УДК 517.95

**С. П. Лавренюк, М. О. Оліскевич** (Львів. нац. ун-т)

# МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

We obtain some conditions for the existence and uniqueness of a solution of mixed problem for the ultraparabolic equation

$$u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, y, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, y, t)u_{x_i} +$$

$$+ b_0(x, y, t, u) = f_0(x, y, t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x, y, t)$$

in a domain unbounded with respect to variables $x$.

Получены условия существования и единственности решения смешанной задачи для ультрапараболического уравнения

$$u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, y, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, y, t)u_{x_i} +$$

$$+ b_0(x, y, t, u) = f_0(x, y, t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x, y, t)$$

в неограниченной области по переменным $x$.

Ультрапараболічні рівняння, які іноді називають параболічними з багатьма часами або виродженими параболічними рівняннями, виникли як математична модель броунівського руху фізичної системи з $n$ ступенями вільності [1]. Такі рівняння виникають також при моделюванні марковських дифузійних процесів, розсіюванні електронів, у біології, у фінансовій математиці (див., наприклад, [2, 3]). Ці рівняння багаторазово узагальнювали і досліджували різні автори (див. бібліографію в [4]). Зазначимо, що найбільш повні результати для лінійних ультрапараболічних рівнянь одержали С. Д. Ейдельман, С. Д. Івасишен та їхні учні (див., наприклад, [4 – 7]). Окремі результати для нелінійних ультрапараболічних рівнянь в необмежених областях отримано в [8 – 13].

У цій праці в необмеженій області розглянуто мішану задачу для напівлінійного ультрапараболічного рівняння, яке, зокрема, містить невідому функцію зі степенем $p \in (1, 2]$. Гіперболічна частина цього рівняння містить перші похідні за групою $m + 1$, $m \geq 1$, незалежних змінних. За допомогою методу введення параметра, запропонованого у праці [14], доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку у класі зростаючих функцій.

Нехай $\Omega_x$ — необмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega_x \in C^1$; $\Omega_y$ — обмежена область в $\mathbb{R}^m$ з межею $\partial\Omega_y \in C^1$; $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$; $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times \times (0, \tau)$, $0 < \tau \leq T$; $\Omega_\tau = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$. В області $Q_T$ розглянемо рівняння

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+ b_0(x, y, t, u) = f_0(x, y, t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,y,t) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega. \tag{2}$$

Припускатимемо, що для рівняння (1) виконуються такі умови:

A) $a_i \in C(\overline{Q}_T)$, $a_{i,y_i} \in L^\infty(Q_T)$, $i \in \{1, \dots, m\}$; $a_{ij}$, $a_{ij,y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $i, j \in \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$;

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, y, t)\xi_i \xi_j \geq A_0 |\xi|^2, \qquad A_0 > 0,$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x, y, t) \in Q_T$;

B) $b_i$, $b_{i,y_j} \in L^\infty(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$; функція $b_0(\cdot, \cdot, \cdot, \eta)$ є вимірною в $Q_T$ для всіх $\eta \in \mathbb{R}$; функція $b_0(x, y, t, \cdot)$ — неперервною на $\mathbb{R}$ майже для всіх $(x, y, t) \in Q_T$;

$$(b_0(x, y, t, \eta_1) - b_0(x, y, t, \eta_2))(\eta_1 - \eta_2) \geq 0,$$

$$|b_0(x, y, t, \eta)| \leq B_0 |\eta|^{p-1},$$

$$\left| b_{0,y_j}(x, y, t, \eta) \right| \leq B_0 |\eta|^{p-1}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

$$\left| b_{0,\eta}(x, y, t, \eta) \right| \leq B_0$$

майже для всіх $(x, y, t) \in Q_T$ і для всіх $\eta \in \mathbb{R}$, де $B_0$ — додатна стала, $p \in \in (1, 2]$.

Для спрощення викладу припускатимемо, що $\Omega_x^R = \{x \in \Omega_x : |x| < R\}$ є регулярною в сенсі Кальдерона [15, с. 45] для всіх $R > R_0 > 0$.

