УДК 517

А. А. Калюжный*, **Г. Б. Подколзин, Ю. А. Чаповский***
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАХОЖДЕНИЕ КОЦИКЛОВ В КОНСТРУКЦИИ ДВОЙНОГО СКРЕЩЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП ЛИ

We find an explicit formula for finding pairs of cocycles for constructing examples of locally compact quantum groups via the bicrossed product construction for Lie groups.

Отримано явну формулу для знаходження пар коциклів для побудови прикладів локально компактних квантових груп за допомогою подвійного схрещеного добутку груп Лі.

Введение. Конструкция двойного скрещенного произведения групп с коциклами была введена Г. И. Кацем в [1] для построения примеров конечных кольцевых групп, сейчас известных как конечные алгебры Каца. Затем эта конструкция была обобщена для построения примеров локально компактных квантовых групп в [2], алгебр Хопфа в [3]. Аналогичная конструкция применима к биалгебрам Ли (см., например, [3]).

Данная конструкция позволяет построить две некоммутативные алгебры фон Неймана, находящиеся в двойственности, путем рассмотрения пары согласованных групп, действующих друг на друге как на множествах, и пары функций, называемых коциклами, удовлетворяющих некоторым соотношениям (см. определения 1, 2). Группа классов эквивалентности пар коциклов описана для конечных групп в [1] и для локально компактных групп в [4] (см. также [5]). Целью настоящей статьи является получение формулы для нахождения пары коциклов в явном виде в случае, когда группы являются группами Ли, с использованием пары коциклов на соответствующей паре согласованных алгебр Ли.

Предлагаемая статья является расширенным вариантом работы [6].

1. Обозначения и определения. Всюду далее, если не оговорено иное, G, H, K — связные конечномерные группы Ли, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ — соответствующие алгебры Ли. Элементы групп G, H, K обозначаются $g, g_1, \ldots,$ $h, h_1, \ldots$ и k, $k_1, \ldots$ соответственно. Определение коциклов на группе и алгебре Ли см. в [7].

Определение 1. *Пара (G, H) называется парой согласованных групп Ли, если существуют дифференцируемые отображения $\triangleleft\colon H \times G \to H$ и $\triangleright\colon H \times \times G \to G$, являющиеся соответственно правым действием группы G на H и левым действием H на G и удовлетворяющие соотношениям*

$$(h_1 h_2) \triangleleft g = (h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g))(h_2 \triangleleft g), \tag{1}$$

$$h \triangleright (g_1 g_2) = (h \triangleright g_1)((h \triangleleft g_1) \triangleright g_2). \tag{2}$$

Пусть $K = G \times H$ с умножением

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot (h_1 \triangleright g_2), (h_1 \triangleleft g_2) \cdot h_2).$$

* Частично поддержаны Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект № 01.01.071).

Известно [1], что если G и H — конечные группы, то K — также группа. Очевидно, что если G, H — группы Ли, то K — также группа Ли. Далее, группу K обозначим $G \cdot H$, а элемент $(g,h) \in K$ — $g \cdot h$ или gh.

Определение 2. *Пусть* (G,H) — *пара согласованных групп Ли,* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$. *Пара дифференцируемых функций* (u,v), $u \colon H \times G \times G \to \mathbb{T}$, $v \colon H \times H \times G \to \mathbb{T}$ *называется парой коциклов на* (G,H), *если*

$$u(h_1 \triangleleft g_2, g_3, g_4) u(h_1, g_2, g_3 g_4) = u(h_1, g_2, g_3) u(h, g_2 g_3, g_4), \tag{3}$$

$$v(h_1, h_2, h_3 \triangleright g_4) v(h_1 h_2, h_3, g_4) = v(h_1, h_2 h_3, g_4) v(h_2, h_3, g_4), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} v(h_1, h_2, g_3 g_4) u(h_1 h_2, g_2, g_3) = v(h_1, h_2, g_3) u(h_2, g_3, g_4) \cdot \\ \cdot v(h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g_3), h_2 \triangleleft g_3, g_4)\, u(h_1, h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4). \end{gathered} \tag{5}$$

В последующем рассматриваются только нормализованные пары коциклов, т. е. удовлетворяющие также условию $u(h_1, g_2, g_3) = 1$, $v(h_1, h_2, g_3) = 1$, если по крайней мере один из элементов h_i, g_j в рассматриваемой формуле совпадает с единицей соответствующей группы.

Две пары коциклов (u_1, v_1) и (u_2, v_2) на согласованной паре (G,H) называются эквивалентными, если существует дифференцируемая функция $r \colon H \times G \to \mathbb{T}$ такая, что

$$\begin{gathered} u_1(h_1, g_2, g_3) u_2(h_1, g_2, g_3)^{-1} = r(h_1, g_2) r(h_1 \triangleleft g_2, g_3) r(h_1, g_2 g_3)^{-1}, \\ v_1(h_1, h_2, g_3) v_2(h_1, h_2, g_3)^{-1} = r(h_1 h_2, g_3) r(h_1, h_2 \triangleright g_3)^{-1} r(h_2, g_3)^{-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Множество классов эквивалентности $[u,v]$ пар коциклов на согласованной паре (G,H) образуют абелеву группу относительно поточечного умножения [1], т. е. $[u_1, v_1] \cdot [u_2, v_2] = [u_1 u_2, v_1 v_2]$. Эту группу далее обозначим через $E(G,H)$.

Пусть (G,H) — пара согласованных групп Ли и $K = G \cdot H$. Для пары (u,v) функций $u \colon H \times G \times G \to \mathbb{T}$ и $v \colon H \times H \times G \to \mathbb{T}$, следуя [5], рассмотрим функцию $f_{u,v} \colon K \times K \times K \to \mathbb{T}$, определенную как

$$f_{u,v}(k_1, k_2, k_3) = u(h_1, g_2, h_2 \triangleright g_3) v(h_1 \triangleleft g_2, h_2, g_3),$$

где $k_i = g_i h_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда, как следует из [5], пара (u,v) удовлетворяет (3)–(5) тогда и только тогда, когда $f_{u,v}$ является неоднородным 3-коциклом на группе K, равным 1, если один из элементов k_1, k_2, k_3 равен e_K. Кроме того, пары (u_1, v_1) и (u_2, v_2) удовлетворяют (6) тогда и только тогда, когда существует дифференцируемая функция $r \colon K \times K \to \mathbb{T}$ такая, что $r(k_1, k_2) = r(h_1, g_2)$ для всех $k_i = g_i h_i \in K$, $i = 1, 2$, и $f_{u_1,v_1} f_{u_2,v_2}^{-1} = d\,r$, где d — дифференциал на комплексе нормализованных неоднородных коцепей на K [5].

