УДК 517.95

С. П. Лавренюк (Львів. нац. ун-т, Жешів. ун-т, Польща),
П. Я. Пукач (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ ОБЛАСТІ

We investigate the first mixed problem for a quasilinear hyperbolic equation of the second order with power nonlinearity in a domain unbounded with respect to space variables. We consider the case of an arbitrary number of space variables. We obtain conditions for the existence and uniqueness of the solution of this problem independent of the behavior of solution as $|x| \to +\infty$. The indicated classes of the existence and uniqueness are defined as spaces of local integrable functions. The dimension of the domain in no way limits the order of nonlinearity.

Исследована первая смешанная задача для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка со степенной нелинейностью в неограниченной по пространственным переменным области. Рассмотрен случай произвольного количества пространственных переменных. Получены условия существования и единственности решения этой задачи независимо от поведения решения при $|x| \to +\infty$. Указанные классы существования и единственности являются пространствами локально интегрируемых функций, причем размерность области никак не ограничивает степень нелинейности.

Відомо [1, 2], що для лінійних рівнянь гіперболічного типу розв’язок залежить від початкових умов і правої частини лише в обмеженій області – всередині характеристичної поверхні. Крім того, на самій характеристичній поверхні виконуються співвідношення для інтеграла енергії [2]. Цей факт будемо використовувати при дослідженні розв’язку мішаної задачі в необмеженій області для певного класу нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку.

Задачі в необмежених областях для нелінійних гіперболічних рівнянь вигляду $u_{tt} - \Delta u + A|u|^{\gamma} = f$, $\gamma > 0$, вивчали у багатьох роботах [3 – 8]. Праці [9, 10] присвячено дослідженню першої мішаної задачі для слабко нелінійного гіперболічного рівняння та системи таких рівнянь другого порядку, що узагальнюють рівняння вигляду $u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{\rho} = f$ в необмеженій за просторовими змінними області. При цьому передбачалося, що степінь нелінійності $\rho > 1$ суттєво залежить від розмірності області, у якій досліджують задачу. У цій статті умови на степінь нелінійності $\rho > 0$ жодним чином не залежать від розмірності області. Зазначимо також, що в [11] вивчено мішану задачу для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

В області $Q = \Omega \times (0; T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, розглянемо задачу

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) u_{x_i} \right)_{x_j} + |u_t|^{p-2} u_t = f(x,t), \quad p > 1, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_1(x), \tag{3}$$

$$u|_S = 0, \tag{4}$$

де $S = \partial\Omega \times (0; T)$ — бічна поверхня області Q, $0 < T < +\infty$. Припустимо, що Ω — необмежена область з межею $\partial\Omega$ класу C^1, $\Omega_R = \Omega \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R \right\}$ — зв’язна множина для довільного $R > 1$ з регулярною за Кальдероном [12, с. 45] межею $\partial\Omega_R$. Зауважимо, зокрема, що опукла область Ω задовольняє усі зазначені умови [12, с. 46] (зауваження 1.11). Без обмеження загальності припускаємо, що $O \in \Omega$, де O — початок координат. Позначимо далі $Q_{R,\tau} = \Omega_R \times (0;\tau)$, $Q_\tau = \Omega \times (0;\tau)$, $\partial\Omega_R = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R$, $\Gamma_1^R = \partial\Omega \cap \overline{\Omega}_R$, $\Gamma_2^R = \partial\Omega_R \setminus \Gamma_1^R$, $S_{R,\tau} = \partial\Omega_R \times (0;\tau)$, $S_R = \partial\Omega_R \times (0;T)$ для довільних $R > 1$, $\tau \in (0;T]$.

