УДК 517.91:532.2

І. М. Конет (Кам'янець-Поділ. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕНЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ МЕЛЕРА – ФОКА 1-ГО РОДУ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

A generalized hybrid integral transform of the Meler – Fok type is introduced on the segment $[0; R]$ with n conjugate points. We consider examples of application of this transform to the solution of typical singular boundary-value problems for linear partial differential equations of the second order in piece-wise environments.

Введено обобщенное гибридное интегральное преобразование типа Мелера – Фока на отрезке $[0; R]$ с n точками сопряжения. Рассмотрены примеры применения этого преобразования к решению типичных сингулярных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка в кусочно-однородных средах.

Вступ. При розв'язуванні лінійних крайових та мішаних задач математичної фізики однорідних середовищ у сферичній системі координат методом відокремлення змінних виникають рівняння з диференціальним оператором Лежандра

$$\Lambda_m = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 r}, \quad m \geq 0. \tag{1}$$

Пряме

$$F_0[f(r)] = \int_0^\infty f(r) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r) \operatorname{sh} r dr \equiv \tilde{f}(\lambda)$$

та обернене

$$F_0^{-1}\big[\tilde{f}(\lambda)\big] = \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r) \lambda \operatorname{th}(\pi\lambda) d\lambda \equiv f(r)$$

інтегральні перетворення, породжені на полярній осі $r \geq 0$ диференціальним оператором Лежандра

$$\Lambda_0 = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4},$$

вперше у 1861 р. одержав Ф. Г. Мелер і строго обґрунтували В. А. Фок [1] та М. М. Лєбєдєв [2]. Ці перетворення ефективно використовуються при розв'язуванні осесиметричних задач теорії потенціалу в областях, утворених двома сферами, що перетинаються, та в областях, обмежених поверхнями гіперболоїдів обертання і тороїдальними поверхнями.

У випадку відсутності осьової симетрії використовуються узагальнені інтегральні перетворення Мелера – Фока [3]

$$F_m\big[f(r)\big] = \int_0^\infty f(r) P^m_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r) \operatorname{sh} r dr \equiv \tilde{f}(\lambda),$$

$$F_m^{-1}\left[\tilde f(\lambda)\right] = (-1)^m \int\limits_0^\infty \tilde f(\lambda) P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r)\lambda \operatorname{th}(\pi\lambda)d\lambda \equiv f(r),$$

породжені на полярній осі $r \geq 0$ диференціальним оператором Λ_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Інтегральні перетворення Мелера – Фока на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ було одержано у працях [4 – 6].

Природним узагальненням диференціального оператора (1) є оператор [7, 8]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1 - \operatorname{ch} r} + \frac{\mu_2^2}{1 + \operatorname{ch} r}\right), \tag{2}$$

де $(\mu) = (\mu_1; \mu_2)$; $\mu_1 \geq \mu_2 > 0$.

Оператор (2) будемо називати узагальненим диференціальним оператором Лежандра. Очевидно, що при $\mu_1 = \mu_2 = m$ оператор (2) збігається з оператором (1).

Інтегральні перетворення типу Мелера – Фока, породжені на полярних осях $r \geq 0$, $r \geq R_0 > 0$ та полярних відрізках $[0; R]$, $[R_0; R]$ узагальненим диференціальним оператором Лежандра (2), одержано в [9 – 11]. Відповідні гібридні інтегральні перетворення, породжені на цих осях з однією, двома та n точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра, розглянуто в [12 – 15]. У цій статті побудовано скінченні гібридні інтегральні перетворення типу Мелера – Фока на відрізку $[0; R]$ з n точками спряження. Одержані перетворення застосовано до розв'язання деяких сингулярних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку в кусково-однорідних середовищах.

Основні результати. Побудуємо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_n = \left\{r \colon r \in \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} (R_{k-1}, R_k);\ R_0 = 0,\ R_{n+1} = R < \infty\right\}$ узагальненим гібридним диференціальним оператором Лежандра

$$\mathcal{L}_{(\mu)} = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(r - R_{k-1}) a_k^2 \Lambda_{(\mu)_k}, \quad R_0 = 0, \tag{3}$$

де $(\mu) = \big((\mu)_1, (\mu)_2, \ldots, (\mu)_{n+1}\big)$; $(\mu)_k = (\mu_{1k},\, \mu_{2k})$, $\theta(x)$ — одинична функція Хевісайда.

Означення. *Областю визначення оператора $\mathcal{L}_{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \big\{g_1(r); g_2(r); \ldots; g_{n+1}(r)\big\}$, які мають такі властивості*:

1) *вектор-функція* $f(r) = \Big\{\Lambda_{(\mu)_1}\big[g_1(r)\big]; \Lambda_{(\mu)_2}\big[g_2(r)\big]; \ldots; \Lambda_{(\mu)_{n+1}}\big[g_{n+1}(r)\big]\Big\}$ *є неперервною на множині* I_n;

2) *компоненти* $g_j(r)$ *вектор-функції* $g(r)$ *задовольняють умови спряження*

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\bigg|_{r=R_k} = 0, \tag{4}$$

$$j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n};$$

3) *справджуються крайові умови*

$$\lim_{r\to 0} r^\gamma g_1(r) = 0, \qquad \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dr} + \beta_{22}^{n+1}\right) g_{n+1}(r)\bigg|_{r=R_{n+1}} = 0.$$

Вважаємо, що $c_{1k}c_{2k} > 0$ для $k = \overline{1,n}$, $\alpha_{22}^{n+1} \geq 0$, $\beta_{22}^{n+1} \geq 0$, $\alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0$,

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, \qquad j = 1, 2, \quad k = \overline{1,n}.$$

Лема. *Компоненти вектор-функцій $u(r)$ та $v(r)$ з множини G задовольняють тотожність*

$$\left(\frac{du_j}{dr} v_j - u_j \frac{dv_j}{dr} \right) \Bigg|_{r=R_j} = \frac{c_{2j}}{c_{1j}} \left(\frac{du_{j+1}}{dr} v_{j+1} - u_{j+1} \frac{dv_{j+1}}{dr} \right) \Bigg|_{r=R_j}, \quad j = \overline{1,n}. \quad (5)$$