Используя [3], определим пару согласованных алгебр Ли следующим образом.

Определение 3. *Пара* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *алгебр Ли называется парой согласованных алгебр Ли, если существует алгебра Ли* $\mathfrak{k}$ *такая, что* $\mathfrak{g}$ *и* $\mathfrak{h}$ — *подалгебры Ли* $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$ *и* $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

Определение 4. *Пара линейных функционалов (U,V), где $U\colon \mathfrak{h}\otimes(\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g})\to\mathbb{R}$ и $V\colon (\mathfrak{h}\wedge\mathfrak{h})\otimes\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$, называется парой коциклов на согласованной паре алгебр Ли $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, если линейный функционал $F_{U,V}\colon \mathfrak{k}\wedge\mathfrak{k}\wedge\mathfrak{k}\to\mathbb{R}$, определенный как*

$$F_{U,V}(A_1+X_1,A_2+X_2,A_3+X_3)=U(X_1;A_2,A_3)+U(X_2;A_3,A_1)+$$

$$+U(X_3;A_1,A_2)+V(X_1,X_2;A_3)+V(X_2,X_3;A_1)+V(X_3,X_1;A_2), \qquad (7)$$

$A_i\in\mathfrak{g}$, $X_i\in\mathfrak{h}$, $i=1,2,3$, является 3-коциклом на алгебре Ли $\mathfrak{k}$. Две пары коциклов (U_1,V_1) и (U_2,V_2) называются эквивалентными, если существует линейный функционал $R\colon \mathfrak{k}\wedge\mathfrak{k}\to\mathbb{R}$ такой, что

$$F_{U_1,V_1}-F_{U_2,V_2}=dR,$$

где $F_{U,V}$ определяется формулой (4), и $R(A_1,A_2)=R(X_1,X_2)=0$ для всех $A_1,A_2\in\mathfrak{g}$, $X_1,X_2\in\mathfrak{h}$. Здесь d — дифференцирование в комплексе полилинейных антисимметричных форм на $\mathfrak{k}$ [7].

Это определение следует из [3, 8].

Как и для пары согласованных групп, множество классов эквивалентности пар $[U,V]$ коциклов на согласованной паре алгебр Ли образует абелеву группу, $[U_1,V_1]+[U_2,V_2]=[U_1+U_2,V_1+V_2]$. Эту группу обозначим $E(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

2. Действие на K и инвариантные векторные поля. Пусть (G,H) — пара согласованных групп Ли, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп Ли G и H соответственно, $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ — соответствующая пара согласованных алгебр Ли, $K=G\cdot H$ и $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}+\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}=\{0\}$.

Лемма 1. *Для $k_0=g_0h_0\in K$ рассмотрим отображение $\lambda_{k_0}\colon K\to K$, определенное посредством $\lambda_{g_0h_0}=\lambda_{g_0}\lambda_{h_0}$, где $\lambda_{g_0}\colon K\to K$ и $\lambda_{h_0}\colon K\to K$ задаются на $k=gh$ формулами*

$$\lambda_{g_0}(k)=(g_0g)\cdot(h\triangleleft g_0^{-1}), \qquad \lambda_{h_0}(k)=(h_0\triangleright g)\cdot(hh_0^{-1}). \qquad (8)$$

Тогда $\lambda\colon K\times K\to K$ — левое действие K на себе и

$$k=gh=\lambda_{g(h\triangleleft g)^{-1}}(e_K). \qquad (9)$$

Замечание. Действие, аналогичное (8), было введено в [1].

***Доказательство леммы* 1.** Формула (9) очевидна. То, что λ определяет левое действие G и H на K, следует непосредственно из (8) и того, что отображения $\triangleright$ и $\triangleleft$ есть левое и правое действия соответственно.

Осталось показать, что $\lambda_h\lambda_g=\lambda_{h\triangleright g}\lambda_{h\triangleleft g}$.

Применяя (1) к $(e_He_H)\triangleleft g$ и (2) к $h\triangleright(e_Ge_G)$, получаем $e_H\triangleleft g=e_H$ и $h\triangleright e_G=$ $=e_G$ для всех $g\in G$, $h\in H$. Рассматривая $e_H=(h_0^{-1}h_0)\triangleleft g_0$ и $e_G=h_0\triangleright(g_0g_0^{-1})$, имеем

$$(h_0\triangleleft g_0)^{-1}=h_0^{-1}\triangleleft(h_0\triangleright g_0), \qquad (h_0\triangleright g_0)^{-1}=(h_0\triangleleft g_0)\triangleright g_0^{-1}. \qquad (10)$$

Теперь

$$\lambda_{h_0}\lambda_{g_0}(gh)=(h_0\triangleright(g_0g))\cdot((h\triangleleft g_0^{-1})h_0^{-1}).$$

С другой стороны,

$$\lambda_{h_0 \triangleright g_0} \lambda_{h_0 \triangleleft g_0}(gh) = \lambda_{h_0 \triangleright g_0}\big(((h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g) \cdot (h(h_0 \triangleleft g_0)^{-1})\big) =$$

$$= (h_0 \triangleright g_0)\big((h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g\big) \cdot \big(h(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}\big) \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1}.$$

Однако, $(h_0 \triangleright g_0)\big((h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g\big) = h_0 \triangleright (g_0 g)$, а используя (10), имеем

$$(h(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}) \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1} =$$

$$= \big(h \triangleleft ((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleright (h_0 \triangleright g_0)^{-1})\big)\big((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1}\big) =$$

$$= \Big(h \triangleleft \big((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleright ((h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g_0^{-1})\big)\Big)\Big(\big(h_0^{-1} \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)\big) \triangleleft (h_0 \triangleright g_0^{-1})\Big) =$$

$$= (h \triangleleft g_0^{-1}) h_0^{-1}.$$

Лемма доказана.