Будемо використовувати такі простори функцій:

$$H^1_{0,\Gamma_1^R}(\Omega_R) = \left\{u\colon\ u \in H^1(\Omega_R),\ u\Big|_{\Gamma_1^R} = 0\right\},$$

$$H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \left\{u\colon\ u \in H^1_{0,\Gamma_1^R}(\Omega_R)\ \ \forall R > 1\right\},$$

$$H^2_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \left\{u\colon\ u \in H^2(\Omega_R) \cap H^1_{0,\Gamma_1^R}(\Omega_R)\ \ \forall R > 1\right\},$$

$$L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \left\{u\colon\ u \in L^r(\Omega_R)\ \ \forall R > 1\right\},$$

$$L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) = \left\{u\colon\ u \in L^r(Q_{R,T})\ \ \forall R > 1\right\}, \quad r \in (1, +\infty).$$

Означення. *Розв'язком задачі* (1) – (4) *називаємо функцію* u, *що задовольняє включення*

$$u \in C\big([0;T]; H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big),$$

$$u_t \in C\big([0;T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^2\big((0;T); H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big), \tag{5}$$

$$u_{tt} \in L^\infty\big((0;T); L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big),$$

умови (2) – (4) *і рівняння* (1) *в сенсі розподілів.*

Позначимо $r = \min\{2, p'\}$, де $p' = p/(p-1)$, $s = \max\{2, 2p-2\}$.

Теорема 1. *Нехай функції* a_{ij} *належать до простору* $C(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, *причому* $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, $a_0 > 0$, *для довільного вектора* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, *для всіх* $x \in \Omega$ *та для довільних* $i, j = 1, \ldots, n$; *функції* a_{ij}, a_{ij,x_j} *належать до простору* $L^\infty(\Omega)$ *для довільних* $i, j = 1, \ldots, n$; $f \in L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $f_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$; $u_0 \in H^2_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in L^s_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \cap H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. *Тоді існує єдиний розв'язок* u *задачі* (1) – (4).

Доведення. Виберемо довільне фіксоване число $R > 1$. Розглянемо допоміжну задачу в області $Q_{R,T}$ для рівняння (1) з правою частиною f^R і умовами

$$u\Big|_{S_R} = 0, \tag{6}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0^R(x), \qquad u_t\big|_{t=0} = u_1^R(x), \quad x \in \Omega_R, \tag{7}$$

де $u_0^R(x) = u_0(x)\zeta_R(x)$, $u_1^R(x) = u_1(x)\zeta_R(x)$, $\zeta_R \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \zeta_R(x) \leq 1$, $\zeta_R(x) = 1$ при $|x| \leq R-1$, $\zeta_R(x) = 0$ при $|x| \geq R$, $f^R(x,t) = f(x,t)$ при $(x,t) \in Q_{R,T}$, $f^R(x,t) = 0$ при $(x,t) \in Q \setminus Q_{R,T}$.

Для доведення існування розв'язку допоміжної задачі використаємо схему доведення теореми 6.1 [13, с. 234]. Розглянемо в області $Q_{R,T}$ послідовність гальоркінських наближень $u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\varphi_k(x)$, де $N = 1, 2, \ldots$, $\{\varphi_k\}$ — ортонормована в $L^2(\Omega)$ система лінійно незалежних елементів простору $H^2(\Omega_R) \cap H^1_0(\Omega_R) \cap L^S(\Omega_R)$ таких, що лінійні комбінації $\{\varphi_k\}$ є щільними в цьому просторі. При цьому функції c_k^N визначають як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int_{\Omega_R}\left[u_{tt}^N\varphi_k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^N\varphi_{k,x_j} + \left|u_t^N\right|^{p-2}u_t^N\varphi_k - f^R(x,t)\varphi_k\right]dx = 0, \tag{8}$$

$$c_k^N(0) = u_{0,k}^{R,N}(x), \quad c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^{R,N}(x), \quad k = 1,\ldots,N, \tag{9}$$

$$u_0^{R,N}(x) = \sum_{k=1}^N u_{0,k}^{R,N}\varphi_k(x), \quad u_1^{R,N}(x) = \sum_{k=1}^N u_{1,k}^{R,N}\varphi_k(x),$$

$$\left\|u_0^{R,N} - u_0^R\right\|_{H^2(\Omega_R)} \to 0, \quad \left\|u_1^{R,N} - u_1^R\right\|_{L^S(\Omega_R)\cap H_0^1(\Omega_R)} \to 0, \quad N\to+\infty.$$

За теоремою Каратеодорі [14] існує неперервний розв'язок задачі (8), (9), що має абсолютно неперервну похідну, визначений на деякому проміжку $[0, t_0]$, $t_0 \le T$. З апріорних оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $t_0 = T$. Крім того, за умов теореми на функцію f систему (8) можна почленно диференціювати за змінною t.

