УДК 510.51

А. С. Денисов (НИИ математики при Якут. ун-те, Россия)

ВЫПОЛНИМОСТЬ ЯРКИХ ФОРМУЛ

We investigate one of solvable subclasses of quantor formulas in the pure predicate calculus. We obtain a necessary and sufficient condition for the realizability of formulas from this subclass.

Досліджується один із розв'язних підкласів кванторних формул у чистому численні предикатів. Отримано необхідну та достатню умову здійсненності для формул, що входять до нього.

Проблемы доказуемости и выполнимости кванторных формул чистого исчисления предикатов первого порядка возникли одновременно с появлением данного логического исчисления. Будучи двойственными, они представляют традиционный интерес и уже позволили получить разнообразные и содержательные результаты [1]. При этом проблема выполнимости оказалась изученной в меньшей степени. В настоящей работе предпринята попытка строгого изложения разрешающей процедуры для проблемы выполнимости кванторных формул, матрицы которых содержат помимо логической связки отрицания как конъюнкцию, так и дизъюнкцию, на примере ярких формул.

Любая элементарная формула чистого исчисления предикатов имеет вид

$$P(x_{i_0}, \dots, x_{i_{p-1}}).$$

Определение 1. *Формула* ψ *называется составной, если*

$$\psi = \forall x_0 \dots \forall x_{m-1} \; \exists x_m \dots \exists x_{n-1} \Phi(x_0, \dots, x_{m-1}, x_m, \dots, x_{n-1}),$$

$$\Phi = \Phi^0 \vee \Phi^1,$$

$$\Phi^0 = P(x_{i_0}, \dots, x_{i_{p-1}}) \,\&\, \neg P(x_{j_0}, \dots, x_{j_{p-1}}),$$

$$\Phi^1 = Q(x_{i_p}, \dots, x_{i_{a-1}}) \,\&\, \neg Q(x_{j_p}, \dots, x_{j_{a-1}}).$$

Существенную роль при изучении составных формул играет отношение так называемой ладейной связности [2]. Именно, для чисел $0 \le k, l \le a-1$ считается, что $k \sim l$ тогда и только тогда, когда либо

$$\text{существуют } 0 \le k_0, k_1, \dots, k_z \le p-1 \text{ такие, что } k_0 = k,\ i_{k_y} = i_{k_{y+1}}$$
$$\text{или } j_{k_y} = j_{k_{y+1}} \text{ для всех } 0 \le y \le z-1,\ k_z = l,$$

либо

$$\text{существуют } p \le l_0, l_1, \dots, l_z \le a-1 \text{ такие, что } l_0 = k,\ i_{l_y} = i_{l_{y+1}}$$

© А. С. ДЕНИСОВ, 2007

$$\text{или } j_{l_y} = j_{l_{y+1}} \text{ для всех } 0 \le y \le z-1,\ l_z = l.$$

Исследование класса составных формул, у которых Φ^0 разбивается на два класса ладейной связности в том смысле, что

$$\{0, 1, \ldots, p-1\} = \{0, 1, \ldots, b-1\} \cup \{b, b+1, \ldots, p-1\},$$

$$0 \le k, l \le b-1 \quad \text{влечет } k \sim l,$$

$$b \le k, l \le p-1 \quad \text{влечет } k \sim l,$$

$$0 \le k \le b-1,\ \ b \le l \le p-1 \quad \text{влечет } k \not\sim l$$

при некотором $0 < b < p$, начинается со следующего частного случая.

Определение 2. *Составная формула описанного вида называется яркой, если*

$$0 \le i_0, \ldots, i_{b-1}, j_0, \ldots, j_{b-1} \le m-1,$$

$$m \le i_b = \ldots = i_{p-1}, j_b = \ldots = j_{p-1} \le n-1,$$

$$0 \le i_p, \ldots, i_{a-1} \le m-1,$$

формула

$$\psi_1 = \forall x_0 \ldots \forall x_{m-1}\ \exists x_m \ldots \exists x_{n-1} \Phi^1(x_0, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_{n-1})$$

невыполнима и условие $m \le j_l \le n-1$ *влечет*

$$i_l \notin \{i_0, \ldots, i_{b-1}, j_0, \ldots, j_{b-1}\}.$$

Теорема. *Для того чтобы яркая формула была выполнимой, необходимо и достаточно истинности неравенства* $i_b \ne j_b$.

Доказательство. Пусть ψ — произвольная яркая формула. Рассмотрим стандартную последовательность $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_q, \ldots$ бескванторных формул, эквивалентную ψ [3]. Каждую формулу Φ_q представим в виде

$$\Phi_q = \Phi_q(c_{c_q(0)}, \ldots, c_{c_q(n-1)})$$

с помощью функции $c_q\colon \{0, \ldots, n-1\} \to N$. С другой стороны, $\Phi_q = \Phi_q^0 \vee \Phi_q^1$. Введем также функции $c_q^0,\ c_q^1 : \{0, \ldots, a-1\} \to N$, положив

$$c_q^0(k) = c_q(i_k),$$

$$c_q^1(k) = c_q(j_k)$$

для всех $0 \le k \le a-1$.

