УДК 517.9

В. П. Кушнір (Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, Рівне)

АБСОЛЮТНА АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМИ

We establish necessary and sufficient conditions of the absolute asymptotic stability of solutions of linear parabolic differential equations with delays.

Установлены необходимые и достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости решений линейных параболических дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Стійкість розв'язків звичайних диференціальних рівнянь із загаюваннями вивчено достатньо добре (див., наприклад, [1, 2]).

Нульовий розв'язок диференціального рівняння із загаюваннями називають абсолютно експоненціально (асимптотично) стійким, якщо він експоненціально (асимптотично) стійкій при будь-яких сталих невід'ємних загаюваннях (див., наприклад, [1]).

Абсолютну стійкість диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$x^{(n)}(t)+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^{(k)}(t)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_{kj}x^{(k)}(t-\tau_j)=0, \tag{1}$$

де a_k, $k=\overline{1,n-1}$, b_{kj}, $k=\overline{0,n}$, $j=\overline{1,m}$, — сталі коефіцієнти, τ_j, $j=\overline{1,m}$, — довільні невід'ємні числа, досліджували Л. А. Животовський [3], Ю. М. Рєпін [4], Д. Г. Коренівський [5, 6], В. Ю. Слюсарчук [7 – 9].

У роботі В. Ю. Слюсарчука [7] було покращено теорему Животовського, а саме, отримано наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай виконується умова*

$$\sum_{j=1}^{m}\left|b_{kj}\right|<1.$$

Тоді для того щоб нульовий розв'язок рівняння (1) *був абсолютно експоненціально стійким, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*:

1) $\{z\colon P(z)=0\}\subset\{\lambda\colon \Re e\lambda<0\}$;
2) $\sum_{j=1}^{m}\left|Q_j(iy)\right|<P(iy)$ *для всіх* $y>0$;
3) $\sum_{j=1}^{m}b_{0j}\neq -a_0$.

Тут $P(z)=z^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k$, $Q_j(z)=\sum_{k=0}^{n}b_{kj}z^k$, $j=\overline{1,m}$, *а* $\Phi(z)=P(z)+\sum_{j=1}^{m}Q_j(z)e^{-\tau_jz}$ *— характеристичний квазіполіном, що відповідає рівнянню* (1).

Аналогічне питання для рівнянь з частинними похідними вивчено значно менше.

Розглянемо мішану задачу для рівняння теплопровідності із загаюваннями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{m}b_k\frac{\partial^2u(x,t-\tau_k)}{\partial x^2}, \qquad t>0, \quad x\in(0,\pi),\\
u(x,t) &= \varphi(x,t), \quad (x,t)\in[0,\pi]\times[-T,0], \\
u(0,t) &= u(\pi,t)=0, \quad t\geq -T,
\end{aligned} \tag{2}$$

де $\tau_k \geq 0$, $k = \overline{1, m}$, $T = \max\limits_{1 \leq k \leq m} \tau_k$, b_k, $k = \overline{1, m}$, — сталі коефіцієнти.

Нехай $\varphi(x, t) \in C([0, \pi] \times [-T, 0]) \cap C^{(2,0)}((0, \pi) \times (-T, 0])$ і виконується умова узгодження $\varphi(0, t) = \varphi(\pi, t) = 0$, $t \in [-T, 0]$. Класичним розв'язком цієї задачі назвемо функцію $u(x, t) \in C([0, \pi] \times [0, +\infty)) \cap C^{(2,1)}((0, \pi) \times (0, +\infty))$, яка задовольняє (2). (Позначення просторів див., наприклад, у [10].)

У статтях [11, 12] наведено необхідні і достатні умови стабілізації розв'язків задачі (2), а саме, отримано оцінку розв'язку цієї задачі через початкову функцію та її похідну по x або по t при будь-яких загаюваннях.

Метою даної статті є встановлення необхідних і достатніх умов абсолютної асимптотичної стійкості нульового розв'язку задачі (2).