Позначимо через $S_T^1$ множину тих точок поверхні $\Omega_x \times \partial\Omega_y \times (0, T)$, для яких виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) \cos(\nu, y_i) < 0,$$

де $\nu$ — зовнішня нормаль до $S_T$, а через $S_T^2$ множину точок поверхні $\Omega_x \times \times \partial\Omega_y \times (0, T)$, для яких

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) \cos(\nu, y_i) \geq 0.$$

Говоритимемо, що для рівняння (1) виконується умова S, якщо

$$S_T^1 = \Omega_x \times \Gamma_1 \times (0, T), \quad S_T^2 = \Omega_x \times \Gamma_1 \times (0, T), \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega_y, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing.$$

Крім початкової умови (2) задамо для рівняння (1) крайові умови вигляду

$$u|_{S_T^1} = 0, \qquad u|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0. \tag{3}$$

Введемо простори

$$L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{u : u \in L^2(\Omega^R) \ \forall R > R_0\},$$

де $\Omega^R = \Omega_x^R \times \Omega_y$;

$$L^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \left\{u : u, u_{x_i} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega), \ i \in \{1, \dots, n\}, \ u|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0\right\};$$

$$L^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u : u, u_{x_i}, u_{y_j} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,m\},$$

$$u\big|_{\Omega_x\times\Gamma_1} = 0,\ u\big|_{\partial\Omega_x\times\Omega_y} = 0 \Big\}.$$

Говоритимемо, що права частина (1) і початкова функція задовольняють умову F, якщо $f_i,\ f_{i,y_j} \in L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$; $u_0,\ u_{0,y_j} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$; $f_i\big|_{\Omega_x\times\Gamma_1\times(0,T)} = 0$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$; $u_0\big|_{\Omega_x\times\Gamma_1} = 0$.

**Означення 1.** *Функцію $u$ з простору $C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі* (1) – (3), *якщо вона є границею у цьому просторі послідовності функцій $\{u^k\}$ таких, що*

$$u^k \in C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \qquad \text{для всіх} \quad k \in \mathbb{N}$$

*і задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^k v\,dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[ -u^k v_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t) u^k_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,y,t) u^k_{x_i} v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t) u^k_{x_i} v + b_0(x,y,t,u^k) v \Bigg] dxdydt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} u^k_0 v\,dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[ f^k_0(x,y,t) v + \sum_{i=1}^{n} f^k_i(x,y,t) v_{x_i} \Bigg] dxdydt \tag{4}$$

*для всіх* $\tau \in (0,T]$ *і всіх* $v \in C^1([0,T]; C^2_0(\overline{\Omega}))$, *де* $u^k_0 \to u_0$ *у просторі* $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $f^k_i \to f_i$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, *у просторі* $L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, *причому* $u^k_0$, $f^k_i$ *задовольняють умову* F.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови* A, B, S *і, крім того,* $f_i \in L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $u_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$,

$$\int\limits_{\Omega^R} u_0^2(x,y)\,dxdy + \int\limits_{Q^R_\tau} \sum_{i=0}^{n} f_i^2(x,y,t)\,dxdydt \le a e^{bR^2} \tag{5}$$

*для довільного* $R > R_0 + 1$, *де* $a, b$ *— додатні сталі,* $Q^R_\tau = \Omega^R \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$.

*Тоді існує узагальнений розв'язок задачі* (1) – (3) *на деякому проміжку* $[0, t_0]$, $t_0 \in (0,T]$.

***Доведення.*** Нехай $k$ — довільне фіксоване натуральне число таке, що $R = R(k) = 2^k > R_0 + 1$, $q = \lambda 2^{2k}$, де $\lambda$ — деяке натуральне число. Розглянемо послідовності функцій $\{f_i^{(s)}\}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\{u_0^{(s)}\}$ такі, що елементи цих послідовностей задовольняють умову F і

$$f_i^{(s)} \to f_i \quad \text{у просторі} \quad L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})), \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

$$u_0^{(s)} \to u_0 \quad \text{у просторі} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$$

при $s \to \infty$. Тоді можна вказати таке число $s_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $s > s_0$

$$\int\limits_{Q_T^{R(k+3)}} \sum_{i=0}^{n} \left| f_i^{(s)} \right|^2 dxdydt + \int\limits_{\Omega^{R(k+3)}} \left| u_0^{(s)} \right|^2 dxdy \leq 2ae^{b[R(k+3)]^2}, \tag{6}$$

$$\int\limits_{Q_T^{R(k)}} \sum_{i=0}^{n} \left| f_i^{(s)} - f_i \right|^2 dxdydt + \int\limits_{\Omega^{R(k)}} \left| u_0^{(s)} - u_0 \right|^2 dxdy \leq e^{-q+b[R(k)]^2}. \tag{7}$$

Очевидно, $s_0$ залежить від $k$. Поставимо у відповідність кожному $k \in \mathbb{N}$ функції $f_i^k$, $u_0^k$ з відповідних послідовностей $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, для яких виконуються оцінки (6), (7).