Доведення. За коефіцієнтами умов спряження (4) визначимо величини

$$c_{11}^k = \alpha_{11}^k \alpha_{22}^k - \alpha_{21}^k \alpha_{12}^k, \qquad c_{12}^k = \alpha_{11}^k \beta_{22}^k - \alpha_{21}^k \beta_{12}^k,$$

$$c_{21}^k = \beta_{11}^k \alpha_{22}^k - \beta_{21}^k \alpha_{12}^k, \qquad c_{22}^k = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - \beta_{21}^k \beta_{12}^k; \quad k = \overline{1,n}.$$

Для $u(r) \in G$ з умов спряження

$$\alpha_{11}^k u_k'(R_k) + \beta_{11}^k u_k(R_k) = \alpha_{12}^k u_{k+1}'(R_k) + \beta_{12}^k u_{k+1}(R_k),$$

$$\alpha_{21}^k u_k'(R_k) + \beta_{21}^k u_k(R_k) = \alpha_{22}^k u_{k+1}'(R_k) + \beta_{22}^k u_{k+1}(R_k)$$

за правилами Крамера [16] знаходимо співвідношення

$$\begin{aligned} u_k'(R_k) &= c_{1k}^{-1} \Big[c_{21}^k u_{k+1}'(R_k) + c_{22}^k u_{k+1}(R_k) \Big], \\ u_k(R_k) &= -c_{1k}^{-1} \Big[c_{11}^k u_{k+1}'(R_k) + c_{12}^k u_{k+1}(R_k) \Big]. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогічно, для $v(r) \in G$ маємо співвідношення

$$\begin{aligned} v_k'(R_k) &= c_{1k}^{-1} [c_{21}^k v_{k+1}'(R_k) + c_{22}^k v_{k+1}(R_k)], \\ v_k(R_k) &= -c_{1k}^{-1} [c_{11}^k v_{k+1}'(R_k) + c_{12}^k v_{k+1}(R_k)]. \end{aligned} \quad (7)$$

На основі рівностей (6) та (7) одержуємо

$$u_k'(R_k) v_k(R_k) - u_k(R_k) v_k'(R_k) =$$

$$= c_{1k}^{-2} (c_{11}^k c_{22}^k - c_{12}^k c_{21}^k)(u_{k+1}'(R_k) v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k) v_{k+1}'(R_k)).$$

Враховуючи нерівність $c_{11}^k c_{22}^k - c_{12}^k c_{21}^k = c_{1k} c_{2k} > 0$, отримуємо тотожність (5).

Лему доведено.

Визначимо числа

$$\sigma_k = \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{c_{1j}}{c_{2j}} \right) \frac{1}{a_k^2} \equiv \frac{c_{1k} c_{1,k+1} \ldots c_{1n}}{c_{2k} c_{2,k+1} \ldots c_{2n}} \frac{1}{a_k^2}, \qquad k = \overline{1,n}, \quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \left[\sum_{k=1}^{n+1} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)\sigma_k \right] \operatorname{sh} r$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r), v(r)\big) = \int_0^R u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} u_k(r)v_k(r)\sigma_k \operatorname{sh} r dr,$$

$$u(r) \in G, \quad v(r) \in G.$$

Теорема 1. *Узагальнений гібридний диференціальний оператор* $\mathcal{L}_{(\mu)}$, *визначений рівністю* (3), *є самоспряженим, тобто*

$$\forall u,\ v \in G\colon \quad \big(\mathcal{L}_{(\mu)}[u], v\big) = \big(u, \mathcal{L}_{(\mu)}[v]\big). \tag{8}$$

Доведення. Інтегруючи двічі частинами, безпосередньо маємо

$$\big(\mathcal{L}_{(\mu)}[u], v\big) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} \mathcal{L}_{(\mu)}\big[u(r)\big] v_k(r)\sigma_k \mathrm{sh} r dr =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ a_k^2 \big[u_k'(R_k)v_k(R_k) - u_k(R_k)v_k'(R_k)\big]\sigma_k \mathrm{sh} R_k -$$

$$-a_{k+1}^2 \big[u_{k+1}'(R_k)v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k)v_{k+1}'(R_k)\big]\sigma_{k+1}\mathrm{sh} R_k \Big\} +$$

$$+a_{n+1}^2 \big[u_{n+1}'(R)v_{n+1}(R) - u_{n+1}(R)v_{n+1}'(R)\big]\sigma_{n+1}\mathrm{sh} R -$$

$$-a_1^2 \big[u_1'(R_0)v_1(R_0) - u_1(R_0)v_1'(R_0)\big]\sigma_1 \mathrm{sh} R_0 + \big(u, \mathcal{L}_{(\mu)}[v]\big).$$

З урахуванням тотожності (5) і структури чисел σ_k одержуємо

$$a_k^2[u_k'(R_k)v_k(R_k) - u_k(R_k)v_k'(R_k)]\sigma_k \mathrm{sh} R_k =$$

$$= a_k^2 \frac{c_{2k}}{c_{1k}} \big[u_{k+1}'(R_k)v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k)v_{k+1}'(R_k)\big]\sigma_k \mathrm{sh} R_k =$$

$$= a_{k+1}^2 \big[u_{k+1}'(R_k)v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k)v_{k+1}'(R_k)\big]\sigma_{k+1}\mathrm{sh} R_k.$$

Отже, вираз у фігурних дужках під знаком суми дорівнює нулю. Третій доданок дорівнює нулю внаслідок крайових умов у точці $r = 0$. Якщо $\alpha_{22}^{n+1} = 0$, то другий доданок дорівнює нулю за рахунок крайових умов $u_{n+1}(R) = v_{n+1}(R) = 0$. Якщо $\alpha_{22}^{n+1} \neq 0$, то внаслідок крайових умов у точці $r = R$ маємо

$$u_{n+1}'(R)v_{n+1}(R) - u_{n+1}(R)v_{n+1}'(R) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{22}^{n+1}} \Big[\big(\alpha_{22}^{n+1} u_{n+1}'(R) + \beta_{22}^{n+1} u_{n+1}(R)\big) v_{n+1}(R) -$$

$$-u_{n+1}(R)\big(\alpha_{22}^{n+1} v_{n+1}'(R) + \beta_{22}^{n+1} v_{n+1}(R)\big) \Big] =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{22}^{n+1}}(0 \cdot v_{n+1}(R) - u_{n+1}(R) \cdot 0) = 0,$$

тобто у цьому випадку другий доданок також дорівнює нулю. Отже, одержуємо рівність (8).