У статті [12] наведено умови існування розв'язку задачі (2), доведено його єдиність і показано, що його можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx, \tag{3}$$

де $T_n(t)$ — розв'язки звичайних диференціальних рівнянь із загаюваннями

$$T_n'(t) + n^2 a T_n(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k n^2 T_n(t - \tau_k) = 0, \qquad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

які задовольняють початкові умови

$$T_n(t) = \psi_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x, t) \sin nx \, dx, \quad t \in [-T, 0].$$

Рівнянням (4) відповідають характеристичні квазіполіноми

$$h_n(s) = s + n^2 a + \sum_{k=1}^{m} b_k n^2 \exp\{-\tau_k s\}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Зауважимо, що згідно з теоремою 1 нульовий розв'язок кожного з рівнянь (4) є абсолютно експоненціально стійким тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$$a > 0, \quad \sum_{k=1}^{m} |b_k| \leq a, \quad \sum_{k=1}^{m} b_k \neq -a. \tag{5}$$

Крім того, у статті автора [11] доведено, що якщо виконуються умови

$$a > 0, \quad \sum_{k=1}^{m} |b_k| < a, \tag{6}$$

то для будь-яких $\tau_k \geq 0$, $1 \leq k \leq m$, існують додатні сталі ε, β, γ такі, що для будь-якої функції $\varphi(x, t)$, неперервної на $[0, \pi] \times [-T, 0]$ разом із своїми частинними похідними $\varphi_x'(x, t)$, $\varphi_{xx}''(x, t)$, для розв'язку задачі (2) справджується оцінка

$$\|u(x, t)\| < e^{-\varepsilon t}\left(\beta \|\varphi(x, 0)\| + \gamma \max_{\theta \in [-T, 0]} \left\|\varphi_x'(x, \theta)\right\|\right), \quad t \geq 0,$$

де $\|u(x, t)\| = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u^2(x, t) \, dx}$.

Далі вважатимемо, що існує $\varphi_{x^3}'''(x, t)$ при кожному $t \in [-T; 0]$ і

$$\max_{t\in[-T,0]}\left\|\varphi'''_{x^3}(x,t)\right\| < \infty. \tag{7}$$

Доведемо теорему про абсолютну асимптотичну стійкість нульового розв'язку задачі (2).

Теорема 2. *Нульовий розв'язок задачі* (2) *абсолютно асимптотично стійкий тоді і тільки тоді, коли виконуються умови* (5).

Доведення. Необхідність. Згідно із зауваженням перед теоремою, рівняння (4) є абсолютно експоненціально стійкими тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (5).

Припустимо, що умови (5) не виконуються. Це означає, що для всіх $n \ge 1$ існують загаювання $\tau_k \ge 0$, $1 \le k \le m$, і корені відповідних характеристичних квазіполіномів $h_n(s)$ — числа $s_n = p_n + iq_n \in C$, $p_n \ge 0$, $q_n \in R$. Тоді функції $T_n(t) = e^{p_n t}\cos(q_n t)$ задовольняють рівняння (4) та початкові умови $\psi_n(t) = e^{p_n t}\cos(q_n t)$, $t \in [-T, 0]$, а функції $u_n(x,t) = e^{p_n t}\cos(q_n t)\sin nx$, $t \in [-T, +\infty)$, $x \in [0,\pi]$, є розв'язками задачі (1) з початковою функцією $\varphi(x,t) = e^{p_n t}\cos(q_n t)\sin nx$, $t \in [-T, 0]$, $x \in [0,\pi]$. Але $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u_n(x,t)\| = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{p_n t} \times \cos(q_n t) \ne 0$.

Необхідність доведено.

Достатність. Якщо виконуються умови (6), то, згідно із зауваженням перед теоремою, очевидно, має місце рівність $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(x,t)\| = 0$.

Залишилося розглянути випадок, коли виконуються умови

$$a > 0, \qquad \sum_{k=1}^{m}|b_k| = a, \qquad \sum_{k=1}^{m} b_k \ne -a. \tag{8}$$

Виберемо $\varepsilon_n > 0$, $n \ge 1$, — розв'язки рівнянь

$$\left(n^2 e^{\varepsilon_n T} a\right)^2 - \left(an^2 - \varepsilon_n\right)^2 = \left(\frac{\pi}{4T}\right)^2. \tag{9}$$

Очевидно, що

$$\varepsilon_n = O(1/n^4), \quad n \to \infty, \tag{10}$$

отже, існує таке $n_1 \ge 1$, що для всіх $n > n_1$ виконується $\varepsilon_n < a$.

