УДК 517.5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетр. нац. ун-т; Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
С. А. Спектор (Днепропетр. нац. ун-т)

ОЦЕНКИ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Let ψ_m^D be orthogonal Daubechies wavelets having m zero moments. Let also

$$W_{2,p}^k = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \left\| (i\omega)^k \hat{f}(\omega) \right\|_p \le 1 \right\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

We prove that

$$\lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \frac{\left|(\psi_m^D, f)\right|}{\left\|(\psi_m^D)^\wedge\right\|_q} : f \in W_{2,p'}^k \right\} = \frac{\frac{(2\pi)^{1/p-1/2}}{\pi^k}\left(\frac{1-2^{1-pk}}{pk-1}\right)^{1/p}}{(2\pi)^{1/q-1/2}}.$$

Нехай ψ_m^D — ортогональні вейвлети Добеші, які мають m нульових моментів і

$$W_{2,p}^k = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \left\| (i\omega)^k \hat{f}(\omega) \right\|_p \le 1 \right\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Доведено, що

$$\lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \frac{\left|(\psi_m^D, f)\right|}{\left\|(\psi_m^D)^\wedge\right\|_q} : f \in W_{2,p'}^k \right\} = \frac{\frac{(2\pi)^{1/p-1/2}}{\pi^k}\left(\frac{1-2^{1-pk}}{pk-1}\right)^{1/p}}{(2\pi)^{1/q-1/2}}.$$

Пусть $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, — пространство измеримых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с конечной нормой $\|f\|_p$, где

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad p < \infty,$$

и

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{vrai}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $g \in L_q(\mathbb{R})$, где $p, q \in [1;\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, положим $(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx$.

Будем рассматривать следующие классы функций $f \in L_2(\mathbb{R})$. Для $k \in \mathbb{N}$ и $p \in (1, \infty)$ положим

$$W_{2,p}^k = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \left\| (i\omega)^k \hat{f}(\omega) \right\|_p \le 1 \right\},$$

где

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

— преобразование Фурье функции f. При $p = 2$ получаем стандартные соболевские классы $W_{2,2}^k = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \left\| f^{(k)} \right\|_2 \le 1 \right\}$.

Для функции $\psi(t) \in L_2(\mathbb{R})$ и чисел $j, k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k).$$

Если система функций $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{R})$, т. е. любую функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$ можно представить в виде суммы сходящегося в $L_2(\mathbb{R})$ ряда

$$f(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\psi_{j,\nu}, f\right)\psi_{j,\nu}(t), \tag{1}$$

то функция $\psi(t)$ называется ортогональным вейвлетом.

Многие применения ортогональных вейвлетов базируются на исследовании величины вейвлет-коэффициентов в представлениях типа (1) в зависимости как от свойств вейвлета $\psi(t)$, так и от гладкости функции f.

Предположив, что вейвлет $\psi(t)$ имеет k нулевых моментов, или, что эквивалентно, $\hat{\psi}(\omega)$ имеет нуль кратности k в нуле, определим функцию ${}_k\psi(t)$ соотношением

$$\left({}_k\psi(t)\right)^{\wedge}(\omega) = (i\omega)^{-k}\hat{\psi}(\omega).$$

Положим

$$C_{\kappa;p,q}(\psi) = \sup_{f\in W^k_{2,p'}}\frac{|(\psi f)|}{\|\hat{\psi}\|_q},$$

где $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Тогда, как легко видеть, $C_{\kappa;p,q}(\psi)$ можно представить в виде

$$C_{\kappa;p,q}(\psi) = \frac{\left\|({}_k\psi)^{\wedge}\right\|_p}{\|\hat{\psi}\|_q}. \tag{2}$$