В області $Q_T^R$ $(R = R(k))$ розглянемо рівняння

$$A(u) = f_0^{k,R}(x, y, t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}^{k,R}(x, y, t) \tag{8}$$

з початковою умовою

$$u(x, y, 0) = u_0^{k,R}(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega^R, \tag{9}$$

і крайовими умовами

$$u|_{S_T^1 \cap \{\Omega_x \times \partial\Omega_y \times (0,T)\}} = 0, \qquad u|_{\partial\Omega_x^R \times \Omega_y \times (0,T)} = 0, \tag{10}$$

де

$$f_0^{k,R}(x, y, t) = \begin{cases} f_0^k(x, y, t), & (x, y, t) \in Q_T^R, \\ 0, & (x, y, t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases}$$

$$f_i^{k,R}(x, y, t) = f_i(x, y, t)\chi_R(x), \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_0^{k,R}(x, y) = u_0^k(x, y)\chi_R(x),$$

$$\chi_R \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad \chi_R(x) = 1 \quad \text{при} \quad |x| \leq R - 1, \quad \chi_R(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq R,$$
$$0 \leq \chi_R(x) \leq 1 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Введемо простори

$$H_{0,\Gamma_1}^{1,1}(\Omega^R) = \Big\{ u : u, u_{x_i}, u_{y_j} \in L^2(\Omega^R), \ i \in \{1, \ldots, n\}, \ j \in \{1, \ldots, m\},$$
$$u|_{\partial\Omega_x^R \times \Omega_y} = 0, \ u|_{\Omega_x^R \times \Gamma_1} = 0 \Big\},$$

$$H_0^{1,0}(\Omega^R) = \Big\{ u : u, u_{x_i} \in L^2(\Omega^R), \ i \in \{1, \ldots, n\}, \ u|_{\partial\Omega_x^R \times \Omega_y} = 0 \Big\}.$$

У [13] доведено, що при виконанні умов A, B, S, F існує функція

$$u^k = C([0, T]; L^2(\Omega^R)) \cap L^2((0, T); H_{0,\Gamma_1}^{1,1}(\Omega^R)),$$

яка задовольняє рівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} u^k v \, dxdy + \int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[ -u^k v_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) u_{y_i}^k v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, y, t) u_{x_i}^k v_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x, y, t) u_{x_i}^k v + b_0(x, y, t, u^k) v \Bigg] dxdydt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} u_0^{k,R} v\, dxdy + \int\limits_{Q_\tau^R} \left[ f_0^{k,R}(x,y,t)v + \sum_{i=1}^{n} f_i^{k,R}(x,y,t) v_{x_i} \right] dxdydt \tag{11}$$

для всіх $\tau \in (0, T]$ і всіх $v \in L^2((0,T); H_0^{1,0}(\Omega^R))$ таких, що $v_t \in L^2(\Omega_T^R)$, де $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$.

Крім того, правильною є формула інтегрування частинами

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle u_t^k, u^k \rangle_R \, dt = \int\limits_{\Omega_{t_2}^R} \left| u^k \right|^2 dxdy - \int\limits_{\Omega_{t_1}^R} \left| u^k \right|^2 dxdy \tag{12}$$

для всіх $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ позначає значення функціонала з простору $L^2((0,T); (H_{0,\Gamma_1}^{1,1}(\Omega^R)^*))$ на елементах із простору $L^2((0,T); H_{0,\Gamma_1}^{1,1}(\Omega^R))$.

Так побудовані функції $u^k$ для $k \ge k_0 \ge \log_2(R_0 + 1)$ продовжимо нулем на область $Q_t \setminus Q_T^R$ і збережемо за ними ті самі позначення. Тоді одержимо послідовність функцій $\{u^k\}_{k=k_0}^{\infty}$.

Нехай $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\Phi(\eta) = 1$ при $\eta \le 0$, $\Phi(\eta) = 0$ при $\eta \ge 1$ і $0 \le \Phi(\eta) \le$ $\le 1$ при $\eta \in \mathbb{R}$.

Введемо

$$h_R(x) = \Phi\left( \frac{|x| - R}{\kappa} \right), \qquad \kappa = 2^k,$$

$$\omega_R(x) = [h_R(x)]^\gamma, \qquad \gamma > 2.$$

Тоді $\omega_R(x) = 1$ при $|x| \le R$, $\omega_R(x) = 0$ при $|x| \ge R + \kappa$, $0 \le \omega_R(x) \le 1$ при $|x| \in \mathbb{R}^m$,

$$\left| \omega_{R,x_i}(x) \right| = \frac{d}{\kappa} [h_R(x)]^{\gamma - 1}, \qquad |x| \in \mathbb{R}^n, \qquad i \in \{1, \ldots, m\}, \qquad d = \mathrm{const} > 0.$$