Теорему доведено.

Оскільки оператор $\mathcal{L}_{(\mu)}$ не має на множині I_n особливих точок, то його спектр є дискретним і дійсним [17].

Знайдемо множину власних чисел (спектр) та множину власних вектор-функцій $V_{(\mu)} = \left\{V_{(\mu)_1}; V_{(\mu)_2}; \ldots; V_{(\mu)_{n+1}}\right\}$ оператора $\mathcal{L}_{(\mu)}$. Для цього розглянемо спектральну задачу Штурма – Ліувілля: побудувати нетривіальний обмежений на множині I_n розв'язок сепаратної системи узагальнених диференціальних рівнянь Лежандра

$$(\Lambda_{(\mu)_j} + b_j^2)V_{(\mu);j}(r,\beta) = 0, r \in (R_{j-1}, R_j), \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{9}$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0} r^\gamma V_{(\mu);1}(r,\beta) = 0, \qquad \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dr} + \beta_{22}^{n+1}\right)V_{(\mu);n+1}(r,\beta)|_{r=R_{n+1}} = 0 \tag{10}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)V_{(\mu);k}(r,\beta) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)V_{(\mu);k+1}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k} = 0, \tag{11}$$

$$k = \overline{1, n}, \quad j = 1, 2,$$

де $b_j^2 = a_j^{-2}(\beta^2 + \gamma_j^2)$, $a_j > 0$, $\gamma_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1, n+1}$, β — спектральний параметр.

Для $j \geq 2$ за фундаментальну систему розв'язків візьмемо дві дійсні функції $A_{-1/2+ib_j}^{(\mu)_j}(\operatorname{ch} r)$ та $B_{-1/2+ib_j}^{(\mu)_j}(\operatorname{ch} r)$ [8].

Якщо загальний розв'язок однорідної крайової задачі (9) – (11) шукати за формулами

$$V_{(\mu)_1}(r,\beta) = A_1 P_{-1/2+ib_1}^{(\mu)_1}(\operatorname{ch} r),$$

$$V_{(\mu)_j}(r,\beta) = A_j A_{-1/2+ib_j}^{(\mu)_j}(\operatorname{ch} r) + B_j B_{-1/2+ib_j}^{(\mu)_j}(\operatorname{ch} r), \quad j = \overline{2, n+1},$$

то умови спряження (11) і крайова умова в точці $r = R_{n+1} \equiv R$ дають алгебраїчну систему $(2n+1)$-го рівняння відносно $(2n+1)$-го невідомого:

$$\begin{gathered}
Z_{-1/2+ib_1;m1}^{(\mu)_1,11}(\operatorname{ch} R_1)A_1 - \\
-Y_{-1/2+ib_2;m2}^{(\mu)_2,11}(\operatorname{ch} R_1)A_2 - Y_{-1/2+ib_2;m2}^{(\mu)_2,12}(\operatorname{ch} R_1)B_2 = 0, \quad m = 1,2, \\
Y_{-1/2+ib_j;m_1}^{(\mu)_j,j_1}(\operatorname{ch} R_j)A_j + Y_{-1/2+ib_j;m1}^{(\mu)_j,j_2}(\operatorname{ch} R_j)B_j - \\
-Y_{-1/2+ib_{j+1};m_2}^{(\mu)_{j+1},j_1}(\operatorname{ch} R_j)A_{j+1} - \\
-Y_{-1/2+ib_{j+1};m_2}^{(\mu)_{j+1},j_2}(\operatorname{ch} R_j)B_{j+1} = 0, \qquad j = \overline{2, n}, \quad m = 1,2, \\
Y_{-1/2+ib_{n+1};22}^{(\mu)_{n+1},n+1,1}(\operatorname{ch} R_{n+1})A_{n+1} + Y_{-1/2+ib_{n+1};22}^{(\mu)_{n+1},n+1,2}(\operatorname{ch} R_{n+1})B_{n+1} = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Для того щоб система (12) мала ненульовий розв'язок, необхідно і досить, щоб визначник системи дорівнював нулю [16]. Таким чином, одержуємо трансцендентне рівняння для власних чисел

$$\delta_{(\tilde{\mu})}(\beta) \equiv Y^{(\mu)_{n+1},n+1,1}_{-1/2+ib_{n+1};22}(\operatorname{ch} R_{n+1})\omega^{(n)}_{(\tilde{\mu})_{n+1};2}(\beta)-$$

$$-Y^{(\mu)_{n+1},n+1,2}_{-1/2+ib_{n+1};22}(\operatorname{ch} R_{n+1})\omega^{(n)}_{(\tilde{\mu})_{n+1};1}(\beta) = 0, \tag{13}$$