Доведемо, що для будь-яких загаювань $\tau_k \ge 0$, $1 \le k \le m$, і для всіх достатньо великих n виконується

$$\{s\colon h_n(s) = 0\} \subset \{\lambda\colon \Re e\lambda < -\varepsilon_n\}. \tag{11}$$

Нехай $n > n_1$. Позначимо через $\Gamma(R, \varepsilon_n)$ замкнутий контур у площині комплексних чисел, що складається з прямої і правого півкола, які сполучають точки $-\varepsilon_n - iR$ та $-\varepsilon_n + iR$.

Замість $h_n(s)$ розглядатимемо функції

$$\frac{h_n(s)}{s + an^2} = 1 - \frac{-b_k n^2 e^{-\tau_k s}}{s + an^2},$$

нулі яких збігаються з нулями квазіполіномів $h_n(s)$ при $\Re es \ge -\varepsilon_n$, $n > n_1$.

Позначимо

$$w_{nk}(s) = -\frac{b_k n^2 e^{-\tau_k s}}{s + an^2}, \quad 1 \le k \le m.$$

Граничне положення при $R \to \infty$ образу контура $\Gamma(R, \varepsilon_n)$ при відображенні $U_n(s) = \sum_{k=1}^{m} w_{nk}(s)$ назвемо амплітудно-фазовою характеристикою.

Нулям функції $h_n(s)$ відповідають точки, в яких $U_n(s) = 1$. Тому за принципом аргументу [1] кількість нулів $h_n(s)$ дорівнює кількості обходів амплітудно-фазовою характеристикою точки $z = 1$.

При відображенні $w_{nk}(s)$ образ півкола, що входить до складу контура $\Gamma(R, \varepsilon_n)$, при $R \to \infty$ стягується в точку $z = 0$, і тому потрібно будувати тільки образ прямої $\Re es = -\varepsilon_n$.

Спочатку знайдемо граничні характеристики, які є образами прямої $\Re es = -\varepsilon_n$ при відображеннях

$$v_{nk}(s) = -\frac{b_k n^2 e^{\tau_k \varepsilon_n}}{s + an^2}, \quad 1 \le k \le m.$$

Це будуть кола K_{nk} з рівнянням

$$|z + r_{nk}| = r_{nk},$$

де

$$r_{nk} = \frac{b_k n^2 e^{\tau_k \varepsilon_n}}{2\left(an^2 - \varepsilon_n\right)}.$$

З умов теореми випливає, що існують $b_k > 0$, а кола, які їм відповідають, лежать у лівій півплощині.

Не обмежуючи загальності можна вважати, що $b_1 > 0$.

Знаючи граничні характеристики, достатньо врахувати вплив множників $e^{-iy\tau_k}$, які повертають без зміни модуля радіуси-вектори точок граничних характеристик, що відповідають значенню y, на кут $-y\tau_k$, тому що

$$w_{nk}(-\varepsilon_n + iy) = v_{nk}(-\varepsilon_n + iy)e^{-iy\tau_k}.$$

При кожному значенні y точки $v_{nk}(-\varepsilon_n + iy)$ лежать на двох прямих, що проходять через точку $z = 0$ під деякими кутами $\pm\alpha(n, y)$, що не залежать від k.

Позначимо через y_n значення y, при якому

$$\sum_{k=1}^{m} |v_{nk}(-\varepsilon_n + iy)| = 1,$$

і α_n — додатний кут, який відповідає y_n. Тоді маємо

$$\sum_{k=1}^{m} |v_{nk}(-\varepsilon_n + iy)| = \frac{n^2 \sum_{k=1}^{m} |b_k| e^{\tau_k \varepsilon_n} \cos\alpha_n}{an^2 - \varepsilon_n} = \frac{n^2 \sum_{k=1}^{m} |b_k| e^{\tau_k \varepsilon_n}}{\sqrt{(an^2 - \varepsilon_n)^2 + y_n^2}} = 1. \quad (12)$$

Амплітудно-фазова характеристика може обійти точку $z = 1$ тільки при $|y| < y_n$.