Записавши (11) для $u^{k+3}$ і $u^{k+2}$, віднявши від першої рівності другу, прийнявши

$$v = u^{k+3,k+2} \omega_R(x) e^{-\mu t},$$

де $\mu > 0$, $u^{k+3,k+2} = u^{k+3} - u^{k+2}$, і врахувавши формулу (12), одержимо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 \omega_R(x) e^{-\mu t} dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \left[ \frac{1}{2} \mu \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 \omega_R(x) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t) u_{y_i}^{k+3,k+2} u^{k+3,k+2} \omega_R(x) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^{k+3,k+2} \left( u^{k+3,k+2} \omega_R(x) \right)_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t) u_{x_i}^{k+3,k+2} u^{k+3,k+2} \omega_R(x) +$$

$$\left. + \left( b_0(x,y,t,u^{k+3}) - b_0(x,y,t,u^{k+2}) \right) u^{k+3,k+2} \omega_R(x) \right] e^{-\mu t} dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left|u_0^{k+3,R(k+3)} - u_0^{k+2,R(k+2)}\right|^2 \omega_R(x)\,dxdy \; +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[(f_0^{k+3,R(k+3)} - f_0^{k+2,R(k+2)})u^{k+3,k+2}\,\omega_R(x) \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(f_i^{k+3,R(k+3)} - f_i^{k+2,R(k+2)})(u^{k+3,k+2}\,\omega_R(x))_{x_i}\Bigg]e^{-\mu t}\,dxdydt, \qquad (13)$$

$$\tau \in (0,T], \qquad R(k) = 2^k.$$

На підставі умови A

$$J_1 \equiv \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t)u_{y_i}^{k+3,k+2}\,u^{k+3,k+2}\,\omega_R(x)e^{-\mu t}\,dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^2}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2 e^{-\mu t}\,\omega_R(x)\sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i)\,dS \; -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2 e^{-\mu t}\,\omega_R(x)\sum_{i=1}^{m} a_{i,y_i}(x,y,t)\,dxdydt \;\geq$$

$$\geq -\frac{A_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\omega_R(x)e^{-\mu t}\,dxdydt,$$

де

$$A_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\sum_{i=1}^{m}|a_i(x,y,t)|,$$

$$J_2 \equiv \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^{k+3,k+2}\,(u^{k+3,k+2}\,\omega_R(x))_{x_j}\,e^{-\mu t}\,dxdydt \;\geq$$

$$\geq \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\left(A_0 - \frac{nA_2\delta_1}{2}\right)\left|\nabla u^{k+3,k+2}\right|^2\omega_R(x) \; -$$

$$- \frac{n^2d^2A_2}{2\delta_1\kappa^2}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2[h_R(x)]^{\gamma-2}\Bigg]e^{-\mu t}\,dxdydt, \qquad (14)$$

$$\delta_1 > 0, \qquad A_2 = \max_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\left|a_{ij}(x,y,t)\right|.$$

Згідно з умовою B

$$J_3 \equiv \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i}^{k+3,k+2}\,u^{k+3,k+2}\,\omega_R(x)e^{-\mu t}\,dxdydt \;\geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\delta_1 B_1\left|\nabla u^{k+3,k+2}\right|^2 + \frac{1}{\delta_1}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\right]\omega_R(x)e^{-\mu t}\,dxdydt,$$

де

$$B_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x, y, t),$$

$$J_4 \equiv \int_{Q_\tau} \Big( b_0(x, y, t, u^{k+3}) - b_0(x, y, t, u^{k+2}) \Big) u^{k+3,k+2} \omega_R(x) e^{-\mu t} \, dxdydt \geq 0.$$

Крім того,

$$J_5 \equiv \int_{Q_\tau} \Bigg[ (f_0^{k+3,R(k+3)} - f_0^{k+2,R(k+2)}) u^{k+3,k+2} \omega_R(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (f_i^{k+3,R(k+3)} - f_i^{k+2,R(k+2)}) (u^{k+3,k+2} \omega_R(x))_{x_i} \Bigg] e^{-\mu t} \, dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \Bigg[ \delta_2 \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 \omega_R(x) + \frac{\delta_1 d^2}{\kappa^2} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 [h_R(x)]^{\gamma-2} +$$

$$+ \delta_1 \left| \nabla u^{k+3,k+2} \right|^2 \omega_R(x) \Bigg] e^{-\mu t} \, dxdydt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \Bigg[ \frac{1}{\delta_2} \left| f_0^{k+3,R(k+3)} - f_0^{k+2,R(k+2)} \right|^2 +$$

$$+ \frac{2}{\delta_2} \sum_{i=1}^{n} \left| f_i^{k+3,R(k+3)} - f_i^{k+2,R(k+2)} \right|^2 \Bigg] \omega_R(x) e^{-\mu t} \, dxdydt, \qquad \delta_2 > 0.$$