де

$$(\tilde{\mu})_k = \big((\mu)_1, (\mu)_2, \ldots, (\mu)_k\big), (\mu)_j = (\mu_{1j}, \mu_{2j}), \quad \mu_{1j} \geq \mu_{2j}, \quad k = 1, 2, \ldots, k,$$

$$\psi^1_{(\tilde{\mu})_2;1j}(\beta, \operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} R_2) = Z^{(\mu)_1,11}_{-1/2+ib_1;11}(\operatorname{ch} R_1)Y^{(\mu)_2,1j}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch} R_2)-$$

$$-Z^{(\mu)_1,11}_{-1/2+ib_1;21}(\operatorname{ch} R_1)Y^{(\mu)_2,1j}_{-1/2+ib_2;12}(\operatorname{ch} R_2), \quad j = 1, 2,$$

$$\psi^k_{((\mu)_k;(\mu)_{k+1});mj}(\beta, \operatorname{ch} R_k, \operatorname{ch} R_{k+1}) =$$

$$= Y^{(\mu)_k,km}_{-1/2+ib_k;11}(\operatorname{ch} R_{k+1})Y^{(\mu)_{k+1},kj}_{-1/2+ib_{k+1};22}(\operatorname{ch} R_k)-$$

$$-Y^{(\mu)_k,km}_{-1/2+ib_k;21}(\operatorname{ch} R_k)Y^{(\mu)_{k+1},kj}_{-1/2+ib_{k+1};12}(\operatorname{ch} R_{k+1}), \quad k = \overline{2, n},$$

$$\omega^{(1)}_{(\tilde{\mu})_2;j}(\beta) = \psi^k_{((\mu)_1;(\mu)_2);1j}(\beta, \operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} R_2), \quad j = 1, 2,$$

$$\omega^{(k)}_{(\tilde{\mu})_{k+1};j}(\beta) = \omega^{(k-1)}_{(\tilde{\mu})_k;2}(\beta)\psi^k_{((\mu)_k;(\mu)_{k+1});1j}(\beta, \operatorname{ch} R_k, \operatorname{ch} R_{k+1}) -$$

$$-\omega^{(k-1)}_{(\tilde{\mu})_k;1}(\beta)\psi^k_{((\mu)_k;(\mu)_{k+1});2j}(\beta, \operatorname{ch} R_k, \operatorname{ch} R_{k+1}) j = 1, 2, \quad k = \overline{2, n}.$$

Згідно з роботами [18 – 20] доводяться такі теореми.

Теорема 2 (про дискретний спектр)**.** *Корені β_s трансцендентного рівняння* (13) *утворюють дискретний спектр*: *дійсні, різні, симетрично розташовані відносно точки $\beta = 0$; їх модулі складають монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.*

Підставимо в систему (13) $\beta = \beta_s \, (b_{js} = a_j^{-1} \ \ (\beta_s^2 + \gamma_j^2)^{1/2})$ і знехтуємо останнім рівнянням внаслідок лінійної залежності. Рівняння, що залишилися в системі (13) при $b_k = b_{ks}$, утворюють n рекурентних систем по два рівняння в кожній. Розв'язуючи останні, одержуємо

$$V_{(\mu);1}(r, \beta_s) = \Delta_{(\mu);n}(\beta_s)P^{(\mu)_1}_{-1/2+ib_{1s}}(\operatorname{ch} r),$$

$$\Delta_{(\mu);n}(\beta_s) = \prod_{m=1}^{n} \frac{c_{2m}}{\operatorname{sh} R_m} \frac{1}{S_{(\mu)_m}(b_{ms})},$$

$$V_{(\mu);k}(r, \beta_s) = \left(\prod_{k=m}^{n} \frac{c_{2m}}{\operatorname{sh} R_m} \frac{1}{S_{(\mu)_m}(b_{ms})} \right) \times$$

$$\times \Big[\omega^{(k-1)}_{\tilde{\mu}_k;2}(\beta_s)A^{(\mu)_k}_{-1/2+ib_{ks}}(\operatorname{ch} r) - \omega^{(k-1)}_{\tilde{\mu}_k;1}(\beta_s)B^{(\mu)_k}_{-1/2+ib_{ks}}(\operatorname{ch} r) \Big], \quad k = \overline{2, n},$$

$$V_{(\mu);n+1}(r,\beta_s) = \omega^{(n)}_{\tilde{\mu}_{m+1};2}(\beta_s) A^{(\mu)_{n+1}}_{-1/2+ib_{n+1,s}}(\operatorname{ch} r) -$$

$$-\omega^{(n)}_{\tilde{\mu}_{n+1};1}(\beta_s) B^{(\mu)_{n+1}}_{-1/2+ib_{n+1,s}}(\operatorname{ch} r).$$

Власному числу β_j відповідає одна власна (спектральна) вектор-функція

$$V_{(\mu)}(r,\beta_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{(\mu);k}(r,\beta_j), \qquad R_0=0, \quad R_{n+1}=R.$$

Квадрат норми спектральної вектор-функції визначається формулою

$$||V_{(\mu)}(r,\beta_j)||^2 = \int_0^R [V_{(\mu)}(r,\beta_j)]^2 \sigma(r) dr \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} [V_{(\mu);k}(r,\beta_j)]^2 \sigma_k \operatorname{sh} r dr, \qquad R_0=0, \quad R_{n+1}=R.$$

Теорема 3 (про дискретну функцію). *Система власних вектор-функцій* $\{V_{(\mu)}(r,\beta_j)\}_{j=1}^{\infty}$ *є ортогональною на множині* I_n *з ваговою функцією* $\sigma(r)$, *повною і замкнутою.*

Теорема 4 (типу теореми Стєклова). *Будь-яка вектор-функція* $g(r) \in G$ *розгортається за системою власних вектор-функцій* $\{V_{(\mu)}(r,\beta_j)\}_{j=1}^{\infty}$ *оператора* $\mathcal{L}_{(\mu)}$ *в абсолютно і рівномірно збіжний на кожній компактній множині* $I_n^* \subset I_n$ *ряд Фур'є*:

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^R g(\rho) V_{(\mu)}(\rho,\beta_j)\sigma(\rho) d\rho \frac{V_{(\mu)}(r,\beta_j)}{\|V_{(\mu)}(r,\beta_j)\|^2}. \tag{14}$$

Ряд Фур'є (14) визначає пряме $M_{(\mu);n}$ та обернене $M^{-1}_{(\mu);n}$ скінченні гібридні інтегральні перетворення типу Мелера – Фока 1-го роду на множині I_n:

$$M_{(\mu);n}[g(r)] = \int_0^R g(r) V_{(\mu)}(r,\beta_j)\sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_j = \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{g}_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} g_k(r) V_{(\mu);k}(r,\beta_j)\sigma_k \operatorname{sh} r dr, \quad R_0 = 0, \tag{15}$$

$$M^{-1}_{(\mu);n}[\tilde{g}_j] = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{g}_j \frac{V_{(\mu)(r,\beta_j)}}{||V_{(\mu)}(r,\beta_j)||^2} \equiv g(r). \tag{16}$$