Помножимо кожне рівняння (8) відповідно на функції c_{kt}^N, підсумуємо по k від 1 до N та зінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau\le T$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int_{Q_{R,\tau}}\left[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^N u_{x_jt}^N + \left|u_t^N\right|^p - f^R(x,t)u_t^N\right]dx\,dt = 0. \tag{10}$$

Оскільки

$$\int_{Q_{R,\tau}} u_{tt}^N u_t^N\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_R}\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_R}\left|u_1^{R,N}(x)\right|^2dx,$$

$$\int_{Q_{R,\tau}}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^N u_{x_jt}^N\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_R}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^N(x,\tau)u_{x_j}^N(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_R}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0)u_{x_i}^{R,N}(x)u_{x_j}^{R,N}(x)dx \ge$$

$$\ge \frac{a_0}{2}\int_{\Omega_R}\left|\nabla u^N(x,\tau)\right|^2dx - \frac{a_1 n}{2}\int_{\Omega_R}\left|\nabla u_0^{R,N}(x)\right|^2dx,$$

$$a_1 = \max_{i,j}\sup_{x\in\Omega}\left|a_{ij}(x)\right|,$$

$$\int_{Q_{R,\tau}} f^R(x,t)u_t^N\,dx\,dt \le \frac{1}{q}\int_{Q_{R,\tau}}\left|u_t^N\right|^q dx\,dt + \frac{1}{r}\int_{Q_{R,\tau}}\left|f^R(x,t)\right|^r dx\,dt,$$

де $q = p$ при $p\ge 2$ і $q = 2$ при $p\in(1,2)$, то з (10) (використовуючи лему Гронуолла при $p\in(1,2)$) одержимо оцінки

$$\int_{\Omega_R}\left(\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2 + \left|\nabla u^N(x,\tau)\right|^2\right)dx \le C_1, \quad \tau\in[0;T], \tag{11}$$

$$\int\limits_{Q_{R,T}} \left|u_t^N(x,\tau)\right|^p dx\,dt \;\le\; C_1 . \tag{12}$$

Зазначимо, що стала C_1 не залежить від N.

Здиференціюємо систему (8) за змінною t, помножимо на c_{ktt}^N, підсумуємо по k від 1 до N та зінтегруємо результат по проміжку $[0;\tau]$, $\tau \le T$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} \left[u_{ttt}^N u_{tt}^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t}^N u_{x_j tt}^N + (p-1)\left|u_t^N\right|^p - f_t^R(x,t) u_{tt}^N \right] dx\,dt \;=\; 0 . \tag{13}$$

Перетворимо й оцінимо інтеграли рівності (13):

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} u_{ttt}^N u_{tt}^N dx\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_R} \left(\left|u_{tt}^N(x,\tau)\right|^2 - \left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 \right) dx ,$$

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t}^N u_{x_j tt}^N \,dx\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{R,\tau}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t}^N u_{x_j t}^N \right)_t dx\,dt \;=$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_R} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t}^N(x,\tau) u_{x_j t}^N(x,\tau) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t}^N(x,0) u_{x_j t}^N(x,0) \right) dx \;\ge$$

$$\ge\; \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_R} \left|\nabla u_t^N(x,\tau)\right|^2 dx - \frac{a_1 n}{2}\int\limits_{\Omega_R} \left|\nabla u_1^{R,N}(x)\right|^2 dx ,$$

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} f_t^R(x,t) u_{tt}^N dx\,dt \;\le\; \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{R,\tau}} \left|u_{tt}^N\right|^2 dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{R,\tau}} \left|f_t^R(x,t)\right|^2 dx\,dt .$$

Використовуючи наведені оцінки, одержуємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \left[\left|u_{tt}^N(x,\tau)\right|^2 + a_0\left|\nabla u_t^N(x,\tau)\right|^2 \right] dx \;\le$$

$$\le\; \int\limits_{Q_{R,\tau}} \left|u_{tt}^N\right|^2 dx\,dt + \int\limits_{Q_{R,\tau}} \left|f_t^R(x,t)\right|^2 dx\,dt + \int\limits_{\Omega_R} \left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dx \;+$$

$$+\; n a_1 \int\limits_{\Omega_R} \left|\nabla u_1^{R,N}(x)\right|^2 dx . \tag{14}$$