Отметим, что $C_{\kappa;p,q}(\psi)$ — это точная константа в неравенстве

$$\left|\left(\psi_{j,\nu}, f\right)\right| \le C_{\kappa;p,q}(\psi)2^{-j\left(k-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\|\hat{\psi}\|_q\left\|\hat{f}(\omega)(i\omega)^k\right\|_{p'}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Фильтрами Добеши (см., например, [1], § 16) называют тригонометрические полиномы

$$H_m(\omega) = 2^{-1/2}\sum_{l=0}^{2m-1}h_m(l)e^{il\omega}, \qquad h_m(l)\in\mathbb{R},$$

удовлетворяющие равенствам

$$|H_m(\omega)|^2 = \left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^m P_{m-1}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right),$$

где

$$P_{m-1}(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1+k}{k}x^k.$$

Функция φ_m^D, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\left(\varphi_m^D\right)^\wedge(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{l=1}^{\infty} H_m(\omega 2^{-l}),$$

является ортогональной масштабирующей функцией. Ортогональным вейвлетом Добеши ψ_m^D называется функция, образ Фурье которой имеет вид

$$\left(\psi_m^D\right)^\wedge(\omega) = e^{-\frac{i\omega}{2}}\,\overline{H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\left(\varphi_m^D\right)^\wedge\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Вейвлет ψ_m^D обладает следующими свойствами (см. [2], гл. 6, [1], § 16):

1) $\operatorname{supp}\psi_m^D = [-(m-1), m]$;

2) ψ_m^D имеет m нулевых моментов;

3) существует $\lambda > 0$ такая, что $\psi_m^D \in C^{\lambda m}$, где

$$C^\alpha = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)(1+|\omega|)^\alpha d\omega < \infty \right\}, \qquad \alpha > 0. \tag{3}$$

Кроме того (см., например, [3], § 5.5),

$$\left|(\psi_m^D)^\wedge(\omega)\right|^2 = \left|H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2 \left|\left(\varphi_m^D\right)^\wedge\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2 \prod_{l=1}^{\infty}\left|H_m(2^{-l-1}\omega)\right|^2, \tag{4}$$

причем

$$|H_m(\omega)|^2 = \left(1 - c_m\int_0^\omega \sin^{2m-1}u\,du\right). \tag{5}$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $k \geq 0$ — *фиксированное целое число. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} C_{k;p,q}(\psi_m^D) = \frac{(2\pi)^{1/p-1/q}}{\pi^k}\left(\frac{1-2^{1-pk}}{pk-1}\right)^{1/p}.$$

При $p = q = 2$ эта теорема доказана в работе [4].

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма, которая при $p = 2$ также доказана в [4].

Пусть $\hat{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\chi_{[-2\pi,-\pi]} + \chi_{[\pi,2\pi]}\right)$, где χ_I — характеристическая функция интервала I.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \geq 0$ — *целое число и* (ψ_n) — *последовательность функций с компактным носителем, причем*:

i) *для некоторого* ε, *не зависящего от* n, $0 < \varepsilon < \pi$,

$$\int_{|\omega|<\varepsilon} |\omega|^{-pk}\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)\right|^p d\omega \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty;$$

ii) $\left\|(\psi_n)^\wedge - \hat{\Psi}\right\|_p \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left\|({}_k\psi_n)^\wedge\right\|_p = \frac{(2\pi)^{1/p-1/2}}{\pi^k}\left(\frac{1-2^{1-pk}}{pk-1}\right)^{1/p}. \tag{6}$$

Доказательство. Представим $\left\|({}_k\psi_n)^\wedge\right\|_p$ в виде

$$\left\|({}_k\psi_n)^\wedge\right\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}}\left|(i\omega)^{-k}\right|^p\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)\right|^p d\omega\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)\right|^p d\omega\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|\hat{\Psi}(\omega) - \left(\hat{\Psi}(\omega)-(\psi_n)^\wedge(\omega)\right)\right|^p d\omega\right)^{1/p}.$$

Применяя неравенство Минковского, получаем

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|\left((\psi_n)^\wedge(\omega)-\hat{\Psi}(\omega)\right) + \hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|\hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)-\hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega\right)^{1/p} = I_1 + I_2.$$