Векторное поле $\eta\colon K \to T(K)$, $\eta_k \in T_k(K)$, на K назовем λ-инвариантным, если $\eta_{\lambda_{k_0}(k)} = (D\lambda_{k_0})_k \eta_k$ для всех $k, k_0 \in K$, где $T(K)$ — касательное расслоение K, а $(D\lambda_{k_0})_k\colon T_k(K) \to T_{\lambda_{k_0}(k)}(K)$ — отображение, касательное к λ_{k_0}. Легко видеть, что λ-инвариантные векторные поля на K образуют алгебру Ли, которую обозначим через $\tilde{\mathfrak{k}}$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы Ли K. Отождествим $\mathfrak{k}$ с алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей ξ на K и пусть $\tilde{\mathfrak{k}}$ — алгебра Ли λ-инвариантных векторных полей η на K. Пусть $\pi_G\colon K \to G$ и $\pi_H\colon K \to H$ — проекции $(g,h) \mapsto g$ и $(g,h) \mapsto h$ соответственно. Тогда отображение $\tau\colon \mathfrak{k} \to \tilde{\mathfrak{k}}$, определенное формулой*

$$(\tau(\xi))_k = (D\lambda_{g(h\triangleleft g)^{-1}})_{e_K} \circ (D\pi_G)_{e_K} \xi_{e_K} - (D\lambda_{g(h\triangleleft g)^{-1}})_{e_K} \circ (D\pi_H)_{e_K} \xi_{e_K}, \quad (11)$$

является изоморфизмом алгебр Ли $\mathfrak{k}$ и $\tilde{\mathfrak{k}}$.

Доказательство. Пусть $x_G = (x_G^1, \ldots, x_G^m)$, $m = \dim G$, и $x_H = (x_H^1, \ldots, x_H^n)$, $n = \dim H$, — системы координат на G и H в окрестностях единиц соответствующих групп, $x_K = (x_H^1, \ldots, x_G^m, x_H^1, \ldots, x_H^n)$ — система координат на K в окрестности e_K. Для $k_0 = g_0 h_0$ оператор левого сдвига на K будет $L_{k_0}(gh) = (g_0 h_0)(gh) = g_0(h_0 \triangleright g) \cdot (h_0 \triangleleft g)h$ и, следовательно,

$$(DL_{k_0})_{e_K} = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_G(g_0(h_0 \triangleright g))}{\partial x_G(g)} & 0 \\ \dfrac{\partial x_H(h_0 \triangleleft g)}{\partial x_G(g)} & \dfrac{\partial x_H(h_0 h)}{\partial x_H(h)} \end{pmatrix}\right|_{\substack{g=e_G \\ h=e_H}}.$$

Рассмотрим левоинвариантные поля $(\xi_i)_{k_0} = (DL_{k_0})_{e_K} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_G^i}\right)_{e_K}$ и $(\xi_j)_{k_0} = (DL_{k_0})_{e_K} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_H^j}\right)_{e_K}$, т. е.

$$(\xi_i)_{k_0} = \left.\frac{\partial x_G^r(g_0(h_0 \triangleright g))}{\partial x_G^i(g)}\right|_{g=e_G} \left(\frac{\partial}{\partial x_G^r}\right)_{g_0} + \left.\frac{\partial x_H^s(h_0 \triangleleft g)}{\partial x_G^i(g)}\right|_{g=e_G} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^s}\right)_{h_0},$$

$$(\xi_j)_{k_0} = \left.\frac{\partial x_H^s(h_0 h)}{\partial x_H^j(h)}\right|_{h=e_H} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^s}\right)_{h_0}.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование. Тогда непосредственные вычисления показывают, что

$$\big([\xi_{i_1},\xi_{i_2}]\big)_{e_K} = \left.\left(\frac{\partial^2 x_G^r(g_0 g)}{\partial x_G^{i_1}(g_0)\partial x_G^{i_2}(g)} - \frac{\partial^2 x_G^r(g_0 g)}{\partial x_G^{i_2}(g_0)\partial x_G^{i_1}(g)}\right)\right|_{\substack{g=e_G\\ g_0=e_G}} \left(\frac{\partial}{\partial x_G^r}\right)_{e_G},$$

$$\big([\xi_i,\xi_j]\big)_{e_K} = -\left(\frac{\partial^2 x_G^r(h_0 \triangleright g)}{\partial x_H^j(h_0)\partial x_G^i(g)}\left(\frac{\partial}{\partial x_G^r}\right)_{e_G} + \right.$$

$$\left.\left. + \ \frac{\partial^2 x_H^s(h_0 \triangleleft g)}{\partial x_H^j(h_0)\partial x_G^i(g)}\left(\frac{\partial}{\partial x_H^s}\right)_{e_H}\right)\right|_{\substack{g=e_G\\ h_0=e_H}}, \tag{12}$$

$$\big([\xi_{j_1},\xi_{j_2}]\big)_{e_K} =$$

$$= \left.\left(\frac{\partial^2 x_H^s(h_0 h)}{\partial x_H^{j_1}(h_0)\partial x_H^{j_2}(h)} - \frac{\partial^2 x_H^s(h_0 h)}{\partial x_H^{j_2}(h_0)\partial x_H^{j_1}(h)}\right)\right|_{\substack{h=e_H\\ h_0=e_H}} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^s}\right)_{e_H}.$$

Используя (10), записываем $\lambda_{g_0(h_0\triangleleft g_0)^{-1}}(gh) = g_0\big((h_0\triangleleft g_0)^{-1}\triangleright g\big)\cdot\big(h\triangleleft(h_0\triangleright g_0)^{-1}\big)h_0$. Следовательно,

$$\big(D\lambda_{g_0(h_0\triangleleft g_0)^{-1}}\big)_{e_K} = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_G(g_0((h_0\triangleleft g_0)^{-1}\triangleright g))}{\partial x_G(g)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial x_H((h\triangleleft(h_0\triangleright g_0)^{-1})h_0)}{\partial x_H(h)} \end{pmatrix}\right|_{\substack{g=e_G\\ h=e_H}}.$$

Пусть $\eta_i = \tau(\xi_i)$ и $\eta_j = \tau(\xi_j)$. Тогда

$$(\eta_i)_{k_0} = \left.\frac{\partial x_G^r(g_0((h_0\triangleleft g_0)^{-1}\triangleright g))}{\partial x_G^i(g)}\right|_{g=e_G}\left(\frac{\partial}{\partial x_G^r}\right)_{g_0},$$

$$(\eta_j)_{k_0} = -\left.\frac{\partial x_H^s((h\triangleleft(h_0\triangleright g_0)^{-1})h_0)}{\partial x_H^j(h)}\right|_{h=e_H}\left(\frac{\partial}{\partial x_H^s}\right)_{h_0}.$$

Доказательство завершает непосредственное вычисление значения коммутаторов в $k_0 = e_K$ и сравнение с формулами (12).