Теорема 5 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція* $f(r) = \mathcal{L}_{(\mu)}[g(r)]$ *є неперервною на* I_n, *а компоненти* $g_m(r)$ *вектор-функції* $g(r)$ *задовольняють крайові умови*

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{sh} r \left(V_{(\mu);1} \frac{dg_1}{dr} - g_1 \frac{dV_{(\mu);1}}{dr} \right) = 0,$$

$$\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{n+1}\right)g_{n+1}(r)\Big|_{r=R_{n+1}}=g_R=\text{const}$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk},$$

$$j=1,2,\quad k=\overline{1,n},$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення узагальненого гібридного диференціального оператора Лежандра $\mathcal{L}_{(\mu)}$, *визначеного рівністю* (3):

$$M_{(\mu);n}[\mathcal{L}_{(\mu)}[g(r)]]=-\beta_j^2\tilde{g}_j+(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}(\operatorname{sh}R)V_{(\mu);n+1}(R,\beta_j)g_R-$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}g_k(r)V_{(\mu);k}(r,\beta_j)\sigma_k\operatorname{sh}r\,dr+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2\sigma_k}{c_{1k}}\operatorname{sh}R_k\Big\{Z_{(\mu);12}^k(\beta_j)\omega_{2k}-Z_{(\mu);22}^k(\beta_j)\omega_{1k}\Big\},\tag{17}$$

де $Z_{(\mu);m2}^k(\beta_j)=\Big(\alpha_{m2}^k d/dr+\beta_{m2}^k\Big)V_{(\mu);k+1}(r,\beta_j)|_{r=R_k}$.

Застосування. Наявність основної тотожності (17) дозволяє використати введені формулами (15), (16) інтегральні перетворення для одержання інтегрального зображення точного аналітичного розв’язку відповідних сингулярних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку в кусково-однорідних середовищах.

***Приклад* 1.** Побудувати обмежений в області $D_n=\big\{(r,z)\colon r\in I_n; z\in(-\infty,+\infty)\big\}$ розв’язок сепаратної системи диференціальних рівнянь еліптичного типу з оператором Лежандра

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+a_j^2\Lambda_{(\mu)_j}-\chi_j^2\right)u_j(r,z)=-f_j(r,z),\quad j=\overline{1,n+1},\tag{18}$$

за крайовими умовами

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}\Big|_{r=0}=0,\qquad\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}\Big|_{r=R_{n+1}}=g_R(z)\tag{19}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k}=$$

$$=\omega_{jk}(z),\qquad j=1,2,\quad k=\overline{1,n}.\tag{20}$$

Не зменшуючи загальності розв’язку задачі, будемо вважати, що $\max\big\{\chi_1^2;\chi_2^2;\ldots\;\ldots;\chi_{n+1}^2\big\}=\chi_1^2\geq 0$. Запишемо систему (18) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + a_1^2 \Lambda_{(\mu)_1} - \chi_1^2\right) u_1(r,z) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + a_2^2 \Lambda_{(\mu)_2} - \chi_2^2\right) u_2(r,z) \\ \dots \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{n+1}^2 \Lambda_{(\mu)_{n+1}} - \chi_{n+1}^2\right) u_{n+1}(r,z) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(r,z) \\ f_2(r,z) \\ \dots \\ f_{n+1}(r,z) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Інтегральний оператор $M_{(\mu);n}$ згідно з (15) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{(\mu);n}[\dots] = \left[\int\limits_0^{R_1} \dots V_{(\mu);1}(r,\beta_j)\ \sigma_1 \operatorname{sh}\ r\, dr \int\limits_{R_1}^{R_2} \dots V_{(\mu);2}(r,\beta_j)\ \sigma_2 \operatorname{sh} r\, dr \dots \right.$$

$$\left. \dots \int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_{(\mu);n}(r,\beta_j)\ \sigma_n \operatorname{sh} r\, dr \int\limits_{R_n}^{R_\infty} \dots V_{(\mu);n+1}(r,\beta_j)\ \sigma_{n+1} \operatorname{sh}\ r\, dr \right]. \tag{22}$$

Покладемо $\gamma_m^2 = \chi_1^2 - \chi_m^2$ для $m = \overline{1, n+1}$ і застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (22) до системи (21). Внаслідок тотожності (17) одержимо крайову задачу: побудувати обмежений на $(-\infty, +\infty)$ розв'язок диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\beta_j^2 + \chi_1^2\right)\right] \tilde{u}_j(z) = -\tilde{F}_j(z), \tag{23}$$

де

$$\tilde{F}_j(z) = \tilde{f}_j(z) + \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} \operatorname{sh}\ R\, V_{(\mu);n+1}(R,\beta_j)\, g_R(z) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k \frac{\operatorname{sh}\ R_k}{c_{1k}} \left[Z_{(\mu);12}^k(\beta_j)\, \omega_{2k}(z) - Z_{(\mu);22}^k(\beta_j)\, \omega_{1k}(z) \right].$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим на множині $|z| < \infty$ розв'язком рівняння (23) є функція

$$\tilde{u}_j(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-q_j|z-\zeta|}}{2q_j} \tilde{F}_j(\zeta)\, d\zeta, \quad q_j = \left(\beta_j^2 + \chi_1^2\right)^{1/2}. \tag{24}$$

Оператор $M_{(\mu);n}^{-1}$ згідно з (16), як обернений до (15), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{(\mu);n}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dots V_{(\mu);1}(r,\beta_j) \left(\left\|V_{(\mu)}(r,\beta_j)\right\|^2\right)^{-1} \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dots V_{(\mu);2}(r,\beta_j) \left(\left\|V_{(\mu)}(r,\beta_j)\right\|^2\right)^{-1} \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dots V_{(\mu);n+1}(r,\beta_j) \left(\left\|V_{(\mu)}(r,\beta_j)\right\|^2\right)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Визначимо головні розв'язки еліптичної задачі (18) – (20):