Врахувавши оцінки інтегралів $J_1 - J_5$, з (13) одержимо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 \omega_R(x) e^{-\mu t} \, dxdy + \int_{Q_\tau} \Bigg[ \left( \mu - A_1 - \delta_2 - \frac{1}{\delta_1} \right) \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 \omega_R(x) +$$

$$+ (2A_0 - A_2 \delta_1 n - \delta_1 B_1 - \delta_1) \left| \nabla u^{k+3,k+2} \right|^2 \omega_R(x) \Bigg] e^{-\mu t} \, dxdydt \leq$$

$$\leq \left( \frac{n^2 A_2}{\delta_1} + \delta_1 \right) \frac{d^2}{\kappa^2} \int_{Q_\tau} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 [h_R(x)]^{\gamma-2} e^{-\mu t} \, dxdydt +$$

$$+ \max \left\{ 1; \frac{1}{\delta_2}, \frac{2}{\delta_1} \right\} F_R(\tau),$$

де

$$F_R(\tau) = \int_{\Omega_0} \left| u_0^{k+3,R(k+3)} - u_0^{k+2,R(k+2)} \right|^2 \omega_R(x) \, dxdy +$$

$$+ \int_{Q_\tau} \sum_{i=0}^{n} \left| f_i^{k+3,R(k+3)} - f_i^{k+2,R(k+2)} \right|^2 \omega_R(x)) e^{-\mu t} \, dxdydt.$$

Виберемо

$$\delta_1 = \frac{nA_2 + B_1 + 1}{A_0}, \quad \mu = \theta + \mu_0, \quad \theta > 0,$$

$$\mu_0 > A_1 + \frac{A_0}{nA_2 + B_1 + 1}, \quad \delta_2 < \mu_0 - A_1 - \frac{A_0}{nA_2 + B_1 + 1}.$$

Тоді з (14) випливає оцінка

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 \omega_R(x) e^{-\theta t}\, dxdy +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left( \theta \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 + \left| \nabla u^{k+3,k+2} \right|^2 \right) \omega_R(x) e^{-\theta t}\, dxdydt \le$$

$$\le \frac{M_1}{\kappa^2} \int\limits_{Q_\tau} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 [h_R(x)]^{\gamma-2} e^{-\theta t}\, dxdydt + M_2 F_{R(k+1)}(\tau), \tag{15}$$

де

$$M_1 = \frac{(n^2 A_2 + \delta_1^2) d^2 e^{\mu_0 T}}{\delta_1 \min\{1; A_0\}}, \quad M_2 = \frac{\max\{1; 1/\delta_2; 1/\delta_1\}}{\min\{1; A_0\}}.$$

З (15), зокрема, одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 e^{-\theta t}\, dxdydt \le \frac{M_1}{\theta\kappa^2} \int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 e^{-\theta t}\, dxdydt + \frac{M_2}{\theta} F_{R(k+1)}(\tau). \tag{16}$$

Виберемо

$$\theta = \beta 2^{2k} = \beta [R(k)]^2,$$

де $\beta = \lambda^2 M_1 e$.

Оскільки

$$\left| f_i^{k+3,R(k+3)} - f_i^{k+2,R(k+2)} \right|^2 \le 2 \left( \left| f_i^{k+3,R(k+3)} - f_i \right|^2 + \left| f_i^{k+2,R(k+2)} - f_i \right|^2 \right),$$

$$i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

$$\left| u_0^{k+3,R(k+3)} - u_0^{k+2,R(k+2)} \right|^2 \le 2 \left( \left| u_0^{k+3,R(k+3)} - u_0 \right|^2 + \left| u_0^{k+2,R(k+2)} - u_0 \right|^2 \right),$$

то на підставі (7)

$$F_{R(k+1)}(\tau) \le 2 e^{-q + b[R(k+1)]^2}.$$

Отже, з (16) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 e^{-\theta t}\, dxdydt \le e^{-1} \int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}} \left| u^{k+3,k+2} \right|^2 e^{-\theta t}\, dxdydt +$$

$$+ \frac{2M_2}{\theta} e^{-q + b[R(k+1)]^2}. \tag{17}$$

Поділимо відрізок $[R(k), R(k) + \kappa]$ на $q$ частин. Тоді, як і в [14], з (17) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 dxdydt \;\le\; e^{-\theta+\theta\tau} \int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 dxdydt \;+$$

$$+\;\frac{2M_2 e}{\theta(e-1)} e^{-q+\theta\tau+b[R(k+1)]^2}. \tag{18}$$

Використавши (11) при $v = u^k e^{-\rho t}$, $\rho > 0$, отримаємо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 e^{-\rho\tau} dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left[\frac{1}{2}\rho\left|u^k\right|^2 + \sum_{i=1}^m a_i(x,y,t) u_{y_i}^k u^k \;+\right.$$