Із (12), (9) отримуємо

$$y_n^2 \le (n^2 e^{\varepsilon_n T} a)^2 - (an^2 - \varepsilon_n)^2 = \left(\frac{\pi}{4T}\right)^2, \quad (13)$$

а також $\alpha_n = O(1/n^2)$ при $n \to \infty$. Звідси випливає, що існує таке $n_2 \ge n_1$, що

$$\alpha_n < \pi/8, \quad n > n_2. \quad (14)$$

Із (13), (14) випливає, що точки $w_{n1}(-\varepsilon_n + iy)$ при $|y| < y_n$ не перейдуть у праву півплощину.

Оцінимо інші доданки суми $U_n(-\varepsilon_n + iy)$.

Із (10) дістаємо, що існує таке $n_0 \geq n_2$, що для всіх $n \geq n_0$

$$\sum_{k=2}^{m} |b_k| e^{T\varepsilon_n} < a - \varepsilon_n / n^2. \tag{15}$$

Тоді $U_n(-\varepsilon_n + iy)$ при $|y| < y_n$ лежатиме лівіше точки $z = 1$, і амплітудно-фазова характеристика жодного разу не обійде цю точку, тобто для будь-яких $\tau_k \geq 0$, $1 \leq k \leq m$, і для всіх $n \geq n_0$ виконується (11).

Оцінимо інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{|h_n(-\varepsilon_n + iy)|^2}.$$

Якщо $0 \leq y < \pi/(2T) - \alpha_n/T$, то для всіх $n \geq n_0$, враховуючи (15), маємо

$$|h_n(-\varepsilon_n + iy)| \geq \left| an^2 - \varepsilon_n + iy + b_1 n^2 e^{\tau_1(\varepsilon_n - iy)} \right| - \left| \sum_{k=2}^{m} b_k n^2 e^{\tau_k(\varepsilon_n - iy)} \right| \geq$$

$$\geq n^2 \left(a - \frac{\varepsilon_n}{n^2} - \sum_{k=2}^{m} |b_k| e^{T\varepsilon_n} \right) > 0.$$

Отже,

$$\int_0^{\frac{\pi - 2\alpha_n}{2T}} \frac{dy}{|h_n(-\varepsilon_n + iy)|^2} = O\left(1/n^4\right), \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Якщо $y \geq \pi/(2T) - \alpha_n/T > \pi/(4T)$ (згідно з (14)), то, використавши (9), дістанемо

$$|h_n(-\varepsilon_n + iy)| \geq \left| an^2 - \varepsilon_n + iy \right| - \sum_{k=1}^{m} \left| b_k n^2 e^{\tau_k \varepsilon_n} e^{-\tau_k iy} \right| \geq$$

$$\geq \sqrt{(an^2 - \varepsilon_n)^2 + y^2} - \sqrt{(an^2 - \varepsilon_n)^2 + \left(\frac{\pi}{4T}\right)^2} \geq \frac{y^2 - (\pi/(4T))^2}{2\sqrt{(an^2 - \varepsilon_n)^2 + y^2}}. \tag{17}$$

Підставивши нерівність (17) в інтеграл

$$\int_{\frac{\pi - 2\alpha_n}{2T}}^{+\infty} \frac{dy}{|h_n(-\varepsilon_n + iy)|^2},$$

отримаємо

$$\int_{\frac{\pi - 2\alpha_n}{2T}}^{+\infty} \frac{dy}{|h_n(-\varepsilon_n + iy)|^2} \leq \int_{\frac{\pi - 2\alpha_n}{2T}}^{+\infty} \frac{4\left((an^2 - \varepsilon_n)^2 + y^2\right)}{\left(y^2 - (\pi/(4T))^2\right)^2} dy =$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi - 2\alpha_n}{2T}}^{+\infty} \frac{\left(an^2 - \varepsilon_n\right)^2 + y^2 - (\pi/(4T))^2 + (\pi/(4T))^2}{\left(y^2 - (\pi/(4T))^2\right)^2} dy =$$

$$= 4 \int\limits_{\frac{\pi - 2\alpha_n}{2T}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 - (\pi/(4T))^2} + 4\left((an^2 - \varepsilon_n)^2 + \left(\frac{\pi}{4T}\right)^2\right) \int\limits_{\frac{\pi - 2\alpha_n}{2T}}^{+\infty} \frac{dy}{\left(y^2 - (\pi/(4T))^2\right)^2}.$$