3. Построение гомоморфизма из $E(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ в $E(G,H)$. Обозначим $I = [0,1]$. Пусть отображения $\gamma_G\colon I\times G\to G$ и $\gamma_H\colon I\times H\to H$,

$$(u,g)\mapsto\gamma_G^u(g), \qquad (u,h)\mapsto\gamma_H^u(h), \quad u\in I,$$

дифференцируемы и

$$\begin{aligned} \gamma_G^1(g) &= g, & \gamma_G^0(g) &= e_G, \\ \gamma_H^1(h) &= h, & \gamma_H^0(h) &= e_H \end{aligned} \tag{13}$$

для всех $g\in G$, $h\in H$.

Пусть

$$\Delta^1 = \{t_1 \in \mathbb{R} \mid 0 \le t_1 \le 1\},$$

$$\Delta^2 = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1, t_2 \ge 0;\ t_1 + t_2 \le 1\}$$

— стандартные 1- и 2-симплексы. Обозначим $\Delta^{2,1} = \Delta^1 \times \Delta^2$ и $\Delta^{1,2} = \Delta^2 \times \Delta^1$. Будем рассматривать $\Delta^{2,1} \subset \mathbb{R}^3$ и $\Delta^{1,2} \subset \mathbb{R}^3$ с координатными функциями, являющимися ограничениями канонических координат (t_1, t_2, t_3) в $\mathbb{R}^3$, и ориентацией, индуцированной базисом $\left(\dfrac{\partial}{\partial t_1}, \dfrac{\partial}{\partial t_2}, \dfrac{\partial}{\partial t_3}\right)$. Аналогично [7] рассмотрим функции $s_1\colon \Delta^1 \to I$ и $s_2\colon \Delta^2 \to I$, заданные посредством формул

$$s_1(t_1) = 1 - t_1, \qquad s_2(t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{1 - t_1 - t_2}{1 - t_1}, & 1 - t_1 \ne 0, \\ 0, & 1 - t_1 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Для фиксированных $g_1,\ g_2 \in G$ и $h_1,\ h_2 \in H$ определим отображения $\Delta^1_G(g_1)\colon \Delta^1 \to G$, $\Delta^2_G(g_1, g_2)\colon \Delta^2_G \to G$ и $\Delta^1_H(h_1)\colon \Delta^1 \to H$, $\Delta^2_H(h_1, h_2)\colon \Delta^2 \to H$ следующими формулами:

$$\begin{gathered} \Delta^1_G(g_1)(t_1) = \gamma_G^{s_1(t_1)}(g_1), \qquad \Delta^2_G(g_1, g_2)(t_1, t_2) = \gamma_G^{s_1(t_1)}\big(g_1 \gamma_G^{s_2(t_1,t_2)}(g_2)\big), \\ \Delta^1_H(h_1)(t_1) = \gamma_H^{s_1(t_1)}(h_1), \qquad \Delta^2_H(h_1, h_2)(t_1, t_2) = \gamma_H^{s_1(t_1)}\big(\gamma_H^{s_2(t_1,t_2)}(h_1) h_2\big). \end{gathered} \tag{15}$$

Наконец, для каждой из троек $(h_1, g_2, g_3) \in H \times G \times G$ и $(h_1, h_2, g_3) \in H \times H \times G$ определим отображения $\sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3)\colon \Delta^{2,1} \to K$ и $\sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3)\colon \Delta^{1,2} \to K$ как

$$\begin{aligned} \sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3)(t_1, t_2, t_3) &= \Delta^2_G(g_2, g_3)(t_2, t_3) \cdot \Delta^1_H(h_1)(t_1), \\ \sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3)(t_1, t_2, t_3) &= \Delta^1_G(g_3)(t_3) \cdot \Delta^2_H(h_1, h_2)(t_1, t_2) \end{aligned} \tag{16}$$

и обозначим через $c^{2,1}(h_1, g_2, g_3) = (\Delta^{2,1}, \sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3))$ и $c^{1,2}(h_1, h_2, g_3) = (\Delta^{1,2}, \sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3))$ соответствующие цепи в K.

Теорема. *Пусть (G, H) — пара согласованных связных групп Ли, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — пара соответствующих алгебр Ли. Пусть γ_G и γ_H удовлетворяют* (13) *и такие, что*

$$h \triangleright \gamma_G^u(g) = \gamma_G^u(h \triangleright g), \qquad \gamma_H^u(h) \triangleleft g = \gamma_H^u(h \triangleleft g) \tag{17}$$

для всех $g \in G$, $h \in H$ и $u \in [0,1]$. Рассмотрим $(D\gamma_G^u)_g\colon T_g(G) \to T_{\gamma_G^u(g)}(G)$ и $(D\gamma_H^u)_h\colon T_h(H) \to T_{\gamma_H^u(h)}(H)$. Предположим, что $(D\gamma_G^u)_g \to 0$ и $(D\gamma_H^u)_h \to 0$ при $u \to 0$. Для пары коциклов (U, V), $[U, V] \in E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, зададим λ-инвариантную дифференциальную 3-форму на K как

$$\omega_{U,V} = (\tau^{-1})^*(F_{U,V}), \tag{18}$$

где $F_{U,V}$ определено в (7), *а τ — в* (11), *и функции $\tilde{u}\colon G \times G \times H \to \mathbb{R}$ и $\tilde{v}\colon H \times H \times G \to \mathbb{R}$ посредством несобственных интегралов*

$$\tilde{u}(h_1, g_2, g_3) = \int\limits_{c^{2,1}(h_1,g_2,g_3)} \omega_{U,V}, \qquad \tilde{v}(h_1, h_2, g_3) = \int\limits_{c^{1,2}(h_1,h_2,g_3)} \omega_{U,V}. \tag{19}$$

Тогда интегралы в (19) *сходятся, а отображение* $\mathrm{Int} : E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \to E(G, H)$, *заданное посредством*

$$\mathrm{Int}\left([U, V]\right) = [e^{i\tilde{u}}, e^{i\tilde{v}}],$$

корректно определено и является гомоморфизмом групп.