$$\left. +\;\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^k u_{x_j}^k + \sum_{i=1}^n b_i(x,y,t) u_{x_i}^k u^k + b_0(x,y,t,u^k) u^k \right] e^{-\rho t} dxdydt \;=$$

$$=\;\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^{R(k)}} \left|u_0^{k,R(k)}\right|^2 dxdy + \int\limits_{\Omega_\tau^{R(k)}} \left[ f_0^{k,R(k)} u^k + \sum_{i=1}^n f_i^{k,R(k)} u_{x_i}^k \right] e^{-\rho t} dxdydt, \tag{19}$$

$$\tau \in (0, T].$$

На підставі умов A, B, S з (19) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 e^{-\rho\tau} dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left[\left(\rho - A_1 - \frac{1}{\delta_3} - 1\right)\left|u^k\right|^2 \;+\right.$$

$$\left. +\;(2A_0 - \delta_3 B_1 - \delta_3)\left|\nabla u^k\right|^2 \right] e^{-\rho t} dxdydt \;\le$$

$$\le\; \int\limits_{\Omega_0^{R(k)}} \left|u_0^{k,R(k)}\right|^2 dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left(\left|f_0^{k,R(k)}\right|^2 + \frac{1}{\delta_3}\sum_{i=1}^n \left|f_i^{k,R(k)}\right|^2\right) e^{-\rho t} dxdydt, \quad \delta_3 > 0.$$

Вибравши у цій нерівності

$$\delta_3 = \frac{2A_0}{B_1+1}, \qquad \rho = A_1 + 2 + \frac{B_1+1}{2A_0},$$

матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 dxdy \;\le\; M_3 \left[\int\limits_{\Omega_0^{R(k)}} \left|u_0^{k,R(k)}\right|^2 dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \sum_{i=0}^n \left|f_i^{k,R(k)}\right|^2 dxdydt\right], \tag{20}$$

де

$$M_3 = e^{\rho T} \max\left\{1;\; \frac{B_1+1}{2A_0}\right\}.$$

Врахувавши (6), з (20) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 dxdydt \;\le\; 2aM_3 e^{b[R(k)]^2}. \tag{21}$$

Оскільки

$$\left|u^{k+3,k+2}\right|^2 \;\le\; 2\left(\left|u^{k+3}\right|^2 + \left|u^{k+2}\right|^2\right),$$

то з (18), (21) випливає

$$\int_{Q_\tau^{R(k)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 dxdydt \le$$

$$\le 4aM_3 \exp\left[-q + \theta\tau + b[R(k+3)]^2\right] +$$

$$+ \frac{2M_2 e}{\theta(e-1)} \exp\left[-q + \theta\tau + b[R(k+1)]^2\right] \le$$

$$\le M_4 \exp\left[-q + \theta\tau + b[R(k+3)]^2\right],$$

де

$$M_4 = 4aM_3 + \frac{2M_2 e}{\theta(e-1)}.$$

Тому

$$\int_{Q_\tau^{R(k+1)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 dxdydt \le$$

$$\le M_4 \exp\left[-[R(k+1)]^2\lambda + \beta[R(k+1)]^2 + b[R(k+4)]^2\right]. \tag{22}$$

Отже, врахувавши (15), (22) і оцінку для $F_{R(k+1)}(\tau)$, одержимо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau^{R(k)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 dxdy + \int_{Q_\tau^{R(k)}} \left(\left|u^{k+3,k+2}\right|^2 + \left|\nabla u^{k+3,k+2}\right|^2\right) dxdydt \le$$

$$\le M_5^2 \exp\left[-\lambda[R(k+1)]^2 + \beta[R(k+1)]^2\tau + b[R(k+4)]^2\right]. \tag{23}$$

Виберемо

$$\lambda = 2^6([b]+1).$$

Тоді праву частину (23) можна оцінити так:

$$\exp\left[-\lambda[R(k+1)]^2 + \beta[R(k+1)]^2\tau + b[R(k+4)]^2\right] \le e^{-2^{2k+2}\alpha_0},$$