С другой стороны,

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|\left((\psi_n)^\wedge(\omega)-\hat{\Psi}(\omega)\right) + \hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge \left(\int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|\hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega\right)^{1/p} - \left(\int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)-\hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega\right)^{1/p} = I_1 - I_2.$$

Для I_1^p имеем

$$I_1^p = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^p\int_{-2\pi}^{-\pi}\omega^{-pk}d\omega + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^p\int_{\pi}^{2\pi}\omega^{-pk}d\omega = \frac{(2\pi)^{1/p-1/2}}{\pi^k}\left(\frac{1-2^{1-pk}}{pk-1}\right)^{1/p}.$$

Покажем, что

$$I_2^p = \int_{\mathbb{R}}|\omega|^{-pk}\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)-\hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon\in(0;\pi)$. Разбивая интервал интегрирования на две части, имеем

$$I_2^p = \int_{|\omega|<\varepsilon}|\omega|^{-pk}\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)-\hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega + \int_{|\omega|>\varepsilon}|\omega|^{-pk}\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)-\hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega =$$

$$= I_{11} + I_{12}.$$

Рассмотрим I_{11}. Учитывая условие i) и то, что $\hat{\Psi}(\omega) = 0$ для $\omega\in(-\pi;\pi)$, получаем, что $I_{11}\to 0$ при $n\to\infty$. Кроме того, в силу условия ii)

$$I_{12} \le \varepsilon^{-kp}\int_{|\omega|>\varepsilon}\left|(\psi_n)^\wedge(\omega)-\hat{\Psi}(\omega)\right|^p d\omega \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Таким образом,

$$\left\|({}_k\psi_n)^\wedge\right\|_p \to I_1^p = \frac{(2\pi)^{1/p-1/2}}{\pi^k}\left(\frac{1-2^{1-pk}}{pk-1}\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Лемма доказана.

Отметим также частный случай леммы. При $k = 0$ получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(\psi_n)^\wedge\right\|_q = (2\pi)^{1/q-1/2}. \tag{7}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Необходимо проверить выполнение условий i) и ii) леммы 1 для ортогональных вейвлетов Добеши. При этом будем использовать соотношения (4), (5) и

$$c_m = \left(\int_0^\pi \sin^{2m-1}\omega\, d\omega\right)^{-1} = \frac{\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)} \sim \sqrt{\frac{m}{\pi}}. \tag{8}$$

Для доказательства условия i) выберем $0 < \varepsilon < 1$, а также отметим, что $|H_m(\omega)| \le 1$ для любого ω. В результате получим

$$\int_{|\omega|<\varepsilon}|\omega|^{-pk}\left|(\psi_m^D)^\wedge(\omega)\right|^p d\omega \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2}\int_{|\omega|<\varepsilon}|\omega|^{-pk}\left|H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^p d\omega \le$$

$$\le \left(\frac{c_m}{2\pi}\right)^{p/2}\int_{|\omega|<\varepsilon}|\omega|^{-pk}\left(\int_0^{|\omega|/2}\sin^{2m-1}t\,dt\right)^{p/2} d\omega.$$

Кроме того, так как $\left(\frac{|\omega|}{2}\right)^{-1}\sin\left(\frac{|\omega|}{2}\right) \le 1$, будем иметь

$$\left(\frac{c_m}{2\pi}\right)^{p/2}\int_{|\omega|<\varepsilon}|\omega|^{-pk}\left(\int_0^{|\omega|/2}\sin^{2m-1}t\,dt\right)^{p/2} d\omega =$$

$$= 2^{-p(1/2+k)}\left(\frac{c_m}{\pi}\right)^{p/2}\int_{|\omega|<\varepsilon}\left(\frac{|\omega|}{2}\right)^{-pk}\left(\int_0^{|\omega|/2}\sin^{2m-1}t\,dt\right)^{p/2} d\omega \le$$

