \Gamma_i$. Тогда в силу артиновости и нетеровости кольца $\overline{A}$ его радикал Джекобсона $\mathrm{rad}(\overline{A})$ нильпотентен и равен $\overline{\mathfrak{a}}$, где

$$\mathfrak{a} = \bigcap_1^s \mathfrak{a}_i.$$

Поскольку $\mu(\mathfrak{b}) = \Lambda$, то $J \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ и $\overline{\mathfrak{b}} \subset \mathrm{rad}(\overline{A})$, следовательно, $\overline{\mathfrak{b}} = 0$ в силу идемпотентности $\mathfrak{b}$. Тогда $\mathfrak{b} = J$.

б) $\Rightarrow$ а). Так как $\mu(\mathfrak{b}^2) = J$ и $\mathfrak{b}^2 \subset \mathfrak{b}$, то $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$ в силу минимальности $\mathfrak{b}$. Лемма доказана

Предложение 4. *Пусть* $\mathrm{Id}(A)$ *— совокупность собственных идемпотентных идеалов кольца* A, F *— множество конечных областей эквивалентности в* $\mathrm{Max}(D)/\sim$, $\hat{F}$ *— совокупность непустых подмножеств из* F. *Тогда отображение* $\mathrm{Id}(A) \to \hat{F}$, $\mathfrak{b} \to \mu(\mathfrak{b})$, *биективно, с обратным* $\Lambda \to \{$*наименьший идеал* $\mathfrak{a}$ *такой, что* $\mu(\mathfrak{a}) = \Lambda\}$. *Следовательно, в кольце* A *существует ровно* $2^n - 1$ *собственных идемпотентных идеалов, где* $n = |F| \leq \infty$ *— количество конечных областей эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{b} = \prod\{\mathfrak{b}(\Lambda) \mid \Lambda$ — $\mathfrak{b}$-лакуна$\} \in \mathrm{Id}(A)$ — разложение вида (6). В силу следствия 3 имеем $\Lambda(\mathfrak{b}^2) = \Lambda(\mathfrak{b})$ и $(\mathfrak{b}^2)(\Lambda) = (\mathfrak{b}(\Lambda))^2$ для любой $\mathfrak{b}$-лакуны Λ. Теперь предложение очевидно в силу предыдущей леммы. Предложение доказано.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *— собственный идеал из* A. *Тогда*

$$A/\mathfrak{a} \simeq \prod_{\Lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})} A/\mathfrak{a}(\Lambda) \quad (\textit{изоморфизм колец}).$$

Доказательство следует из (6).

A-модуль M имеет *полное D-кручение*, если $M = \operatorname{tor}(M)$. Аналогично предложение 3 для модуля M с полным D-кручением и конечным носителем имеем $\operatorname{Supp}(M) = \mu(\operatorname{ann}_A(M))$.

Предложение 5. *Пусть M_1 и M_2 — A-модули с полным D-кручением и конечными носителями E_1 и E_2 соответственно. Если любые две E_1- и E_2-лакуны не соседние, то $\operatorname{Ext}^1_A(M_1, M_2) = 0$, т. е. любая точная последовательность A-модулей $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ расщепляема.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}_i$ — аннулятор модуля M_i, $i = 1, 2$, тогда $E_i = \mu(\mathfrak{a}_i)$.Отсюда в силу леммы 3 вместо знаков включения в $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a} := \operatorname{ann}_A(M) \subset \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ везде можно поставить знак равенства. Используя предыдущую лемму, видим что M является $A/\mathfrak{a} \simeq A/\mathfrak{a}_1 \times A/\mathfrak{a}_2$-модулем. Следовательно, $M \simeq M_1 \oplus M_2$, т. е. последовательность расщепляема. Предложение доказано.

8. Классификация идеалов. В силу (6) – (8) и теоремы 3 каждый собственный идеал $\mathfrak{a}$ из A однозначно характеризуется набором взаимно простых коммутирующих идеалов $\{\mathfrak{a}(\Lambda) \mid \Lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})\}$, поэтому для описания идеалов из A достаточно классифицировать идеалы $\mathfrak{a}$, имеющие ровно одну $\mathfrak{a}$-лакуну.