Перший з інтегралів останньої рівності асимптотично дорівнює $\frac{2T}{\pi}\ln 3$, а другий — $\frac{2T}{\pi}\left(\frac{4}{3} - \ln 3\right)$ при $n \to \infty$.

Врахувавши (9), (10), (16), одержимо

$$J_n = O\left(n^4\right), \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Використавши (18), як у статті [11], оцінимо $|T_n(t)|$.

Оскільки $\varphi(x, t)$ неперервна на $[0, \pi] \times [-T, 0]$, то її коефіцієнти Фур'є $\psi_n(t)$ також неперервні на $[-T, 0]$. Тоді для ε_n і n_0, вибраних раніше, при всіх $n > n_0$ корені характеристичних квазіполіномів $h_n(s)$ лежать на комплексній площині зліва від прямої $\Re e s = -\varepsilon_n$.

Використаємо теорему про розв'язки звичайних диференціальних рівнянь із загаюваннями, подану у [2] для рівнянь (4) при $n > n_0$:

$$T_n(t) = \int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{ts}}{h_n(s)} \left(\psi_n(0) e^{-Ts} - n^2 \sum_{k=1}^{m} b_k e^{-\tau_k \varepsilon_n} \int\limits_{-\tau_k}^{0} \psi_n(\theta) e^{-\theta s} d\theta\right) ds, \quad t > 0. \tag{19}$$

$\left(\text{Тут і далі } \int_{(\varepsilon)} F(s)\,ds \overset{\text{df}}{=} \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - iT}^{\varepsilon + iT} F(s)\,ds.\right)$

Розглянемо інтеграл від першого доданка у (19):

$$\int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{(t-T)s}}{h_n(s)} ds = \int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{(t-T)s}(s + an^2)}{h_n(s) + (s + an^2)} ds =$$

$$= \int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{(t-T)s}(s - n^2 \sum_{k=1}^{m} b_k n^2 e^{-\tau_k s})}{h_n(s)(s + an^2)} ds =$$

$$= \int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{(t-T)s}}{(s + an^2)} ds - n^2 \sum_{k=1}^{m} b_k \int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{(t-T-\tau_k)s}}{h_n(s)(s + an^2)} ds =$$

$$= e^{-an^2(t-T)} - n^2 \sum_{k=1}^{m} b_k \int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{(t-T-\tau_k)s}}{h_n(s)(s + an^2)} ds. \tag{20}$$

Підставивши (20) в (19), одержимо

$$T_n(t) = \psi_n(0) e^{-an^2(t-T)} -$$

$$- n^2 \sum_{k=1}^{m} b_k \int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{(t-T-\tau_k)s}}{h_n(s)} \left(\frac{\psi_n(0)}{s + an^2} + \int\limits_{-\tau_k}^{0} \psi_n(\theta) e^{(T-\theta)s} d\theta\right) ds. \tag{21}$$

Оцінимо доданки суми в (21):

$$\left| \int\limits_{(-\varepsilon_n)} \frac{e^{(t-T-\tau_k)s}}{h_n(s)} \left(\frac{\psi_n(0)}{s + an^2} + \int\limits_{-\tau_k}^{0} \psi_n(\theta) e^{(T-\theta)s} d\theta\right) ds \right| \le$$

$$\le \frac{e^{-\varepsilon_n(t-T-\tau_k)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|h_n(-\varepsilon_n+iy)|} \times$$

$$\times \left(\frac{|\psi_n(0)|}{\left|-\varepsilon_n + an^2 + iy\right|} + \left| \int_{-\tau_k}^{0} \psi_n(\theta) e^{-\varepsilon_n(T-\theta)} e^{-iy(T-\theta)}\, d\theta \right| \right) dy \le$$