Для доказательства теоремы рассмотрим стандартный 3-симплекс

$$\Delta^3 = \left\{(t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0;\ t_1 + t_2 + t_3 \leq 1\right\},$$

и функцию $s_3 \colon \Delta^3 \to I$, заданную следующим образом:

$$s_3(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \dfrac{1 - t_1 - t_2 - t_3}{1 - t_1 - t_2}, & 1 - t_1 - t_2 \neq 0, \\ 0, & 1 - t_1 - t_2 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Для $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq i, j \leq 3$, $i + j > 0$, обозначим

$$\Delta^{i,j} = \begin{cases} \Delta^j \times \Delta^i, & i \neq 0,\ j \neq 0, \\ \Delta^j, & i = 0,\ j \neq 0, \\ \Delta^i, & i \neq 0,\ j = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Для фиксированных $g_1, \ldots, g_i \in G$ и $h_1, \ldots, h_j \in H$, $1 \leq i, j \leq 3$, рассмотрим отображения $\Delta^i_G(g_1, \ldots, g_i) \colon \Delta^i \to G$ и $\Delta^j_H(h_1, \ldots, h_j) \colon \Delta^j \to H$, заданные формулами

$$\Delta^i_G(g_1, \ldots, g_i)(t_1, \ldots, t_i) = \gamma_G^{s_1(t_1)}\big(g_1 \gamma_G^{s_2(t_1,t_2)}(\ldots \gamma_G^{s_i(t_1,\ldots,t_i)}(g_i) \ldots)\big),$$

$$\Delta^j_H(h_1, \ldots, h_j)(t_1, \ldots, t_j) = \gamma_H^{s_1(t_1)}\big(\gamma_H^{s_2(t_1,t_2)} \ldots (\gamma_H^{s_j(t_1,\ldots,t_j)}(h_1) h_2) \ldots h_j\big), \tag{22}$$

$$\Delta^0_G = e_G, \qquad \Delta^0_H = e_H.$$

Здесь s_1, s_2 заданы формулой (14), а s_3 задано формулой (20). Для $i, j \geq 0$, $0 < i + j \leq 4$, определим $\sigma^{i,j}(h_1, \ldots, h_j, g_{j+1}, \ldots g_{j+i}) \colon \Delta^{i,j} \to K$ как

$$\sigma^{i,j}(h_1, \ldots, h_j, g_{j+1}, \ldots, g_{j+i})(t_1, \ldots, t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+i}) =$$
$$= \Delta^i_G(g_{j+1}, \ldots, g_{j+i})(t_{j+1}, \ldots, t_{j+i}) \cdot \Delta^j_H(h_1, \ldots, h_j)(t_1, \ldots, t_j).. \tag{23}$$

Многообразия $\Delta^{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 3$, $0 < i + j \leq 4$, рассматриваются в $\mathbb{R}^{j+i}$ с координатными функциями $(t_1, \ldots, t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+i})$ и ориентацией, определяемой базисом $\left(\dfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t_j}, \dfrac{\partial}{\partial t_{j+1}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t_{j+i}}\right)$. Обозначим через $c^{i,j}(h_1, \ldots, h_j, g_{j+1}, \ldots \ldots g_{j+i}) = \left(\Delta^{i,j}, \sigma^{i,j}(h_1, \ldots, h_j, g_{j+1}, \ldots, g_{j+i})\right)$ соответствующие цепи в K.

Следующая лемма имеет вспомогательный характер.

Лемма 3. *Для $i, j \geq 0$, $0 < i+j \leq 4$, рассмотрим отображения $\theta^{i,j} : \Delta^{i,j} \to$ $\to I^{j+i}$, заданные следующим образом*:

$$\theta^{i,j}(t_1, \ldots, t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+i}) =$$
$$= (s_1(t_{j+1}), \ldots, s_i(t_{j+1}, \ldots, t_{j+i}), s_1(t_1), \ldots, s_j(t_1, \ldots, t_j)),$$

если $i, j > 0$, и для $i \leq 3$ и $j \leq 3$

$$\begin{aligned} \theta^{i,0}(t_1, \ldots, t_i) &= (s_1(t_1), \ldots, s_i(t_1, \ldots, t_i)), \\ \theta^{0,j}(t_1, \ldots, t_j) &= (s_1(t_1), \ldots, s_j(t_1, \ldots, t_j)). \end{aligned} \tag{24}$$

Обозначим через $c_\theta^{i,j} = (\Delta^{i,j}, \theta^{i,j})$ соответствующие цепи в I^{j+i}. Пусть $y =$ $= (y_1, \ldots, y_{i+j})$ — канонические координаты на I^{j+i} и

$$\alpha^{i,j} = \sum_{k=1}^{i+j} \alpha_k^{i,j}(y_1, \ldots, y_{i+j})\, dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_k} \wedge \cdots \wedge dy_{i+j}$$

— дифференциальная $(i+j-1)$-форма на I^{j+i}. Пусть функции $\alpha_k^{i,j}$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности I^{j+i} и удовлетворяют следующему условию:

$$\begin{aligned} &\lim_{y_{i-1} \to 0} \alpha_k^{i,j}(y_1, \ldots, y_{i+j}) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \neq i, \quad \text{если} \quad i > 1, \\ &\lim_{y_{i+j-1} \to 0} \alpha_k^{i,j}(y_1, \ldots, y_{i+j}) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \neq i+j, \quad \text{если} \quad j > 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Тогда имеет место формула Стокса

$$\int_{c_\theta^{i,j}} d\alpha = \int_{\partial c_\theta^{i,j}} \alpha, \tag{26}$$

где $\partial c_\theta^{i,j}$ — ориентированная граница цепи $c_\theta^{i,j}$, а несобственные интегралы, стоящие в левой и правой частях формулы, сходятся.

Доказательство. Если $i > 1$ или $j > 1$, то, как следует из определения $\theta^{i,j}$ (24) и функций s_k (14) и (20), интегралы в (26) являются несобственными. Поэтому для $\epsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \epsilon < 1$, обозначим

$$\Delta_\epsilon^i = \{(t_1, \ldots, t_i) \in \Delta_i \mid t_1 + \ldots + t_{i-1} \leq 1 - \epsilon\},$$
$$\Delta_e^{i,j} = \Delta_e^j \times \Delta_e^i \quad \text{и} \quad c_\theta^{i,j}(\epsilon) = (\Delta_\epsilon^{i,j}, \theta^{i,j} \restriction_{\Delta_\epsilon^{i,j}}).$$

Тогда по формуле Стокса

$$\int_{c_\theta^{i,j}(\epsilon)} d\alpha = \int_{\partial c_\theta^{i,j}(\epsilon)} \alpha,$$