Другими словами, в этом пункте будем полагать, что множество $\Lambda = \mu(\mathfrak{a})$ является лакуной.

Для определенности положим $\Lambda = \{\mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_m\} = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$, где $\Gamma_j = (q_{j-1}, q_j]$ — конечная область эквивалентности, ν_j — кратность вхождения q_j в разложение идеала Da на простые сомножители в D, $i = 0, \ldots, n$. В силу (3.1) для любого $i = 1, \ldots, m$

$$\mathfrak{a}_{i-1} = \mathfrak{p}_i^{t_{ii}} \ldots \mathfrak{p}_m^{t_{im}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}_{-i+1} = \mathfrak{p}_1^{t'_{i1}} \ldots \mathfrak{p}_{m-1+i}^{t'_{i,m-i+1}}$$

для некоторых целых $t_{ij} \geq 0$ и $t'_{ij} \geq 0$. Очевидно, идеал $\mathfrak{a}$ полностью определяется парой матриц размера $m \times m$, которые будем называть *матрицами параметров* идеала $\mathfrak{a}$. Причем $T(\mathfrak{a})$ и $T'(\mathfrak{a})$ — верхнетреугольные матрицы относительно главной и вспомогательной диагонали соответственно. Условия (3) налагают довольно сильные ограничения на матрицы параметров (очень много равных между собой элементов).

Для любого набора целых положительных чисел $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ символом $T(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ обозначим совокупность пар матриц размера $n \times n$ $(S' = (s'_{kl}), S = (s_{ij}))$ с целыми неотрицательными элементами таких, что:

1) S и S' — верхнетреугольные матрицы относительно главной и вспомогательной диагонали соответственно, имеющие одинаковые первые строки, т. е. $s_{1i} = s'_{1i}$ для любого $i = 1, \ldots, n$;

2) $s_{11} \leq \nu_0$ и $s_{1n} \leq \nu_n$;

3) для любых $i \leq j$

$$s_{ij} \leq s_{i-1,j-1} \leq s_{ij} + \nu_{j-1} \text{ и } s_{ij} \leq s_{i-1,j} \leq s_{ij} + \nu_{j+1}; \tag{11}$$

4) для всех (k, l), лежащих не ниже вспомогательной диагонали:

$$s'_{kl} \leq s'_{k-1,l+1} \leq s'_{kl} + \nu_l \text{ и } s'_{kl} \leq s'_{k-1,l} \leq s'_{kl} + \nu_{k-l}. \tag{12}$$

Определим функцию „принадлежности" r: $\{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$, если $\mathfrak{p}_i \in \Gamma_j$.

Теорема 4. *Пусть* $\Lambda = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$ *— лакуна,* $\Gamma_j = (q_{j-1}, q_j]$ *— конечная область эквивалентности,* ν_j *— кратность вхождения* q_j *в разложении* (a) *на максимальные идеалы в* D, $j = 0, \ldots, n$. *Обозначим через* $J(\Lambda)$ *совокупность идеалов* $\mathfrak{a}$ *в* $A: \mu(\mathfrak{a}) = \Lambda$. *Тогда отображение*

$$T(\nu_0, \ldots, \nu_n) \to J(\Lambda),\ (S', S) \to \{\textit{идеал с матрицами параметров } (T', T)\}$$

— биекция, где $t_{ij} = s_{1+r(j)-r(j-i+1),\, r(j)}$, $t'_{kl} = s'_{1+r(l+k-1)-r(l),\, r(l)}$.

Доказательство непосредственно следует из (3) и по существу является элементарным. Ввиду громоздкости записи подробности опускаем.

Таким образом, каждый собственный идеал $\mathfrak{a}$ однозначно характеризуется набором пар матриц из теоремы 4 $\{(S'(\Lambda), S(\Lambda) \mid \Lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})\}$, которые для простоты будем называть *характеристическими*.