1) функції впливу

$$\varepsilon_{(\mu);ik}\left(r,\rho,z,\zeta\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-q_j|z-\zeta|}}{2q_j}\frac{V_{(\mu);i}\left(r,\beta_j\right)V_{(\mu);k}\left(\rho,\beta_j\right)}{\left\|V_{(\mu)}\left(r,\beta j\right)\right\|^2},\quad i,k=\overline{1,n+1};$$

2) функції Гріна

$$W_{(\mu);n+1,i}\left(r,z,\zeta\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-q_j|z-\zeta|}}{2q_j}\frac{\operatorname{sh}R}{\alpha_{22}^{n+1}}\frac{V_{(\mu);i}\left(r,\beta_j\right)V_{(\mu);n+1}\left(R,\beta_j\right)}{\left\|V_{(\mu)}\left(r,\beta_j\right)\right\|^2},\quad i=\overline{1,n+1};$$

3) функції Гріна

$$R_{(\mu);m2}^{ik}\left(r,z,\zeta\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-q_j|z-\zeta|}}{2q_j}a_k^2\sigma_k\frac{\operatorname{sh}R_k}{c_{1k}}Z_{(\mu);m2}^k\left(\beta_j\right)\frac{V_{(\mu);i}\left(r,\beta_j\right)}{\left\|V_{(\mu)}\left(r,\beta j\right)\right\|^2}.$$

В результаті застосування за правилом множення матриць операторної матриці-стовпця (25) до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_j(z)\right]$, де функція $\tilde{u}_j(z)$ визначена формулою (24), одержуємо єдиний розв'язок еліптичної крайової задачі (18) – (20):

$$u_m\left(r,z\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}\varepsilon_{(\mu);mk}\left(r,\rho,z,\zeta\right)f_k\left(\rho,\zeta\right)\sigma_k\operatorname{sh}\rho\,d\rho\,d\zeta\,+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_{(\mu);n+1,m}\left(r,z,\zeta\right)g_R\left(\zeta\right)d\zeta\,+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[R_{(\mu);12}^{mk}\left(r,z,\zeta\right)\omega_{2k}\left(\zeta\right)-R_{(\mu);22}^{mk}\left(r,z,\zeta\right)\omega_{1k}\left(\zeta\right)\right]d\zeta,\quad m=\overline{1,n+1}.$$

Вектор-функція $u\left(r,z\right)=\left\{u_1(r,z);u_2(r,z);\ldots;u_n(r,z);u_{n+1}(r,z)\right\}$ визначає інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку даної еліптичної крайової задачі.

***Приклад* 2.** Побудувати обмежений в області $D_n^+=\left\{(t,r)\colon t\in(0,\infty);\ r\in\in I_n\right\}$ розв'язок сепаратної системи рівнянь параболічного типу з оператором Лежандра

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+\chi_j^2u_j-a_j^2\Lambda_{(\mu)_j}\left[u_j\right]=f_j\left(t,r\right),\quad j=\overline{1,n+1},\tag{26}$$

за початковими умовами

$$\left.u_j\left(t,r\right)\right|_{t=0}=g_j\left(r\right),\qquad r\in\left(R_{j-1},R_j\right),\quad j=\overline{1,n+1},\quad R_0=0,\tag{27}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}\right)\,u_{k}\left(t,r\right)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}\right)\,u_{k+1}\left(t,r\right)\right]\Big|_{r=R_{k}}=$$

$$=\omega_{jk}\left(t\right),\qquad j=1,2,\quad k=\overline{1,n},\tag{28}$$

та крайовими умовами

$$|u_{1}|_{r=0}<\infty,\qquad\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}|_{r=R_{n+1}}=g_{R}\left(t\right).\tag{29}$$

Вважаємо, що виконуються умови узгодженості

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)\,g_{k}(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)\,g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_{k}}=$$

$$=\omega_{jk}\left(0\right),\qquad j=1,2,\quad k=\overline{1,n},$$

$$g_{1}|_{r=0}<\infty,\qquad\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{n+1}\right)g_{n+1}|_{r=R_{n+1}}=g_{R}(0).$$

Запишемо систему (26) і початкові умови (27) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\chi_{1}^{2}-a_{1}^{2}\Lambda_{(\mu)_{1}}\right)u_{1}(t,r)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\chi_{2}^{2}-a_{2}^{2}\Lambda_{(\mu)_{2}}\right)u_{2}(t,r)\\ \ldots\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\chi_{n+1}^{2}-a_{n+1}^{2}\Lambda_{(\mu)_{n+1}}\right)u_{n+1}(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{1}\left(t,r\right)\\ f_{2}\left(t,r\right)\\ \ldots\\ f_{n+1}\left(t,r\right)\end{bmatrix},\tag{30}$$

$$\begin{bmatrix}u_{1}\left(t,r\right)\\ u_{2}\left(t,r\right)\\ \ldots\\ u_{n+1}\left(t,r\right)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_{1}(r)\\ g_{2}(r)\\ \ldots\\ g_{n+1}(r)\end{bmatrix}.$$

У припущенні, що $\max\left\{\chi_{1}^{2};\chi_{2}^{2};\ldots;\chi_{n+1}^{2}\right\}=\chi_{1}^{2}$, застосуємо до задачі (30) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (22). Внаслідок тотожності (17) одержуємо задачу Коші

$$\left(\frac{d}{dt}+q_{j}^{2}\right)\tilde{u}_{j}=\tilde{F}_{j}\left(t\right),\qquad\tilde{u}_{j}\,|_{t=0}=\tilde{g}_{j},\qquad q_{j}^{2}=\beta_{j}^{2}+\chi_{1}^{2},\tag{31}$$