Розглянемо рівність (8) при $t = 0$ і помножимо її на $c_{ktt}^N(0)$. Після підсумовування по k від 1 до N одержимо

$$\int\limits_{\Omega_R} \left[\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) u_{x_i}^N(x,0) \right)_{x_j} u_{tt}^N(x,0) \right] dx \;+$$

$$+\; \int\limits_{\Omega_R} \left[\left|u_t^N(x,0)\right|^{p-2} u_t^N(x,0) u_{tt}^N(x,0) - f^R(x,0) u_{tt}^N(x,0) \right] dx \;=\; 0 . \tag{15}$$

Оцінимо інтеграли рівності (15):

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) u_{x_i}^N(x,0) \right)_{x_j} u_{tt}^N(x,0)\,dx \;=$$

$$= \int\limits_{\Omega_R} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij,x_j}(x) u_{x_i}^N(x,0) u_{tt}^N(x,0)\,dx + \int\limits_{\Omega_R} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}^N(x,0) u_{tt}^N(x,0)\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{8} \int\limits_{\Omega_R} \left| u_{tt}^N(x,0) \right|^2 dx + 2a_2^2 n^3 \int\limits_{\Omega_R} \left| \nabla u^N(x,0) \right|^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{8} \int\limits_{\Omega_R} \left| u_{tt}^N(x,0) \right|^2 dx + 2a_1^2 n^2 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{i,j=1}^{n} \left(u_{0,x_i x_j}^{R,N}(x) \right)^2 dx,$$

де $a_2 = \max\limits_{i,j} \operatorname*{essup}\limits_{x\in\Omega} \left| a_{ij,x_j}(x) \right|$;

$$\int\limits_{\Omega_R} \left| u_t^N(x,0) \right|^{p-2} u_t^N(x,0) u_{tt}^N(x,0)\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_R} \left[\frac{1}{8} \left| u_{tt}^N(x,0) \right|^2 + 2 \left| u_t^N(x,0) \right|^{2p-2} \right] dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_R} f^R(x,0) u_{tt}^N(x,0)\,dx \le \frac{1}{8} \int\limits_{\Omega_R} \left| u_{tt}^N(x,0) \right|^2 dx + 2 \int\limits_{\Omega_R} \left| f^R(x,0) \right|^2 dx.$$

На підставі наведених оцінок з (15) одержуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_R} \left| u_{tt}^N(x,0) \right|^2 dx \le 4 \int\limits_{\Omega_R} \left[a_1^2 n^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(u_{0,x_i x_i}^{R,N}(x) \right)^2 + \left| f^R(x,0) \right|^2 \right] dx +$$

$$+ 4 \int\limits_{\Omega_R} \left[a_2^2 n^3 \left| \nabla u_1^{R,N}(x) \right|^2 + \left| u_1^{R,N}(x) \right|^{2p-2} \right] dx. \tag{16}$$

Використовуючи лему Гронуолла, з (14) та (16) маємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_R} \left| u_{tt}^N(x,\tau) \right|^2 dx \le C_2, \quad \int\limits_{\Omega_R} \left| \nabla u_t^N(x,\tau) \right|^2 dx \le C_2, \quad \tau \in [0;T], \tag{17}$$

де стала C_2 не залежить від N. Крім того, використовуючи (12), отримуємо

$$\int\limits_{Q_{R,T}} \left| \left| u_t^N \right|^{p-2} u_t^N \right|^{p'} dx\,dt \le C_3, \tag{18}$$

де C_3 не залежить від N.