Следствие 4. *В предположении теоремы* 4 *пусть* $\Lambda = \Gamma_1 = (q_0, q_1]$ *— конечная область эквивалентности,* $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_i v_i \in J(\Lambda)$ *— максимальный идеал. Тогда* $J(\Lambda) = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2, \ldots, \mathfrak{a}^d\}$, *где* $d = \min(\nu_0, \nu_1)$. *Более подробно, если* $\mathfrak{b}$ *— идеал в* A *и* $\mu(\mathfrak{b}) = \Lambda$, *то существует* $1 \le s \le d$: $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^s = \sum \mathfrak{a}_i^s v_i$.

Доказательство. Очевидно, $T(\nu_0, \nu_1) = \{(s, s) \mid 1 \le s \le d\}$, следовательно, $J(\Lambda)$ состоит ровно из d идеалов. Несложные вычисления показывают, что все идеалы $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{a}^d$ различны и $\mathfrak{a}^s = \sum \mathfrak{a}_i^s v_i$. Лемма доказана.

Зададим отображение ν: $\mathrm{Max}(A) \to \mathbb{Z}$, $\nu(\mathfrak{p})$ — кратность вхождения $\mathfrak{p}$ в разложении идеала (a) на простые в D. Для любой вырожденной орбиты $\mathfrak{O}$ положим $\Omega(\mathfrak{O}) := \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{O} \mid \mathfrak{p} \ni a\}$ — непустое множество. Орбиту $\mathfrak{O}$ будем называть *сильно вырожденной* и множество всех таких орбит обозначим через $\mathfrak{O}(A)$, если $|\Omega(\mathfrak{O})| \ge 2$. Каждой сильно вырожденной орбите $\mathfrak{O}$ такой, что $\Omega(\mathfrak{O}) = \{\mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_s\}$, сопоставим целочисленный вектор $\tau(\mathfrak{O}) := (\nu_1, \ldots, \nu_s)$, где $\nu_i = \nu(\mathfrak{p}_i)$, $i = 1, \ldots, s$, $s > 1$.

Следствие 5. *Пусть* A *и* A' — ОАВ *с определяющими параметрами* a *и* a' *соответственно. Если существует биекция* $\mathfrak{O}(A) \to \mathfrak{O}(A')$, $\mathfrak{O} \to \mathfrak{O}'$, *такая, что* $\tau(\mathfrak{O}) = \tau(\mathfrak{O}')$ *для всех* $\mathfrak{O} \in \mathfrak{O}(A)$, *то решетки идеалов* A *и* A' *изоморфны.*

Иными словами, это следствие показывает, что „геометрическое" изменение длин конечных областей эквивалентности никак не влияет на решетку двусторонних идеалов.

В дедекиндовом кольце всякий идеал однозначно раскладывается в произведение простых (максимальных) идеалов, в A это, вообще говоря, не так. Следующая теорема показывает, когда такое разложение возможно.

Теорема 5. *Утверждения* 1–4 *равносильны.*

1. *Каждый собственный идеал кольца* A *представляется в виде произведения максимальных идеалов.*

2. *На любой вырожденной орбите* $\mathfrak{O}$ *находится не более двух максимальных идеалов, содержащих определяющий элемент* a, *т. е.* $|\Omega(\mathfrak{O})| \le 2$.

3. *Все идеалы в* A *коммутируют друг с другом* $(\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba})$.

4. *Для любых различных* M, $N \in \hat{A}$ *(D-кручение, конечный носитель):* $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ *(вообще говоря,* $\mathrm{Ext}^1_A(M, M) \ne 0$).

В первом случае разложение в некотором смысле однозначно. Более подробно, пусть $\Gamma_1 = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1], \ldots, \Gamma_s = (\mathfrak{p}_s, \mathfrak{q}_s]$ *— конечные области эквивалентности (все лежат на разных орбитах),* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ *— максимальные идеалы такие, что* $\mu(\mathfrak{a}_i) = \Gamma_i$, $\nu_i = \min\ (\nu(\mathfrak{p}_i), \nu(\mathfrak{q}_i))$, $1 \le i \le s$. *Тогда любой ненулевой идеал* I *однозначно представляется в виде* $I = \mathfrak{a}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{a}_s^{n_s}$ *для некоторых* $0 \le n_i \le \nu_i$. *Число собственных идеалов кольца* A *равно* $\prod\limits_{1 \le i \le s} (\nu_i + 1) - 1$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $T_1 = \{\mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_n\}$ и $T_2 = \{\mathfrak{q}_1 < \ldots < \mathfrak{q}_m\}$ — соседние области эквивалентности $\sigma(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_i v_i$ и $\mathfrak{b} = \sum \mathfrak{b}_i v_i$ — максимальные идеалы такие, что $\mu(\mathfrak{a}) = T_1$ и $\mu(\mathfrak{b}) = T_2$. Проводя элементарные вычисления, получаем $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \sum \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i v_i$,