де

$$\tilde{F}_{j}\left(t\right)=\tilde{f}_{j}\left(t\right)+\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}\mathrm{sh}\ R_{n+1}\,V_{(\mu);n+1}\left(R_{n+1},\beta_{j}\right)g_{R}\left(t\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}a_{k}^{2}\sigma_{k}\frac{\mathrm{sh}\ R_{k}}{c_{1k}}\left[Z_{(\mu);12}^{k}\left(\beta_{j}\right)\omega_{2k}\left(t\right)-Z_{(\mu);22}^{k}\left(\beta_{j}\right)\omega_{1k}\left(t\right)\right].$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (31) є функція

$$\tilde{u}_j(t) = e^{-q_j^2 t}\tilde{g}_j + \int_0^t e^{-q_j^2(t-\tau)}\tilde{F}_j(\tau)\,d\tau. \tag{32}$$

До матриці-елемента $[\tilde{u}_j(t)]$, де функція $\tilde{u}_j(t)$ визначена формулою (32), застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (25). В результаті елементарних перетворень одержуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (26) – (29):

$$u_m(t,r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\mu);mk}(t-\tau,r,\rho)\left[f_k(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)\,g_k(\rho)\right]\sigma_k \operatorname{sh}\rho\, d\rho\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t W_{(\mu);n+1,m}(t-\tau,r)g_R(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \Big[R_{(\mu);12}^{mk}(t-\tau,r)\,\omega_{2k}(\tau) -$$

$$-R_{(\mu);22}^{mk}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)\Big]d\tau, \quad m = \overline{1,n+1}, \tag{33}$$

де $\delta_+(\tau)$ — міра Дірака, зосереджена в точці 0^+.

До формули (33) входять головні розв'язки даної параболічної задачі:

1) функції впливу

$$H_{(\mu);mk}(t,r,\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-q_j^2 t} \frac{V_{(\mu);m}(r,\beta_j)\;V_{(\mu);k}(\rho,\beta_j)}{\left\|V_{(\mu)}(r,\beta_j)\right\|^2}, \quad m,\ k = \overline{1,n+1};$$

2) функції Гріна

$$W_{(\mu);n+1,m}(t,r) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-q_j^2 t} \frac{\operatorname{sh}\,R}{\alpha_{22}^{n+1}} \frac{V_{(\mu);m}(r,\beta_j)\;V_{(\mu);n+1}(R_{n+1},\beta_j)}{\left\|V_{(\mu)}(r,\beta_j)\right\|^2}, \quad m = \overline{1,n+1};$$

3) функції Гріна

$$R_{(\mu);i2}^{mk}(t,r) =$$

$$= a_k^2 \sigma_k \frac{\operatorname{sh} R_k}{c_{1k}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-q_j^2 t} Z_{(\mu);i2}^k(\beta_j)\, \frac{V_{(\mu);m}(r,\beta_j)}{\left\|V_{(\mu)}(r,\beta_j)\right\|^2}, \qquad i = 1,2, \quad k = \overline{1,n}.$$

Вектор-функція $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r); \ldots; u_{n+1}(t,r)\}$, компоненти якої $u_m(t,r)$ визначаються формулою (33), повністю описує єдиний розв'язок параболічної крайової задачі (26) – (29).

***Приклад* 3.** Побудувати обмежений в області D_n^+ розв'язок сепаратної системи рівнянь гіперболічного типу з оператором Лежандра

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\chi_j^2-a_j^2\Lambda_{(\mu)_j}\right]u_j\,(t,r)=f_j\,(t,r)\,,\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{34}$$

за початковими умовами

$$u_j\,(t,r)|_{t=0}=\varphi_j\,(r)\,,\qquad \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_j\,(r)\,,\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{35}$$

умовами спряження (28) та крайовими умовами (29).

Вважаємо, що виконуються умови узгодженості

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)\,\varphi_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)\,\varphi_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}\,(0)\,,$$

$$j=1,2,\quad k=\overline{1,n},$$

$$\varphi_1|_{r=0}<\infty,\qquad \left.\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{n+1}\right)\varphi_{n+1}\right|_{r=R_{n+1}}=g_R(0),$$

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)\,\psi_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)\,\psi_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}'\,(0)\,,$$

$$\psi_1|_{r=0}<\infty,\qquad \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{n+1}\right)\psi_{n+1}|_{r=R_{n+1}}=g_R'(0).$$

Запишемо систему (34) і початкові умови (35) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\chi_1^2-a_1^2\Lambda_{(\mu)_1}\right)\,u_1(t,r)\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\chi_2^2-a_2^2\Lambda_{(\mu)_2}\right)\,u_2(t,r)\\ \ldots\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\chi_{n+1}^2-a_{n+1}^2\Lambda_{(\mu)_{n+1}}\right)u_{n+1}(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\,(t,r)\\ f_2\,(t,r)\\ \ldots\\ f_{n+1}\,(t,r)\end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{bmatrix}u_1\,(t,r)\\ u_2\,(t,r)\\ \ldots\\ u_{n+1}\,(t,r)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\varphi_1\,(r)\\ \varphi_2\,(r)\\ \ldots\\ \varphi_{n+1}\,(r)\end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_1\,(t,r)\\ u_2\,(t,r)\\ \ldots\\ u_{n+1}\,(t,r)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\psi_1\,(r)\\ \psi_2\,(r)\\ \ldots\\ \psi_{n+1}\,(r)\end{bmatrix}.$$

До задачі (36) застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (22) в припущенні, що $\chi_1^2=\max\limits_{1\le j\le n+1}\left\{\chi_j^2\right\}$. Внаслідок тотожності (17) маємо задачу Коші

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+q_j^2\right)\tilde{u}_j=\tilde{F}_j\left(t\right),\qquad u_j\left.\right|_{t=0}=\tilde{\varphi}_j,\qquad \left.\frac{d\tilde{u}_j}{dt}\right|_{t=0}=\tilde{\psi}_j. \tag{37}$$

Єдиним розв'язком задачі Коші (37) є функція

$$\tilde{u}_j=\frac{\sin q_j t}{q_j}\tilde{\psi}_j+\frac{d}{dt}\frac{\sin q_j t}{q_j}\tilde{\varphi}_j+\int\limits_0^t\frac{\sin q_j\left(t-\tau\right)}{q_j}\tilde{F}_j\left(\tau\right)d\tau. \tag{38}$$