причем непосредственная проверка показывает, что все интегралы сходятся при $\epsilon \to 0$, даже если не накладывать условия (25). Однако для того, чтобы имела место формула Стокса (26), т. е. чтобы

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial_{j,\epsilon}c_\theta^{i,j}(\epsilon)}\alpha=0,\qquad \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\partial_{\epsilon,i}c_\theta^{i,j}(\epsilon)}\alpha=0,$$

где

$$\partial_{j,\epsilon}\Delta_\epsilon^{i,j}=\Delta_\epsilon^j\times\partial_\epsilon\Delta_\epsilon^i,\qquad \partial_{\epsilon,i}\Delta_\epsilon^{i,j}=\partial_\epsilon\Delta_\epsilon^j\times\Delta_\epsilon^i,$$

$$\partial_e\Delta_\epsilon^i=\{(t_1,\ldots,t_i)\in\Delta_\epsilon^i \mid t_1+\ldots+t_{i-1}=1-\epsilon\},$$

а $\partial_{j,\epsilon}c_\theta^{i,j}(\epsilon)$ и $\partial_{\epsilon,i}c_\theta^{i,j}(\epsilon)$ — соответствующие цепи, достаточно выполнения условий (25). Это доказывается непосредственной проверкой.

Лемма доказана.

Запишем отображения (23) в виде $\sigma^{i,j}=\varrho^{i,j}\circ\theta^{i,j}$, $0\le i,j\le 3$, $0<i+j\le 4$, где для $h_1,\ldots,h_j\in H$, $g_{j+1},\ldots,g_{j+i}\in G$ отображения $\varrho^{i,j}(h_1,\ldots,h_j,g_{j+1},\ldots,g_{j+i})$: $I^{j+i}\to K$ определены формулой

$$\varrho^{i,j}(h_1,\ldots,h_j,g_{j+1},\ldots,g_{j+i})(y_1,\ldots,y_{j+i})=$$

$$=\gamma_G^{y_{j+1}}(g_{j+1}\gamma_G^{y_{j+2}}(\ldots\gamma_G^{y_{j+i}}(g_{j+i})\ldots))\cdot\gamma_H^{y_1}(\gamma_H^{y_2}(\ldots\gamma_H^{y_j}(h_1)h_2)\ldots h_j). \tag{27}$$

Тогда имеем $\sigma^{i,j}=\varrho^{ij}\circ\theta^{ij}$, $1\le i,j\le 3$, $i+j=4$.

Лемма 4. *Пусть* $(D\gamma_G^u)_g\to 0$ *и* $(D\gamma_H^u)_h\to 0$ *при* $u\to 0$, $\sigma^{i,j}$, $\varrho^{i,j}$ *и* $\Delta^{i,j}$, $0\le i,j\le 3$, $0<i+j\le 4$, *определены формулами* (23), (27) *и* (21), *а* ω — *дифференциальная* $(i+j-1)$*-форма на* K. *Тогда* $(i+j-1)$*-форма* $\alpha=(\varrho^{i,j})^*(\omega)$ *на* I^{j+i} *удовлетворяет условию* (25).

Доказательство. Рассмотрим частный случай $\sigma^{3,1}$.

Пусть $x^G=(x_p^G)$, $p=1,\ldots,\dim G$, — координаты на G в окрестности $\Delta^3(g_2,g_3,g_4)(\Delta^3)$ и $x^H=(x_q^H)$, $q=1,\ldots,\dim H$, — система координат на H в окрестности $\Delta_H^1(h_1)(\Delta^1)$. Для $k=\varrho^{3,1}(h_1,g_2,g_3,g_4)(y_1,y_2,y_3,y_4)$ рассмотрим

$$\big(D(\varrho^{3,1}(h_1,g_2,g_3,g_4))^*\big)_k\colon T_k^*(K)\to T^*_{(y_1,y_2,y_3,y_4)}(I^4).$$

Используя (15), имеем

$$D(\varrho^{3,1}(h_1,g_2,g_3,g_4))^*(dx_p^G)=\frac{\partial x_p^G(\gamma_G^{y_2}(g_2\gamma_G^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4))))}{\partial y^2}\,dy_2+$$

$$+\frac{\partial x_p^G(\gamma_G^{y_2}(g_2\gamma^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4))))}{\partial x_{r_1}^G(g_2\gamma_G^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4)))}\,\frac{\partial x_{r_1}^G(g_2\gamma_G^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4)))}{\partial x_{r_2}^G(\gamma_G^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4)))}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial x_{r_2}^G(\gamma_G^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4)))}{\partial y_3}\,dy_3+\frac{x_{r_2}^G(\gamma_G^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4)))}{\partial x_{r_3}^G(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4))}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial x_{r_3}^G(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4))}{\partial x_{r_4}^G(\gamma_G^{y_4}(g_4))}\cdot\frac{\partial x_{r_4}^G(\gamma_G^{y_4}(g_4))}{\partial y_4}\,dy_4\right),$$

$$D(\varrho^{3,1}(h_1,g_2,g_3,g_4))^*(dx_q^H)=\frac{\partial x_q^H(\gamma_H^{y_1}(h_1))}{\partial y_1}\,dy_1.$$

В силу условия леммы

$$\frac{\partial x_p^G(\gamma_G^{y_2}(g_2\gamma_G^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4))))}{\partial x_{r_1}^G(g_2\gamma_G^{y_3}(g_3\gamma_G^{y_4}(g_4)))} \to 0 \quad \text{при} \quad y_2 \to 0 \tag{28}$$

для всех p и r_1. Это показывает, что $\alpha_k \to 0$ для всех $k \neq 4$ при $y_2 \to 0$, что и доказывает утверждение для $\varrho^{3,1}$.

В остальных случаях рассуждения аналогичны.