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_i = \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i, \ \ i > 0; \ \ \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_0, \ -n+1 \le i \le 0;$$

$$\mathfrak{b}_{i+n}, \ \ -n-m+1 \le i \le -n; \ \ D, \ \text{в остальных случаях;} \tag{13}$$

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{a})_i = \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i, \ \ i < 0; \ \ \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_0, \ \ 0 \le i \le n-1;$$

$$\mathfrak{b}_{i-n}, \ \ n \le i \le n+m-1; \ \ D, \ \text{в остальных случаях.} \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ строго содержит $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, тогда в силу леммы 2 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ не разлагается в произведение максимальных идеалов.

$2 \Rightarrow 3$. Следует из разложения (8) и следствий 3, 4.

$3 \Rightarrow 4$. Если $\mathrm{Ext}_A^1(M, N) \ne 0$, то в силу предложения 5 $T_1 = \mathrm{Supp}\,(M)$ и $T_2 = \mathrm{Supp}\,(N)$ — соседние области эквивалентности. Тогда ввиду (13), (14) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \ne \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ (противоречие).

$4 \Rightarrow 2$. Очевидно.

$2 \Rightarrow 1$. Следует из разложения (8) и следствий 3, 4.

Теорема доказана.

Предложение 6. *Пусть* L *— простой* A*-модуль с конечным носителем* $\mathrm{Supp}\,(L) = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$, $\nu = \min\,(\nu(\mathfrak{p}), \nu(\mathfrak{q}))$, $\mathfrak{a} = \mathrm{ann}_A(L)$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $\mathrm{Ext}_A^1(L, L) = 0$; 2) $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$; 3) $\nu = 1$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Поскольку $\mathrm{Ext}_A^1(L, L) = 0$, то в силу предложения 2 $A / \mathfrak{a}^2 \simeq mL$ — изоморфизм A-модулей для некоторого $m > 0$. Тогда $\mathfrak{a}^2 = \mathrm{ann}_A(A / \mathfrak{a}^2) = \mathrm{ann}_A(L) = \mathfrak{a}$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $0 \to L \to M \to N \to 0$ — точная последовательность A-модулей. Покажем, что она расщепляема. Очевидно, M — $A / \mathfrak{a}$-модуль. В силу предложения 2 $A / \mathfrak{a} \simeq nL$ — полупростой A-модуль ($n > 0$), следовательно, $M \simeq L \oplus L$.

$2 \Leftrightarrow 3$ в силу следствия 4. Предложение доказано.

Непосредственно из теоремы 5 и предложения 6 вытекает такое следствие.

Следствие 6. *Следующие утверждения равносильны.*

1. *Каждый ненулевой идеал кольца* A *(однозначно) разлагается в произведение различных максимальных идеалов.*

2. *На любой сильно вырожденной орбите* $\mathfrak{O}$ *находится ровно два максимальных идеала, содержащих* a *(т. е.* $|\Omega(\mathfrak{a})| = 2$*) и кратность вхождения одного из них в разложении* (a) *в произведение простых идеалов из* D *равна* 1.

3. *Все идеалы кольца A коммутируют друг с другом и любой идеал из A совпадает со своим квадратом.*

4. *Категория модулей $\hat{A}$ (D-кручение, конечный носитель) является полупростой, т. е.* $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ *для любых простых модулей с D-кручением и конечным носителем M, N.*