До матриці-елемента $[\tilde{u}_j]$, де функція $\tilde{u}_j$ має структуру (38), за правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (25). В результаті елементарних перетворень одержимо компоненти

$$u_m\left(t,r\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}H_{(\mu);mk}\left(t-\tau,r,\rho\right)\left[f_k\left(\tau,\rho\right)+\delta_+\left(\tau\right)\psi_k\left(\rho\right)\right]\sigma_k\operatorname{sh}\rho\,d\rho\,d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}H_{(\mu);mk}\left(t,r,\rho\right)\varphi_k\left(\rho\right)\sigma_k\operatorname{sh}\ \rho\,d\rho+$$

$$+\int\limits_0^t W_{(\mu);n+1,m}\left(t-\tau,r\right)g_R\left(\tau\right)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t\Big[R^{mk}_{(\mu);12}\left(t-\tau,r\right)\omega_{2k}\left(\tau\right)-R^{mk}_{(\mu);22}\left(t-\tau,r\right)\omega_{1k}\left(\tau\right)\Big]d\tau,\quad m=\overline{1,n+1}, \tag{39}$$

вектор-функції $u\left(t,r\right)=\left\{u_1\left(t,r\right);u_2\left(t,r\right);\ldots;u_n\left(t,r\right);u_{n+1}\left(t,r\right)\right\}$, яка визначає єдиний аналітичний розв'язок даної гіперболічної задачі.

Формули (39) містять головні розв'язки гіперболічної задачі (34), (35), (28), (29):

1) функції впливу

$$H_{(\mu);mk}\left(t,r,\rho\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin q_j t}{q_j}\frac{V_{(\mu);m}\left(r,\beta_j\right)\ V_{(\mu);k}\left(\rho,\beta_j\right)}{\left\|V_{(\mu)}\left(r,\beta_j\right)\right\|^2},\quad m,k=\overline{1,n+1};$$

2) функції Гріна

$$W_{(\mu);n+1,m}\left(t,r\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin q_j t}{q_j}\frac{\operatorname{sh}\ R}{\alpha_{22}^{n+1}}\frac{V_{(\mu);m}\left(r,\beta_j\right)\ V_{(\mu);n+1}\left(R_{n+1},\beta_j\right)}{\left\|V_{(\mu)}\left(r,\beta_j\right)\right\|^2},\quad m=\overline{1,n+1};$$

3) функції Гріна

$$R^{mk}_{(\mu);i2}\left(t,r\right)=a_k^2\sigma_k\frac{\operatorname{sh}R_k}{c_{1k}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin q_j t}{q_j}Z^k_{(\mu);i2}\left(\beta_j\right)\frac{V_{(\mu);m}\left(r,\beta_j\right)}{\left\|V_{(\mu)}\left(r,\beta_j\right)\right\|^2},$$

$$i = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, n+1}.$$

Зауважимо, що побудовані розв'язки мають алгоритмічний характер і неперервно залежать від параметрів та даних задачі.

1. *Фок В. А.* О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком // Докл. АН СССР. – 1943. – **39**, № 7. – С. 253 – 256.
2. *Лебедев Н. Н.* Некоторые интегральные преобразования математической физики: Автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Л., 1951. – 18 с.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
4. *Белова Н. А.* Об одном разложении в интегралы по сферическим функциям первого и второго рода // Дифференц. уравнения. – 1969. – **5**, вып. 11. – С. 2096 – 2100.
5. *Улитко А. Ф.* Об одном обобщении интегрального преобразования Мелера – Фока // Прикл. механика. – 1967. – **3**, вып. 5. – С. 45 – 49.
6. *Уфлянд Я. С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С. 93 – 106.
7. *Федотова И. А.* Об одном интегральном преобразовании с обобщенными присоединенными функциями Лежандра // Вычислит. и прикл. математика: Межвед. науч. сб. – 1990. – Вып. 71. – С. 33 – 43.
8. *Вирченко Н. А., Федотова И. А.* Обобщенные функции Лежандра и их применение. – Киев, 1998. – 158 с.
9. *Конет І. М., Нікітіна О. М.* Інтегральне перетворення, породжене на полярній осі $r \geq 0$ узагальненим диференціальним оператором Лежандра // Сучасні проблеми математики: Мат. міжнар. наук. конф. – Чернівці: Рута, 1998. – Ч. 4. – С. 47 – 50.
10. *Конет І. М., Нікітіна О. М.* Інтегральне перетворення типу Мелера – Фока, породжене на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ узагальненим диференціальним оператором Лежандра // Зб. наук. пр. Кам'янець-Поділ. пед. ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 1998. – Вип. 4. – С. 57 – 63.
11. *Конет І. М., Ленюк М. П., Нікітіна О. М.* Деякі узагальнення інтегральних перетворень типу Мелера – Фока. – Київ, 1998. – 56 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 98.6).
12. *Конет І. М.* Про узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера – Фока на полярній осі з N точками спряження // Интегральные уравнения и их применения: Тез. докл. междунар. конф. – Одесса, 2005. – С. 70.
13. *Конет І. М.* Про узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера – Фока на кусково-однорідній полярній осі $r \geq R_0 > 0$ // Диференц. рівняння та їх застосування (Міжнар. конф., присв. 60-річчю кафедри інтегральних і диференц. рівнянь Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка): Тези доп. – Київ, 2005. – С. 46.
14. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера – Фока на полярній осі з n точками спряження // Доп. НАН України. Математика, природознавство, технічні науки. – 2006. – № 9. – С. 22 – 27.
15. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера – Фока на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з n точками спряження // Мат. студії. – 2006. – **25**, № 2. – С. 169 – 180.
16. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
17. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
18. *Комаров Г. М., Ленюк М. П., Мороз В. В.* Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.
19. *Ленюк М. П.* Гибридные интегральные преобразования (Бесселя, Лежандра, Бесселя) // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 6. – С. 770 – 779.
20. *Ленюк М. П., Олейник Н. П.* Об одном классе интегральных преобразований (Бесселя – Фурье – Бесселя – . . . – Фурье – Бесселя) на полярной оси с $2n$ точками сопряжения // Там же. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1096 – 1103.

Одержано 12.09.2006