$$\le 2^{-p(1/2+k)}\left(\frac{c_m}{\pi}\right)^{p/2}\int_{|\omega|<\varepsilon}\left(\frac{|\omega|}{2}\right)^{-pk}\left(\frac{|\omega|}{2}\sin^{2m-1}\frac{|\omega|}{2}\right)^{p/2} d\omega \le$$

$$\le 2^{-p(1/2+k)}\left(\frac{c_m}{\pi}\right)^{p/2}\int_{|\omega|<\varepsilon}\left(\frac{|\omega|}{2}\right)^{-pk+p/2}\left(\sin^{2m-1}\frac{|\omega|}{2}\right)^{p/2} d\omega \le$$

$$\le 2^{-p(1/2+k)}\left(\frac{c_m}{\pi}\right)^{p/2}\int_{|\omega|<\varepsilon}\sin^{2mp/2-pk}\frac{|\omega|}{2}d\omega.$$

При $m > k$

$$2^{-p(1/2+k)}\left(\frac{c_m}{\pi}\right)^{p/2}\int_{|\omega|<\varepsilon}\sin^{2mp/2-pk}\frac{|\omega|}{2}d\omega \le 2^{-p(1/2+k)}\left(\frac{c_m}{\pi}\right)^{p/2}2\varepsilon\sin^{pm-pk}\frac{\varepsilon}{2} \le$$

$$\le 2^{-p(1/2+k)+1}\left(\frac{c_m}{\pi}\right)^{p/2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{pm-pk+1}.$$

Поскольку $c_m \sim \sqrt{\dfrac{m}{\pi}}$, последнее выражение стремится к нулю при $m \to \infty$.

Соотношение i) доказано.

Для доказательства условия ii) положим $I = [-2\pi; 2\pi]$ и

$$I_\delta = [-2\pi, -2\pi+\delta) \cup (-\pi-\delta, -\pi+\delta) \cup (\pi-\delta, \pi+\delta) \cup (2\pi-\delta, 2\pi].$$

Докажем, что

$$\left(\int\limits_{I \setminus I_\delta} \left| (\psi_m^D)^\wedge(\omega) - \hat{\Psi}(\omega) \right|^p d\omega \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Имеем

$$\left(\int\limits_{I \setminus I_\delta} \left| (\psi_m^D)^\wedge(\omega) - \hat{\Psi}(\omega) \right|^p d\omega \right)^{1/p} \le \left(\int\limits_{I \setminus I_\delta} \left| (\psi_m^D)^\wedge(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right) \right|^p d\omega \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int\limits_{I \setminus I_\delta} \left| \hat{\Psi}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right) \right|^p d\omega \right)^{1/p}. \tag{9}$$

Для фиксированного δ последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} H_m\left(\dfrac{\omega}{2}+\pi\right)$ равномерно сходится к $\hat{\Psi}(\omega)$ в $I \setminus I_\delta$ при $m \to \infty$, поэтому второе слагаемое в правой части неравенства (9) стремится к нулю при $m \to \infty$.

Первое слагаемое в правой части неравенства (9) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{I \setminus I_\delta} \left| H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right) \right|^p \left| 1 - \prod_{l \ge 1} \left| H_m(2^{-l-1}\omega) \right| \right|^p d\omega \right)^{1/p}. \tag{10}$$

Учитывая тот факт, что $\left| H_m\left(\dfrac{\omega}{2}+\pi\right) \right|^p \le 1$, а также установленные в работе [4] для $\omega \in I \setminus I_\delta$ оценки

$$\left| H_m\left(\frac{\omega}{4}\right) \right| \ge \left(1 - c_m \frac{\pi}{2} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{4}\right) \right\}^{2m-1} \right)^{1/2},$$

$$\left| H_m\left(\frac{\omega}{8}\right) \right| \ge \left(1 - c_m \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2m} \right)^{1/2}$$