9. Представление идеала в виде пересечения взаимно простых идеалов. Пусть Λ — $\mathfrak{a}$-лакуна идеала $\mathfrak{a}$, состоящая из следующих конечных областей эквивалентности: $\Gamma_1 <\ldots< \Gamma_n$ и $(S'(\Lambda), S(\Lambda))$ — пара характеристических матриц идеала $\mathfrak{a}$ (размера $n \times n$). Число $1 < i \le n$ будем называть *особым*, если $s'_{2i} = s_{2i} = 0$. Множество особых чисел обозначим через $\theta(\mathfrak{a}, \Lambda) = \{i_1 <\ldots< i_k\}$. Тогда разбиение $[1, i_1) \cup [i_1, i_2) \cup\ldots\cup[i_k, n]$ множества $\{1,\ldots, n\}$ очевидным образом приводит, с одной стороны, к разложению Λ на лакуны $\Lambda_1 <\ldots< \Lambda_{k+1}$, с другой — к разбиению по столбцам пары $(S'(\Lambda), S(\Lambda))$ на подматрицы $(S'(\Lambda_\xi), S(\Lambda_\xi))$, $1 \le \xi \le k+1$. В силу теоремы 4 каждой такой подматрице соответствует идеал $\mathfrak{a}(\Lambda_\xi)$ кольца A с характеристической парой матриц, равной $(S'(\Lambda_\xi), S(\Lambda_\xi))$. Причем

$$\mathfrak{a}(\Lambda) = \bigcap_{1\le\xi\le k+1} \mathfrak{a}(\Lambda_\xi)$$

и $\mathfrak{a}(\Lambda_\xi) + \mathfrak{a}(\Lambda_\eta) = A$, если $\xi \ne \eta$. Обозначим через $\Pi(\mathfrak{a})$ совокупность множеств вида Λ_ξ для всех $\mathfrak{a}$-лакун Λ. Тогда в силу (8) идеал $\mathfrak{a}$ представляется в виде пересечения взаимно простых идеалов

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\Lambda_\xi\in\Pi(\mathfrak{a})} \mathfrak{a}(\Lambda_\xi) \tag{15}$$

и $\mathfrak{a}(\Lambda_\xi) + \mathfrak{a}(\Lambda_\eta) = A$, если $\Lambda_\xi \ne \Lambda_\eta$.

Следующая теорема является непосредственным следствием определения особых точек и теоремы 4 и показывает, что представление (15) является в некотором смысле минимальным и однозначно определенным.

Теорема 6. *Пусть идеал $\mathfrak{a}$ равен пересечению взаимно простых идеалов $\mathfrak{a} = \bigcap_1^s \mathfrak{a}_\nu$, т. е. $\mathfrak{a}_\nu + \mathfrak{a}_\eta = A$, если $\nu \ne \eta$. Тогда существует разбиение множества $\Pi(\mathfrak{a}) = \bigcup_1^s \Pi_\nu$ $(\Pi_\nu \cap \Pi_\eta = \varnothing, \nu \ne \eta)$ такое, что для любого ν: $\mathfrak{a}_\nu = \bigcap_{\Lambda_\xi\in\Pi_\nu} \mathfrak{a}(\Lambda_\xi)$.*

1. *Бавула В. В.* Обобщенные алгебры Вейля и их представления: Дис. ... канд. физ. мат. наук.– Киев, 1990. – 111 с.
2. *Бавула В. В.* Конечномерность Ext-в, Tor-в простых модулей над одним классом алгебр // Функцион. анализ и его прил. – 1991.– **25**, вып. 3. – С. 80 – 82.
3. *Бавула В. В.* Обобщенные алгебры Вейля и их представления // Алгебра и анализ – 1992. – **4**, вып. 1. – С. 74–95.
4. *Бавула В. В.* Простые $D[X, Y;\sigma, a]$-модули. // Укр. мат. журн. – 1992. – **43**, №12. – С. 1628–1644.
5. *Смирнов Е. К.* Об одной алгебре, порожденной квадратичными соотношениями // Успехи мат. наук. – 1985:– **40**, вып. 2. – С. 7214–7220.
6. *Ваксман Л. Л., Сойбельман Я. С.* Алгебра функций на квантовой группе SU (2) // Функцион. анализ и его прил. – 1988. – **22**, вып. 3. – С. 1–14.
7. *Островский В. Л.* Представление одного семейства квадратичных алгебр с тремя образующими // Применение методов функцион. анализа в мат. физике. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 94–103.

Получено 29. 07. 91