Доказательство теоремы. Прежде всего отметим, что λ-инвариантная дифференциальная 3-форма $\omega_{U,V}$, определенная формулой (18), является точной, поскольку $F_{U,V}$ является коциклом на алгебре Ли $\mathfrak{k}$, а τ — изоморфизм $\mathfrak{k}$ в $\tilde{\mathfrak{k}}$. Докажем, что функция $\tilde{u}$, задаваемая (19), удовлетворяет уравнению

$$\tilde{u}(h_1 \triangleleft g_2, g_3, g_4) + \tilde{u}(h_1, g_2, g_3 g_4) = \tilde{u}(h_1, g_2, g_3) + \tilde{u}(h, g_2 g_3, g_4), \tag{29}$$

где $h_1 \in H$, $g_2, g_3, g_4 \in G$. Рассмотрим $c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)$ (см. (23)). Поскольку $d\omega_{U,V} = 0$, имеем

$$\int\limits_{c^{3,1}(h_1,g_2,g_3,g_4)} d\omega_{U,V} = 0.$$

Из условия теоремы, лемм 3 и 4, используя формулу Стокса, получаем

$$\int\limits_{\partial c^{3,1}(h_1,g_2,g_3,g_4)} \omega_{U,V} = 0. \tag{30}$$

Рассмотрим $\partial c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)$. Из определений отображений Δ_G^i, Δ_H^j (см. (22)), функций s_i (см. (14) и (20)) с использованием свойств γ_G и γ_H (см. (17)) находим

$$\Delta_G^3(g_2, g_3, g_4)\restriction_{t_2=0} = g_2\Delta_G^2(g_3, g_4), \qquad \Delta_G^3(g_2, g_3, g_4)\restriction_{t_3=0} = \Delta_G^2(g_2 g_3, g_4),$$

$$\Delta_G^3(g_2, g_3, g_4)\restriction_{t_4=0} = \Delta_G^2(g_2, g_3 g_4), \qquad \Delta_G^3(g_2, g_3, g_4)\restriction_{t_2+t_3+t_4=1} = \Delta_G^2(g_2, g_3),$$

$$\Delta_H^1(h)\restriction_{t_1=0} = e_G, \qquad \Delta_H^1\restriction_{t_1=1} = h.$$

Поэтому с учетом ориентации, индуцированной с $c^{3,1}$ на $\partial c^{3,1}$, имеем

$$\partial c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4) = -c^{3,0}(g_2, g_3, g_4) \cdot e_G + c^{3,0}(g_2, g_3, g_4) \cdot h_1 +$$

$$+ g_2 \cdot c^{2,1}(h_1, g_3, g_4) - c^{2,1}(h_1, g_2 g_3, g_4) + c^{2,1}(h_1, g_2, g_3 g_4) - c^{2,1}(h_1, g_2, g_3). \tag{31}$$

Поскольку по определению (см. (11)) τ^{-1} переводит λ-инвариантное векторное поле, касательное к G, в вектор из алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а коцикл $F_{U,V}$ равен нулю на $\wedge^3\mathfrak{g}$, то

$$\int\limits_{c^{3,0}(g_2,g_3,g_4)} \omega_{U,V} = 0.$$

Далее, $\Delta^3(g_2, g_3, g_4) \cdot h_1 = \lambda_{h_1^{-1}}(h_1 \triangleright \Delta^3(g_2, g_3, g_4))$ и поэтому

$$\int\limits_{c^{3,0}(g_2,g_3,g_4)\cdot h} \omega_{U,V} = \int\limits_{\lambda_{h_1^{-1}}(h_1 \triangleright c^{3,0}(g_2,g_3,g_4))} \omega_{U,V} =$$

$$= \int\limits_{h_1 \triangleright c^{3,0}(g_2,g_3,g_4)} \lambda_{h_1}.\,\omega_{U,V} = \int\limits_{h_1 \triangleright c^{3,0}(g_2,g_3,g_4)} \omega_{U,V} = 0,$$

где в предпоследнем равенстве использована λ-инвариантность формы $\omega_{U,V}$.

Также, используя (17), имеем

$$g_2\Delta^2_G(g_3,g_4)\cdot\Delta^1_H(h_1) = \lambda_{g_2}\big(\Delta^2_G(g_3,g_4)\cdot(\Delta^1_H(h_1)\triangleleft g_2)\big) =$$

$$= \lambda_{g_2}\big(\Delta^2_G(g_3,g_4)\cdot\Delta^1_H(h_1\triangleleft g_2)\big).$$

Таким образом, используя λ-инвариантность $\omega_{U,V}$, получаем

$$\int\limits_{g_2c^{2,1}(h_1,g_3,g_4)} \omega_{U,V} = \int\limits_{c^{2,1}(h_1\triangleleft g_2,g_3,g_4)} \lambda_{g_2^{-1}}.\,\omega_{U,V} = \int\limits_{c^{2,1}(h_1\triangleleft g_2,g_3,g_4)} \omega_{U,V}.$$

Это показывает, что

$$\int\limits_{\partial c^{3,1}(h_1,g_2,g_3,g_4)} \omega_{U,V} = \int\limits_{c^{2,1}(h_1\triangleleft g_2,g_3,g_4)} \omega_{U,V} - \int\limits_{c^{2,1}(h_1,g_2g_3,g_4)} \omega_{U,V} +$$

$$+ \int\limits_{c^{2,1}(h_1,g_2,g_3g_4)} \omega_{U,V} - \int\limits_{c^{2,1}(h_1,g_2,g_3)} \omega_{U,V} = 0,$$

что доказывает (29).

Рассматривая

$$\int\limits_{c^{1,3}(h_1,h_2,h_3,g_4)} d\omega_{U,V} = 0,$$

можно доказать таким же образом, что

$$\tilde v(h_1,h_2,h_3\triangleright g_4) + \tilde v(h_1h_2,h_3,g_4) = \tilde v(h_1,h_2h_3,g_4) + \tilde v(h_2,h_3,g_4). \qquad (32)$$

Теперь рассмотрим

$$0 = \int\limits_{c^{2,2}(h_1,h_2,g_3,g_4)} d\omega_{U,V} = \int\limits_{\partial c^{2,2}(h_1,h_2,g_3,g_4)} \omega_{U,V}.$$

Поскольку

$$\Delta^2_G(g_3,g_4)\restriction_{t_3=0} = g_3\Delta^1_G(g_4), \qquad \Delta^2_G(g_3,g_4)\restriction_{t_4=0} = \Delta^1_G(g_3g_4),$$

$$\Delta^2_G(g_3,g_4)\restriction_{t_3+t_4=1} = \Delta^1_G(g_3),$$

$$\Delta^2_H(h_1,h_2)\restriction_{t_1=0} = \Delta^1_H(h_1)h_2, \qquad \Delta^2_H(h_1,h_2)\restriction_{t_2=0} = \Delta^1_H(h_1h_2),$$

$$\Delta_H^2(h_1, h_2)\restriction_{t_1+t_2=1} = \Delta_H^1(h_2),$$

имеем

$$\partial c^{2,2}(h_1, h_2, g_3, g_4) = -c^{2,1}(h_1, g_2, g_3) \cdot h_2 + c^{2,1}(h_1 h_2, g_2, g_3) - c^{2,1}(h_2, g_3, g_4) -$$

$$- g_3 \cdot c^{1,2}(h_1, h_2, g_4) + c^{1,2}(h_1, h_2, g_3 g_4) - c^{1,2}(h_1, h_2, g_3).$$