Отже, на підставі оцінок (11), (12), (17), (18) існує така підпослідовність $\{u^{N_k}\}$ послідовності $\{u^N\}$, що

$$u^{N_k} \to u^R \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty\big((0;T); H_0^1(\Omega_R)\big) \quad \text{і слабко в} \quad L^2\big((0;T); H_0^1(\Omega_R)\big),$$

$$u_t^{N_k} \to v \quad \text{слабко в} \quad L^2\big((0;T); H_0^1(\Omega_R)\big) \quad \text{і слабко в} \quad L^p(Q_{R,T}).$$

Зауважимо, що $v = u_t^R$ [15, с. 123]. Крім того,

$$u_t^{N_k} \to u_t^R \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty\big((0;T); H_0^1(\Omega_R)\big),$$

$$u_{tt}^{N_k} \to u_{tt}^R \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty\big((0;T); L^2(\Omega_R)\big) \quad \text{і слабко в} \quad L^2\big((0;T); L^2(\Omega_R)\big),$$

$$\left|u_t^{N_k}\right|^{p-2} u_t^{N_k} \to \chi^R \quad \text{слабко в} \quad L^{p'}(Q_{R,T})$$

при $N_k \to \infty$. Використовуючи теорему 5.1 [13, c. 70], без обмеження загальності можемо вважати, що

$$u_t^{N_k} \to u_t^R \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_{R,T})$$

і майже скрізь $u_t^{N_k} \to u_t^R$ в $Q_{R,T}$ при $N_k \to \infty$. Отже, $\chi^R = \left|u_t^R\right|^{p-2} u_t^R$.

Аналогічно до того, як це зроблено при доведенні теореми 1.1 [13, c. 20], одержуємо, що $u^R \in C\big([0;T]; H_0^1(\Omega_R)\big)$, $u_t^R \in C\big([0;T];\ L^2(\Omega_R)\big)$ і функція u^R задовольняє умови (7). Знову використовуючи схему доведення теореми 1.1 [13, c. 20], з отриманих вище збіжностей легко отримуємо, що для функції u^R виконується тотожність

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} \left[u_{tt}^R v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}^R v_{x_j} + \left|u_t^R\right|^{p-2} u_t^R v - f^R(x,t) v \right] dx\,dt = 0 \tag{19}$$

для всіх $v \in L^2\big((0;T); H_0^1(\Omega_R)\big) \cap L^p(Q_{R,T})$ і всіх $\tau \in (0;T]$. Таким чином, з (19) випливає, що u^R є розв'язком рівняння

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + |u_t|^{p-2} u_t = f^R(x,t) \tag{20}$$

в області $Q_{R,T}$ в сенсі розподілів. Крім того, функція u^R задовольняє умову (6) і включення

$$u_t^R \in L^2\big((0;T); H_0^1(\Omega_R)\big) \cap L^p(Q_{R,T}), \qquad u_{tt}^R \in L^\infty\big((0;T); L^2(\Omega_R)\big).$$

Продовжимо функцію u^R з нулем на область $Q \setminus Q_{R,T}$ і збережемо для неї те ж позначення. Нехай R набуває значення m з множини $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді одержимо послідовність функцій $\{u^m\}$. Нехай $R_0 > 1$ — довільне фіксоване число. Розглянемо множину

$$\mathcal{B}_{R_0} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < R_0,\ t = T\right\}.$$

Позначимо $\mathcal{B}_{R_0,Q} = \mathcal{B}_{R_0} \cap \overline{Q}$. Побудуємо характеристичний конус рівняння (1) з вершиною в довільній точці (x_0, T) множини $\mathcal{B}_{R_0,Q}$. Нехай поверхня цього конуса задається рівнянням $\omega(x,t) = 0$ у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$. Відомо [1, c. 125], що функція ω є розв'язком диференціального рівняння $\omega_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \omega_{x_i} \omega_{x_j} = 0$. Позначимо через $K_{R_0}(x_0, T) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \omega(x,t) \le 0\right\}$ конус з вершиною в довільній точці (x_0, T), $D_{R_0}^\tau = \left(\bigcup_{(x_0,T) \in \mathcal{B}_{R_0,Q}} K_{R_0}(x_0,T)\right) \cap Q_\tau$, $\tau \in (0;T]$. Зазначимо, що границя області $D_{R_0}^\tau$ складається з частини $\Omega_{R_0}^0$ гіперплощини $\{t = 0\}$, частини $\Omega_{R_0}^\tau$ гіперплощини $\{t = \tau\}$, частини $S_{R_0}^\tau$ поверхні S_τ і характеристичної поверхні $\sum_{R_0}^\tau$ рівняння (1). Існує таке $m_{R_0} \in \mathbb{N}$, що $D_{R_0}^T \subset Q_{m_{R_0},T}$. Покажемо, що для всіх $m > m_{R_0} + 1$ майже скрізь в $D_{R_0}^T$ правильною є рівність $u^m(x,t) = u^{m_{R_0}+1}(x,t)$. Для цього запишемо рівняння (20) для функцій $u^{m_{R_0}+1}$ і u^m, віднімемо від другого рівняння перше, по множимо різницю на функцію $u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}$ і зінтегруємо результат по області $D_{R_0}^{\tau}$, $\tau \in (0; T]$. Після виконання цих операцій отримаємо рівність