и

$$\prod_{l \ge 1} \left| H_m(2^{-l-3}\omega) \right|^p \ge \left(1 - 2^{-2m}\right)^{\frac{1}{2(1-2^{-2m})}},$$

интеграл (10) при всех достаточно больших m можно оценить следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{I \setminus I_\delta} \left| H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right) \right|^p \left| 1 - \prod_{l \ge 1} \left| H_m(2^{-l-1}\omega) \right| \right|^p d\omega \right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \left((4\pi)^p \left| 1 - \left(1 - c_m \frac{\pi}{2} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{4}\right) \right\}^{2m-1} \right)^{1/2} \left(1 - c_m \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2m} \right)^{1/2} \left(1 - 2^{-2m}\right)^{\frac{1}{2(1-2^{-2m})}} \right| \right).$$

Ясно, что правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $m \to \infty$.

Поскольку $|I_\delta| = 6\delta$, то

$$\int\limits_{I_\delta} \left| (\psi_m^D)^\wedge(\omega) - \hat{\Psi}(\omega) \right|^p d\omega \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} |I_\delta| \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} 6\delta. \qquad (11)$$

Теперь убедимся, что для всех $p > 1$

$$\int\limits_{|\omega| \ge 2\pi} \left| (\psi_m^D)^\wedge(\omega) \right|^p d\omega \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Из известных результатов о регулярности вейвлетов Добеши (см., например, [5], § 2.2.4) следует, что найдутся положительные константы C и $\tilde{C}$ такие, что для всех ω таких, что $\omega > 2\pi$, выполняется неравенство

$$\left| (\psi_m^D)^\wedge(\omega) \right| \le \tilde{C} |\omega|^{-C \log m}.$$

Тогда

$$\int\limits_{|\omega| > 2\pi} \left| (\psi_m^D)^\wedge(\omega) \right|^p d\omega \le \tilde{C} \int\limits_{|\omega| > 2\pi} |(\omega)|^{-Cp\log m} d\omega = \tilde{C} \int\limits_{|\omega| > 2\pi} |(\omega)|^{-(Cp\log m - 2)} d\omega \le$$

$$\le (2\pi)^{-(Cp\log m - 2)} \int\limits_{|\omega| > 2\pi} |(\omega)|^{-2} d\omega.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $m \to +\infty$.

Таким образом, предположения леммы 1 для ортогональных вейвлетов Добеши выполняются.

Используя (2), (6) и (7), имеем

$$\lim_{m \to \infty} C_{k;p,q}(\psi_m^D) = \lim_{m \to \infty} \frac{\left\| ({}_k\psi_m^D)^\wedge \right\|_{p'}}{\left\| (\psi_m^D)^\wedge \right\|_q} = \frac{\dfrac{(2\pi)^{1/p - 1/2}}{\pi^k} \left(\dfrac{1 - 2^{1-pk}}{pk - 1} \right)^{1/p}}{(2\pi)^{1/q - 1/2}},$$

$$\lim_{m \to \infty} C_{k;p,q}(\psi_m^D) = \frac{(2\pi)^{1/p - 1/q}}{\pi^k} \left(\frac{1 - 2^{1-pk}}{pk - 1} \right)^{1/p}.$$

Теорема доказана.

1. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основные теории всплесков // Успехи мат. наук. – 1998. – **53**, № 6. – С. 53 – 128.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 463 с.
3. *Strang G., Nguyen T.* Wavelets and filter banks. – Wellesley: Cambridge Press, 1996. – 520 p.
4. *Ehrich S.* On the estimation of wavelet coefficients // Adv. Comput. Math. – 2000. – **13**. – P. 105 – 129.
5. *Louis A. K., Maab P., Rieder A.* Wavelets theory and applications. – Chichester etc.: John Wiley & Sons Ltd, 1997. – 323 p.

Получено 19.06.06