Поскольку

$$\Delta_G^2(g_3, g_4) \cdot \Delta_H^1(h_1) h_2 = \lambda_{h_2^{-1}}\big((h_2 \triangleright \Delta_G^2(g_3, g_4)) \cdot \Delta_H^1(h_1)\big) =$$

$$= \lambda_{h_2^{-1}}\big(\Delta_G^2(h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4)) \cdot \Delta_H^1(h_1)\big),$$

то

$$\int\limits_{c^{2,1}(h_1, g_3, g_4) h_2} \omega_{U,V} = \int\limits_{c^{2,1}(h_1, h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4))} \omega_{U,V}.$$

Точно так же

$$\int\limits_{g_3 c^{1,2}(h_1, h_2, g_4)} \omega_{U,V} = \int\limits_{c^{1,2}(h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g_3), h_2 \triangleleft g_3, g_4)} \omega_{U,V}.$$

Это доказывает, что

$$\tilde{v}(h_1, h_2, g_3 g_4) + \tilde{u}(h_1 h_2, g_2, g_3) = \tilde{v}(h_1, h_2, g_3) + \tilde{u}(h_2, g_3, g_4) +$$

$$+ \tilde{v}(h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g_3), h_2 \triangleleft g_3, g_4) + \tilde{u}(h_1, h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4).$$

Поэтому функции $u = e^{i\tilde{u}}$ и $v = e^{i\tilde{v}}$ удовлетворяют (3) – (5).

Докажем теперь, что отображение Int корректно определено.

Пусть $F_{U,V} = dR$, причем $R\restriction_{\mathfrak{g}^{\wedge 2}} = R\restriction_{\mathfrak{h}^{\wedge 2}} = 0$. Определим λ-инвариантную дифференциальную 2-форму на K

$$\omega_R = (\tau^{-1})^*(R).$$

Тогда $\omega_{U,V} = d\omega_R$ и

$$\tilde{u}(h_1, g_2, g_3) = \int\limits_{c^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} \omega_{U,V} = \int\limits_{c^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} d\omega_R = \int\limits_{\partial c^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} \omega_R,$$

где

$$\partial c^{2,1}(h_1, g_2, g_3) = c^{2,0}(g_2, g_3) - c^{2,0}(g_2, g_3) h_1 -$$

$$- g_2 c^{1,1}(h_1, g_3) + c^{1,1}(h_1, g_2 g_3) - c^{1,1}(h_1, g_2).$$

Поскольку $c^{2,0}(g_2, g_3) h_1 = \lambda_{h_1^{-1}}\big(h_1 \triangleright c^{2,0}(g_2, g_3)\big)$, а ω_R — λ-инвариантная и $R\restriction_{\mathfrak{g}^{\wedge 2}} = 0$, то

$$\int\limits_{c^{2,0}(g_2,g_3)} \omega_R = 0, \qquad \int\limits_{c^{2,0}(g_2,g_3)h_1} \omega_R = 0.$$

Также, используя (17) и λ-инвариантность 2-формы ω_R, имеем

$$\int\limits_{g_2 c^{1,1}(h_1,g_3)} \omega_R = \int\limits_{c^{1,1}(h_1 \triangleleft g_2, g_3)} \omega_R.$$

Следовательно, полагая

$$\tilde{r}(h_1, g_2) = -\int\limits_{c^{1,1}(h_1,g_2)} \omega_R,$$

получаем

$$\tilde{u}(h_1, g_2, g_3) = \tilde{r}(h_1 \triangleleft g_2, g_3) - \tilde{r}(h_1, g_2 g_3) + \tilde{r}(h_1, g_2). \tag{33}$$

Поскольку

$$\tilde{v}(h_1, h_2, g_3) = \int\limits_{c^{1,2}(h_1,h_2,g_3)} \omega_{U,V} = \int\limits_{\partial c^{1,2}(h_1,h_2,g_3)} \omega_R$$

и

$$\partial c^{1,2}(h_1, h_2, g_3) = c^{1,1}(h_1, g_3)h_2 - c^{1,1}(h_1 h_2, g_3) + c^{1,1}(h_2, g_3) +$$
$$+ g_3 c^{0,2}(h_1, h_2) - c^{0,2}(h_1, h_2),$$

то

$$\tilde{v}(h_1, h_2, g_3) = -\tilde{r}(h_1, h_2 \triangleright g_3) + \tilde{r}(h_1 h_2, g_3) - \tilde{r}(h_2, g_3). \tag{34}$$

Формулы (33) и (34) показывают, что пары (u_1, v_1), (u_2, v_2), где $u_1 = u$, $v_1 = v$, $u_2 = v_2 = 1$, и функция $r = e^{i\tilde{r}}$ удовлетворяют (6).

Теорема доказана.

1. *Кац Г. И.* Расширения групп, являющиеся кольцевыми группами // Мат. сб. – 1968. – **76**, № 3. – С. 473 – 496.
2. *Vaes S., Vainerman L.* Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction // Adv. Math. – 2003. – **175**, № 1. – C 1 – 101.
3. *Majid S.* Foundations of quantum group theory. – Cambridge Univ. Press, 1995.
4. *Baaj S., Skandalis G., Vaes S.* Topological Kac cohomology for bicrossed products. – http://arxiv.org/math. QA/0307172.
5. *Chapovsky Yu. A., Kalyuzhnyi A. A., Podkolzin G. B.* On the group of extensions for the bicrossed product construction for a locally compact group // Algebra and Discrete Math. – 2004. – **3**. – P. 12 – 19.
6. *Калюжный А. А., Подколзин Г. Б., Чаповский Ю. А.* Построение коциклов для двойного скрещенного произведения групп Ли // Функцион. анализ и его прил. – 2006. – **40**, № 2. – С. 70 – 73.
7. *Гишарде А.* Когомологии топологических групп и алгебр Ли. – М.: Мир, 1984.
8. *Chapovsky Yu. A., Kalyuzhnyi A. A., Podkolzin G. B.* On $2+2$ locally compact quantum groups // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. – 2004. – **50**, Pt 3. – P. 1064 – 1070.

Получено 30.01.07