де $\alpha_0 = \varphi - \beta t_0 - b2^6$, якщо

$$\tau = t_0 < \frac{\lambda - b2^6}{\beta}.$$

Нехай $R_1 > R_0 + 1$ — довільне фіксоване число, $R(k) > R_1$. З (23) випливає оцінка

$$\left\|u^{k+3,k+2}\right\|_{C([0,t_0];\, L^2(\Omega^{R_1}))} + \left\|u^{k+3,k+2}\right\|_{L^2((0,t_0);\, V(\Omega^{R_1}))} \le M_5 e^{-\alpha_0 2^{2k+1}},$$

$$V(\Omega^{R_1}) = \left\{u : u, u_{x_i} \in L^2(\Omega^{R_1}),\ u\big|_{(\partial\Omega_x \cap \partial\Omega_x^{R_1})\times\Omega_y} = 0\right\}.$$

Тоді

$$\left\|u^{k+l+2} - u^{k+2}\right\|_{C([0,t_0];\, L^2(\Omega^{R_1}))} + \left\|u^{k+l+2} - u^{k+2}\right\|_{L^2((0,t_0);\, V(\Omega^{R_1}))} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{l-1} \left(\left\|u^{k+i+3} - u^{k+i+2}\right\|_{C([0,t_0];\, L^2(\Omega^{R_1}))} + \left\|u^{k+i+3} - u^{k+i+2}\right\|_{L^2((0,t_0);\, V(\Omega^{R_1}))}\right) \le$$

$$\leq M_5 \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\alpha_0 2^{2(k+i)+1}} \leq M_6 e^{-\alpha_0 2^{2k+1}},$$

де $M_6$ не залежить від $k$, $l \geq 1$. Отже, послідовність $\{u^k\}$ є фундаментальною у просторі $C([0,t_0];L^2(\Omega^{R_1}))\cap L^2((0,t_0);V(\Omega^{R_1}))$. Враховуючи довільність $R_1$, звідси одержуємо, що $u^k \to u$ у просторі $C([0,t_0];L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))\cap L^2((0,t_0);H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, тобто $u$ — узагальнений розв'язок задачі (1) – (3).

Теорему доведено.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови* A, B, S, $f_i \in L^2((0,T);L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, $u_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. *Тоді задача* (1) – (3) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій таких, що*

$$\int_{Q_T^R} |u|^2\, dxdydt \leq a e^{bR^2} \qquad \forall R > R_0 + 1, \tag{24}$$

*де* $a$, $b$ *— додатні сталі.*

***Доведення.*** Нехай існують два узагальнені розв'язки $u^1$ і $u^2$ задачі (1) – – (3). Задамо довільне фіксоване число $R_1 > R_0 + 1$ і як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Нехай $R(l) = 2^l > R_1$, $l \in \mathbb{N}$.

Згідно з означенням узагальненого розв'язку існують послідовності $\{u^{i,k}\}$ такі, що $u^{i,k} \to u^i$ у просторі $C([0,T];L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))\cap L^2((0,T);H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, причому $u^{i,k}$ задовольняє (4) з правими частинами $f_j^{i,k}$ і початковими функціями $u_0^{i,k}$, де $f_j^{i,k}$, $u_0^{i,k}$ задовольняють умову F, $f_j^{i,k} \to f_j$ у просторі $L^2((0,t_0);L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, $u_0^{i,k} \to u_0$ у просторі $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ при $k \to \infty$, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Так само, як (15), одержимо нерівність

$$\int_{Q_\tau} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 \omega_R(x) e^{-\theta t} dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{M_1}{\theta\kappa^2}\int_{Q_\tau}\left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 [h_R(x)]^{\gamma-2} e^{-\theta t} dxdydt + \frac{M_2}{\theta} F(R,\tau), \tag{25}$$

де функція $\omega_R(x)$ і сталі $M_1$, $M_2$, $\theta$, $\kappa$ визначені при доведенні теореми 1, а

$$F(R,\tau) = \int_{\Omega_0}\left|u_0^{2,k} - u_0^{1,k}\right|^2 \omega_R(x)\,dxdydt + \int_{Q_\tau}\sum_{i=0}^{n}\left|f_i^{2,k} - f_i^{1,k}\right|^2 \omega_R(x)\,dxdydt.$$

Виберемо $q = \lambda 2^{2l}$, $\kappa = 2^l$, $\theta = \beta 2^{2l}$, де $\beta = \lambda^2 M_1 e$, $\lambda$ — деяке натуральне число. Оскільки

$$F(R,\tau) \leq 2\int_{\Omega_0^{R(l+1)}}\left(\left|u_0^{2,k} - u_0\right|^2 + \left|u_0^{1,k} - u_0\right|^2\right)dxdy +$$

$$+ 2\int_{Q_\tau^{R(l+1)}}\sum_{i=0}^{n}\left(\left|f_i^{2,k} - f_i\right|^2 + \left|f_i^{1,k} - f_i\right|^2\right)dxdydt,$$