$$\le \frac{e^{-\varepsilon_n(t-T-\tau_k)}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|h_n(-\varepsilon_n+iy)|^2} \right)^{1/2} \left(\left(\psi_n^2(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(an^2-\varepsilon_n)^2 + y^2} \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\tau_k}^{0} \psi_n(\theta) e^{-\varepsilon_n(T-\theta)} e^{-iy(T-\theta)}\, d\theta \right|^2 dy \right)^{1/2} \right) =$$

$$= \frac{e^{-\varepsilon_n(t-T-\tau_k)}}{2\pi} \left(2 \int_{0}^{+\infty} \frac{dy}{|h_n(-\varepsilon_n+iy)|^2} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\left(\frac{\psi_n^2(0)\pi}{an^2 - \varepsilon_n} \right)^{1/2} + \left(2\pi \int_{-\tau_k}^{0} \psi_n^2(\theta) e^{-2\varepsilon_n(T-\theta)}\, d\theta \right)^{1/2} \right). \qquad (22)$$

(Було використано теорему Планшереля – Парсеваля.)

Із (21), (22), (18) випливає існування такого $B > 0$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність

$$|T_n(t)| \le Bn^3 e^{-\varepsilon_n t} \left(\int_{-T}^{0} \psi_n^2(\theta)\, d\theta \right)^{1/2}. \qquad (23)$$

Згідно з умовою (8) при всіх $\theta \in [-T; 0]$ ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} n^6 \psi_n^2(\theta)$ збігається. Тоді з (23) випливає, що при всіх $t > 0$ ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} T_n^2(t)$ мажорується збіжним рядом $\sum_{n=n_0}^{\infty} TB^2 n^6 \psi_n^2(\theta)$.

Таким чином, ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} T_n^2(t)$ збігається рівномірно, і з (23) дістаємо

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} T_n^2(t) \le B^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} e^{-2\varepsilon_n t} \int_{-T}^{0} n^6 \psi_n^2(\theta)\, d\theta = 0. \qquad (24)$$

Згідно із зауваженням 1 нульові розв’язки рівнянь (4) абсолютно експоненціально стійкі і для кожного з них існує таке $\delta_n > 0$, що

$$\{s\colon h_n(s) = 0\} \subset \{\lambda\colon \Re e\lambda < -\delta_n\}.$$

Тоді, згідно з [2], існують такі $M_n > 0$, що

$$|T_n(t)| \le M_n e^{-\delta_n t}, \quad t > 0.$$

Отже, врахувавши (24), дістанемо

$$\|u(x,t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(t) \le \sum_{n=1}^{n_0-1} M_n^2 e^{-2\delta_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} T_n^2(t) \to +\infty, \quad t \to +\infty.$$

Теорему доведено.

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
2. *Белман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
3. *Животовский Л. А.* Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Тр. сем. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1969. – № 7. – С. 219 – 292.
4. *Репин Ю. М.* Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях // Уч. зап. Урал. ун-та. – 1960. – **23**. – С. 31 – 34.
5. *Коренівський Д. Г.* Про деякі ознаки стійкості лінійних стаціонарних систем із запізненням // Доп. АН УРСР. – 1966. – № 6. – С. 708 – 710.
6. *Кореневский Д. Г.* Алгебраические коэффициентные критерии абсолютной (не зависящей от запаздывания) асимптотической устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с последействием // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1987. – Вып. 7. – С. 5 – 9.
7. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных скалярных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Проблемы современной теории периодических движений. – 1982. – № 6. – С.19 – 24.
8. *Слючарчук В. Е.* Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с несколькими запаздываниями // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 6. – С. 919 – 923.
9. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 12. – С. 17 – 19.
10. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
11. *Кушнір В. П.* Про стабілізацію розв'язків лінійних параболічних диференціальних рівнянь із загаюваннями // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1997. – Вип. 15. – С. 111 – 119.
12. *Кушнір В. П.* Абсолютна експоненціальна стійкість розв'язків лінійних параболічних диференціальних рівнянь із загаюваннями // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, № 2. – С. 170 – 178.

Одержано 23.03.06