Факт разрешимости проблемы выполнимости формул, в бескванторной части которых помимо символа $\neg$ встречается лишь символ $\&$, известен со времен Гильберта. Выявление отличий, возникающих в последовательности Φ_0, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ после добавления символа $\vee$, привело к следующему естественному критерию для составных формул [4].

Предложение. *Составная формула* ψ *выполнима тогда и только тогда, когда имеется* $h : N \to \{0, 1\}$ *такая, что не существует* $q, s \in N$ *таких, что* $h(q) = 0,\ h(s) = 0,$ *и верна система равенств*

$$c_q^0(k) = c_s^1(k), \qquad 0 \le k \le p-1,$$

либо $h(q) = 1,\ h(s) = 1$ *и правильна система равенств*

$$c_q^0(k) = c_s^1(k), \quad p \le k \le a-1.$$

Функция h, удовлетворяющая условию этого предложения, называется выбирающей.

Достаточность. Пусть $i_b \ne j_b$. В качестве h рассмотрим функцию $h \equiv 0$. Тогда для любых $q, s \in N$ по определению последовательности $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ $\ldots, \Phi_q, \ldots$

$$c_q^0(b) = c_q(i_b) \ne c_s(j_b) = c_s^1(b)$$

в силу условия $m \le i_b,\ j_b \le n-1$, так что система

$$c_q^0(k) = c_s^1(k), \quad 0 \le k \le p-1,$$

не может быть правильной. Поскольку случай $h(q) = 1,\ h(s) = 1$ невозможен, по предложению ψ выполнима.

Необходимость. Предположим, что ψ выполнима и h — выбирающая функция для ψ. Пусть, наоборот, $i_b = j_b$. Рассмотрим формулу

$$\Phi_0 = \Phi(c_0, \ldots, c_0, c_1, \ldots, c_{n-m}).$$

Допустим, что $h(0) = 0$. Если тогда $0 \le k \le b-1$, то по определению яркой формулы $0 \le i_k,\ j_k \le m-1$, откуда

$$c_0^0(k) = c_0(i_k) = 0,$$

$$c_0^1(k) = c_0(j_k) = 0$$

и $c_0^0(k) = c_0^1(k)$. Если же $b \le k \le a-1$, то по определению $i_k = j_k = i_b$, так что

$$c_0^0(k) = c_0(i_k) = c_0(j_k) = c_0^1(k).$$

Положив $q = 0,\ s = 0$ в условии на h, получим противоречие.

Пусть $h(0) = 1$. Определим некоторое число $q \in N$ соотношениями

$$c_q(i) = \begin{cases} c_0(j_l), & \text{если существует } p \le l \le a-1 \text{ такое, что } i = i_l, \\ 0 \text{ — в противном случае} \end{cases}$$

для всех $0 \le i \le m-1$. В силу невыполнимости ψ_1 данное определение корректно.

Зафиксируем произвольное $p \le l \le a-1$. Тогда для $i = i_l$ выполнено первое условие определения $c_q(i)$, откуда

$$c_q^0(l) = c_q(i_l) = c_q(i) = c_0(j_l) = c_0^1(l).$$

Таким образом, система

$$c_q^0(l) = c_0^1(l), \quad p \le l \le a-1,$$

правильна. Так как $h(0) = 1$, то $h(q) = 0$.

Зафиксируем теперь $0 \le k \le p-1$. Если $0 \le k \le b-1$, то $0 \le i_k,\ \ j_k \le m-1$. В силу последнего пункта в определении яркой формулы числа $i = i_k$ и $i = j_k$ не могут удовлетворять первому условию в определении $c_q(i)$. Значит,

$$c_q^0(k) = c_q(i_k) = 0,$$

$$c_q^1(k) = c_q(j_k) = 0$$

и

$$c_q^0(k) = c_q^1(k).$$

Если же $b \le k \le p-1$, то $i_k = j_k = i_b$, откуда

$$c_q^0(k) = c_q(i_k) = c_q(j_k) = c_q^1(k).$$

В результате справедливы все равенства системы

$$c_q^0(k) = c_q^1(k), \quad 0 \le k \le p-1.$$

Получили противоречие с условиями на h. Следовательно, ψ невыполнима.

Теорема доказана.

1. *Börger E., Gradel E., Gurevich Yu.* The classical decision problem. – Berlin etc.: Springer, 1997.
2. *Denisov A. S.* The satisfability in the class of composite formulas // Abstrs Logic Colloquim'95. – Haifa (Israel), 1995. – P. 64.
3. *Мальцев А. И.* Исследования в области математической логики // Избр. тр. Т. 2. Математическая логика и общая теория алгебраических систем. – М.: Наука, 1976. – С. 5 – 16.
4. *Денисов А. С.* Выполнимость альтернативных формул // Мат. заметки Якут. ун-та. – 1996. – Вып. 1. – С. 38 – 41.

Получено 05.07.2005,
после доработки — 31.08.2006