то, врахувавши збіжності послідовностей $\{f_j^{i,k}\}$, $\{u_0^{i,k}\}$, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{0,1,\ldots \ldots,n\}$, можемо вказати таке $k_0(l)$, що

$$F(R,\tau) \le e^{-q}$$

для всіх $k > k_0(l)$. Тоді з (25), як і при доведенні теореми 1, одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l)}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le e^{-q+\theta\tau} \int\limits_{Q_\tau^{R(l+1)}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt + e^{-q+\theta\tau} \qquad (26)$$

для

$$l \ge l_0 = \left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{M_2}{\beta}\right] + 1.$$

Оскільки $u^{i,k} \to u^i$ у $L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$, то існує таке $k_1(l,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $k_1 \ge k_0$, що

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l+1)}} \left|u^{i,k} - u^i\right|^2 dxdydt \le \frac{\varepsilon}{16}, \qquad i \in \{1,2\}, \qquad (27)$$

для всіх $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Враховуючи те, що

$$\left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 < 3\left(\left|u^{2,k} - u^2\right|^2 + \left|u^{1,k} - u^1\right|^2 + 2\left|u^1\right|^2 + 2\left|u^2\right|^2\right),$$

і умову (24), з (26) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l)}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le e^{-q+\theta\tau}\left(\frac{3\varepsilon}{8} + 4ae^{b[R(l+1)]^2} + 1\right) \le$$

$$\le (2+4a)\exp\left[-q + \theta\tau + b[R(l+1)]^2\right] \qquad (28)$$

при $k > k_1(l,\varepsilon)$. Виберемо

$$\lambda = 4([b]+1), \qquad \tau = t_0, \qquad 0 < t_0 < \frac{\lambda - 4b}{\beta}, \qquad \alpha_0 = \lambda - \beta t_0 - 4\text{b} > 0.$$

Тоді з (28) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{t_0}^{R(l)}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le (2+4a)e^{-\alpha_0 2^{2l}}.$$

Отже, існує таке $l_1 \in \mathbb{N}$, $l_1 \ge l_0$, що

$$\int\limits_{Q_{t_0}^{R_1}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt < \frac{\varepsilon}{16} \qquad (29)$$

для всіх $l > l_1$ і $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Оскільки

$$\left|u^2 - u^1\right|^2 \le 3\left(\left|u^2 - u^{2,k}\right|^2 + \left|u^1 - u^{1,k}\right|^2 + \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2\right),$$

то на підставі (27), (29)

$$\int\limits_{Q_{t_0}^{R_1}} \left|u^2 - u^1\right|^2 dxdydt < \varepsilon,$$

тобто внаслідок довільності $\varepsilon$ $u^2(x,y,t) = u^1(x,y,t)$ майже скрізь в $Q_{t_0}^{R_1}$. Оскільки $R_1$ — довільне число, то $u^2(x,y,t) = u^1(x,y,t)$ майже скрізь в $Q_{t_0}$. Якщо $t_0 < T$, то за скінченне число кроків доводимо єдиність у всій області $Q_T$.

Теорему доведено.

***Зауваження.*** Зазначимо, що умови теореми 1 забезпечують єдиність узагальненого розв'язку задачі (1) – (3). Проте єдиність розв'язку гарантується на будь-якому проміжку $[0, T]$, тоді як існування встановлено лише на деякому проміжку $[0, t_0] \subset [0, T]$, де $t_0$ залежить від коефіцієнтів рівняння та сталої $b$.

1. *Kolmogorov A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Bownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – S. 116 – 117
2. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.
3. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear Problems Math. Phys. and Related Top. II. In honour of Proff. O. A. Ladyzhenskaya. – New York: Kluwer Acad. Publ., 2002. – P. 243 – 265.
4. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Birkhäuser, 2004. – 390 p.
5. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. вісн. – 2004. – № 1. – С. 61 – 68.
6. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11 – 16.
7. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 7. – С. 1316 – 1331.
8. *Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance // Nonlinear Analysis. – 2001. – **47**. – P. 491 – 502.
9. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння в необмеженій області // Укр. мат. журн. – 2000. – **51**, № 8. – С. 1053 – 1066.
10. *Барабаш Г. М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 27 – 34.
11. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Communs Part. Different. Equat. – 1998. – **23**, № 5, 6. – P. 847 – 868.
12. *Гузіль Н. І., Лавренюк С. П.* Мішана задача для напівлінійної ультрапараболічної системи в необмеженій області // Доп. НАН України. – 2005. – № 5. – С. 11 – 16.
13. *Гузіль Наталія.* Задача без початкових умов для системи ультрапараболічних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2004. – Вип. 63. – С. 59 – 76.
14. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, вып. 5. – С. 7 – 72.
15. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Одержано 03.05.06