$$\int\limits_{D_{R_0}^{\tau}} \Bigg[\left(u_{tt}^m - u_{tt}^{m_{R_0}+1}\right)\left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)\left(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1}\right)\right)_{x_j} \left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right) +$$

$$+ \left(\left|u_t^m\right|^{p-2} u_t^m - \left|u_t^{m_{R_0}+1}\right|^{p-2} u_t^{m_{R_0}+1}\right)\left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right)\Bigg] dx\, dt = 0, \tag{21}$$

оскільки $f^m(x,t) = f^{m_{R_0}+1}(x,t)$ в області $D_{R_0}^T$. Крім того,

$$u_0^m(x) = u_0^{m_{R_0}+1}(x) = u_0(x), \qquad u_1^m(x) = u_1^{m_{R_0}+1}(x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega_{R_0}^0.$$

Перетворимо й оцінимо доданки рівності (21):

$$\int\limits_{D_{R_0}^{\tau}} \left[\left(u_{tt}^m - u_{tt}^{m_{R_0}+1}\right)\left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right) dx\, dt \right. =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{R_0}^{\tau}} \left|u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_{R_0}^{\tau}} \left|u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right|^2 \cos(\nu, t)\, dS_{x,t} -$$

$$- \int\limits_{D_{R_0}^{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1})\right)_{x_j} \left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right) dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{R_0}^{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1}\right)\left(u_{x_j}^m - u_{x_j}^{m_{R_0}+1}\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_{R_0}^{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1}\right)\left(u_{x_j}^m - u_{x_j}^{m_{R_0}+1}\right) \cos(\nu, t)\, dS_{x,t} -$$

$$- \int\limits_{\Sigma_{R_0}^{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1}\right)\left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right) \cos(\nu, x_j)\, dS_{x,t} \geq$$

$$\geq \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_{R_0}^{\tau}} \left|\nabla\left(u^m - u^{m_{R_0}+1}\right)\right|^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_{R_0}^{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1}\right)\left(u_{x_j}^m - u_{x_j}^{m_{R_0}+1}\right) \cos(\nu, t)\, dS_{x,t} -$$

$$- \int\limits_{\Sigma_{R_0}^{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1}\right)\left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1}\right) \cos(\nu, x_j)\, dS_{x,t},$$

ν — зовнішня нормаль до $\Sigma_{R_0}^T$,

$$\int\limits_{D_{R_0}^{\tau}} \left(\left| u_t^m \right|^{p-2} u_t^m - \left| u_t^{m_{R_0}+1} \right|^{p-2} u_t^{m_{R_0}+1} \right) \left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1} \right) dx\, dt \ \geq\ 0.$$

На підставі отриманих оцінок з (21) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}^{\tau}} \left(\left| u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1} \right|^2 + a_0 \left| \nabla \left(u^m - u^{m_{R_0}+1} \right) \right|^2 \right) dx \ \leq\ 0, \quad \tau \in [0; T], \tag{22}$$

оскільки поверхня $\sum_{R_0}^{T}$ є характеристичною для рівняння (1), і, отже, беручи до уваги [2], маємо

$$\int\limits_{\Sigma_{R_0}^{\tau}} \left| u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1} \right|^2 \cos(\nu, t)\, dS_{x,t} +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_{R_0}^{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \left(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1} \right) \left(u_{x_j}^m - u_{x_j}^{m_{R_0}+1} \right) \cos(\nu, t)\, dS_{x,t} -$$

$$- 2 \int\limits_{\Sigma_{R_0}^{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \left(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m_{R_0}+1} \right) \left(u_t^m - u_t^{m_{R_0}+1} \right) \cos(\nu, x_j)\, dS_{x,t} \ \geq\ 0.$$

Тоді з (22) отримуємо $u^m(x,t) = u^{m_{R_0}+1}(x,t)$, $(x,t) \in D_{R_0}^T$, для всіх $m > m_{R_0+1}$.

Нехай тепер R_0 набуває значення з множини $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Визначимо функцію u таким чином: $u(x,t) = u^{m_k+1}(x,t)$, $(x,t) \in D_k^T$, $k = 2, 3, 4, \ldots$.

Для доведення єдиності розв'язку припускаємо існування двох розв'язків $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ задачі (1) – (4). Тоді, вибираючи довільну область $D_{R_0}^T$, одержуємо рівність вигляду (22), з якої й випливає, що $u^{(1)}(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ в $D_{R_0}^T$. На підставі довільності R_0 маємо $u^{(1)}(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ в Q.

Теорему доведено

Одержимо тепер достатні умови існування та єдиності періодичного за просторовими змінними розв'язку задачі (1) – (4).

Позначимо через $e^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ n-вимірний вектор, i-та координата якого дорівнює 1, а всі інші є нулями $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *та існують такі числа* $T_0 > 0$ *і* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *що*:

а) $x \pm T_0 e^k \in \Omega$ *для довільних* $x \in \Omega$;

б) $a_{ij}(x + T_0 e^k) = a_{ij}(x)$ *для всіх* $x \in \Omega$, $i, j = 1, \ldots, n$;

в) $f(x + T_0 e^k, t) = f(x,t)$ *для майже всіх* $(x,t) \in Q$;

г) $u_0(x + T_0 e^k) = u_0(x)$, $u_1(x + T_0 e^k) = u_1(x)$ *для майже всіх* $x \in \Omega$.

Тоді існує єдиний розв'язок u *задачі* (1) – (4), *що є періодичною функцією за змінною* x_k *з періодом* T_0.

Доведення. Оскільки виконуються умови теореми 1, то існує єдиний розв'язок u задачі (1) – (4). Функція $u(x + T_0 e^k, t)$, $(x,t) \in Q$, також є розв'язком задачі (1) – (4). Тоді з єдиності розв'язку випливає, що $u(x + T_0 e^k, t) = u(x, t)$ для майже всіх $(x, t) \in Q$.

Теорему доведено.

1. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Гостехиздат, 1950. – 303 с.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
3. *Carpio A.* Existence of global solutions to some nonlinear dissipative wave equations // J. math. pures et appl. – 1994. – **73**, № 5. – P. 471 – 488.
4. *Rubino B.* Weak solutions to quasilinear wave equations of Klein – Gordon or Sine – Gordon type and relaxation to reaction-diffusion equations // Nonlinear Different. Equat. and Appl. – 1997. – № 4. – P. 439 – 457.
5. *Vittilaro E.* Global nonexistence theorems for a class of evolution equation with dissipation // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1999. – **149**, № 2. – P. 155 – 182.
6. *Pecher H.* Sharp existence results for self-similar solutions of semilinear wave equations // Nonlinear Different. Equat. and Appl. – 2000. – № 7. – P. 323 – 341.
7. *Agre K., Rammaha M. A.* Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions // Different. and Integr. Equat. – 2001. – **14**. – P. 1315 – 1331.
8. *Todorova G., Yordanov B.* Critical exponent for a nonlinear wave equations with damping // J. Different. Equat. – 2001. – № 174. – P. 464 – 489.
9. *Пукач П. Я.* Мішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С.149 – 154.
10. *Пукач П. Я.* Мішана задача в необмеженій за просторовими змінними області для нелінійної гіперболічної системи другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 214 – 231.
11. *Лавренюк С. П., Оліскевич М. О.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1356 – 1370.
12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
13 *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 587 с.
14. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.
15. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

Одержано 13.03.06